

SÉMINAIRE DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

MARIE-HÉLÈNE SCHWARTZ

Espaces pseudo fibrés

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n° 6, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A6_0>

© Séminaire de topologie et géométrie différentielle
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire de topologie et géométrie différentielle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Avril 1959

ESPACES PSEUDO FIBRES
 par Marie-Hélène SCHWARTZ

1 Définition

Nous avons été conduits à définir des espaces pseudo fibrés, non par un souci de généralisation, mais en étudiant l'obstruction à la construction d'un champ de vecteurs (ou de systèmes de vecteurs) tangents à une variété différentiable et assujettis à des conditions supplémentaires. Notre but, seulement partiellement atteint, est de déterminer un système de classes de cohomologie qui jouera dans un espace pseudo fibré un rôle analogue à celui de la classe obstructrice d'un espace fibré.

EXEMPLE. Soient dans $\mathbb{R}^3$ deux calottes sphériques $\bar{X}_2$ et $\bar{X}_3$ ayant pour bord commun un cercle X_1 . Soient X_2 et X_3 les complémentaires de X_1 dans $\bar{X}_2$ et $\bar{X}_3$ et X_4 le complémentaire de $\bar{X}_2 \cup \bar{X}_3$ dans $\mathbb{R}^3$. Les X_i ($i = 1, 2, 3, 4$) forment une partition (X) de $X = \mathbb{R}^3$. Soient E l'espace fibré de tous les vecteurs non nuls issus de tous les points de $\mathbb{R}^3 = X$ et π la projection de E sur X. En chaque point x de X, $x \in X_i$, considérons l'ensemble des vecteurs non nuls tangents à X_i . Soit $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble engendré lorsque x décrit X, par tous ces vecteurs, muni de la projection π et de la topologie induite par celle de E. $\mathcal{E}$ est un espace pseudo fibré, la fibre $\mathcal{E}(x) = \pi^{-1}(x)$, $x \in X_i$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{k*}$, k étant la dimension de X_i , chaque $\mathcal{E}(X_i)$ est un espace fibré.

Il n'existe pas de section globale de $\mathcal{E}$ au dessus de sa base $X = \mathbb{R}^3$ mais il en existe par exemple, au dessus de tout plan Π de $\mathbb{R}^3$ passant par l'axe du cercle X_1 .

Il n'y a pas de relèvement des homotopies dans $\mathcal{E}$

Considérons la trace γ du plan Π sur $\bar{X}_2$, l'un des arcs γ' déterminés sur X_1 par Π , la boule $\beta \subset \bar{X}_2$ de bord $\gamma \cup \gamma'$ et un homéomorphisme du carré I^2 sur β de manière qu'un côté ait pour image γ ; considérons la section s de $\mathcal{E}$ au dessus de γ formée de vecteurs perpendiculaires à Π , elle n'est pas prolongeable au dessus de γ' donc à fortiori au dessus de β .

Base de $\mathcal{E}$

C'est une variété topologique X munie d'une partition (X_i) en sous-variétés topologiques (sans bords) X_i de façon que l'adhérence $\bar{X}_i$ de chaque X_i soit réunion d'une sous famille de la partition, et d'un complexe simplicial (K) tel que les $\bar{X}_i$ en soient des sous-complexes. Nous désignerons par K^h (resp $\bar{K}^h$) un simplexe ouvert (resp fermé) de dimension h, par N la dimension de X et nous ferons figurer au besoin, la dimension d'une sous-variété X_i en indice supérieur en supprimant l'indice inférieur s'il n'y a pas ambiguïté. Les bords seront désignés par $\dot{X}_1$, $\dot{K}^h$ etc.

Hypothèse de finesse sur (K) : K est pris assez fin pour que, quelque soit K^h , $K^h \subset X_i$, $\bar{K}^h \cap X_i$ se réduise à un seul simplexe fermé vide ou non. Il en résulte aisément que $\bar{K}^h$ rencontre au plus un X_i de chaque dimension.

Parties L. Soit K^0 un sommet de K^h , $U = \overset{\circ}{\text{ét}}(K^0)$ son étoile ouverte dans (K) et $L = \bar{K}^h \cap \overset{\circ}{\text{ét}} K^0$. L rencontre également au plus un X_i de chaque dimension, la plus petite est p tel que $K^0 \in X^p$ et la plus grande k tel que $K^h \subset X^k$; on peut écrire :

$$(1) \quad L = \bar{K}^h \cap \overset{\circ}{\text{ét}} K^0 = \sum_{q=p}^{q=k} L \cap X^q$$

Fibres-type de $\hat{\mathcal{E}}$

Une même fibre type F_k va correspondre à tous les X_i de même dimension k . F_k sera un espace topologique localement compact, et la famille des F_k sera munie d'une famille d'injections continues que nous appellerons les monomorphismes. Cette famille sera formée, pour tout couple $k, k' (k' \leq k)$ d'un ensemble de monomorphismes de $F_{k'}$ dans F_k (ensemble non vide si $F_{k'}$ et F_k sont non vides). On suppose que si $k'' \leq k' \leq k$, le composé d'un monomorphisme de $F_{k''}$ dans $F_{k'}$ et d'un monomorphisme de $F_{k'}$ dans F_k est un monomorphisme de $F_{k''}$ dans F_k .

Cartes de $\hat{\mathcal{E}}$

Un espace pseudo fibré $\hat{\mathcal{E}}$ de base X et dont les fibres types sont les F_k est un ensemble muni d'une projection $\bar{\omega}$ sur X tel que pour tout L de X il existe une famille de cartes sur $\hat{\mathcal{E}}(L) = \bar{\omega}^{-1}(L)$, une carte étant définie par un espace $\mathcal{L}$ et une bijection g de $\mathcal{L}$ sur $\hat{\mathcal{E}}(L)$ de la manière suivante :

Soit comme précédemment $L = \bar{K}^h \cap \overset{\circ}{\text{ét}} K^0$, $K^0 \in X^p$, $K^h \subset X^k$. Considérons toutes les dimensions q qui figurent dans la formule (1). On peut former une famille de monomorphismes μ_q de F_q dans F_k (soit $\alpha_q = \mu_q(F_q)$) telle que si $q' \leq q$, on ait $\alpha_{q'} \subset \alpha_q \subset \alpha_k = F_k$ et que $\mu_{q'}$ coïncide avec l'application composée d'un monomorphisme de $F_{q'}$ dans F_q et de μ_q .

Formons alors l'espace $\mathcal{L}$ suivant :

$$(2) \quad \mathcal{L} = \bigcup_{q=p}^{q=k} (L \cap X^q) \times \alpha_q; \text{ on a } L \times \alpha_p \subset \mathcal{L} \subset L \times F_k$$

$\mathcal{L}$ est muni de la topologie induite par celle du produit $L \times F_k$.

Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ définis par les familles de monomorphismes μ_{1q} et μ_{2q} . Un isomorphisme de $\mathcal{L}_1$ sur $\mathcal{L}_2$ est une application dont la restriction à $\mathcal{L}_1(x) = \{x\} \times \alpha_q$ (pour $x \in X^q$) est un monomorphisme sur $\{x\} \times \alpha'_{1q}$.

Une carte sera définie par $\mathcal{L}$ et par bijection g de $\mathcal{L}$ sur $\bar{\omega}^{-1}(L)$ telle que $\bar{\omega} \circ g = \pi_L$ (π_L étant la projection sur L dans le produit $L \times F_k$).

L'ensemble des cartes définissant $\tilde{\mathcal{E}}$ devra satisfaire aux deux conditions de compatibilité suivantes :

1) Si deux cartes sont définies sur $\mathcal{W}^{-1}(L)$ par $\mathcal{L}_1, g_1$ et $\mathcal{L}_2, g_2$, l'application $\sigma_{12} = g_1^{-1} \circ g_2$ doit être un isomorphisme de $\mathcal{L}_2$ sur $\mathcal{L}_1$ au sens défini ci-dessus.

2) Si on a $L' \subset L$ et une carte de $\mathcal{W}^{-1}(L)$ définie par $\mathcal{L}, g$, la restriction de g à $\mathcal{L}(L') = \pi_L^{-1}(L')$ définit une carte de $\mathcal{W}^{-1}(L')$.

Topologie de $\tilde{\mathcal{E}}$. Les ouverts seront les parties $\mathcal{O}$ de $\tilde{\mathcal{E}}$ tels que $\mathcal{W}(\mathcal{O})$ soit un ouvert de X et que, pour $\mathcal{E}(L) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$, et pour toute carte de $\mathcal{E}(L)$ définie par $\mathcal{L}$ et g , $g^{-1}(\mathcal{E}(L) \cap \mathcal{O})$ soit un ouvert de $\mathcal{L}$.

$\tilde{\mathcal{E}}$ n'est pas localement compact. $\mathcal{E}(X_i^k) = \mathcal{W}^{-1}(X_i^k)$ est un espace fibré de fibre F_k et dont le groupe structural est celui des monomorphismes de F_k sur lui-même.

2 Espaces pseudo fibrés à fibres vectorielles et espaces associés.

Nous appellerons ainsi un espace pseudo fibré $\tilde{\mathcal{E}}$ dont les fibres F_k sont des espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ et pour lequel les monomorphismes sont des applications linéaires (homogènes) injectives. Dans les deux cas, les dimensions que nous indiquerons seront prises par rapport à $\mathbb{R}$ (sauf dans l'expression abrégée v -plan-complexe).

Espace Γ .

On suppose données une base X munie de la partition X_i et du complexe (K) et une famille de fibres-type vectorielles F_k , les monomorphismes étant les injections linéaires.

Soit Γ un espace topologique muni d'une application continue $\mathcal{W}$ sur X et tel que $\Gamma(X^k) = \mathcal{W}^{-1}(X^k)$ possède une structure d'espace fibré de fibre F_k . Un espace pseudo fibré est un espace Γ .

EXEMPLE. Si X et tous les X_i sont des variétés différentiables (resp. presque-complexes) l'espace de tous les vecteurs tangents à tous les X_i est un espace Γ , la topologie étant induite par celle de l'espace fibré E de tous les vecteurs tangents à X . Le problème se pose de savoir si un tel espace, défini uniquement par la partition (X_i) possède une structure d'espace pseudo-fibré. Nous dirons dans ce cas, que c'est un espace pseudo fibré de type tangentiel (réel ou complexe). F_k sera isomorphe à $\mathbb{R}^k$ (resp $\mathbb{C}^{k/2}$). Dans le cas complexe tous les entiers k sont nécessairement pairs.

Applications φ .

Une famille d'applications φ , si elle existe, se compose relativement à chaque simplexe K^h d'un ensemble d'applications φ_h vérifiant les conditions φ_1 et φ_2 suivantes : Soit $U_h = \circ K^h$ (étoile ouverte de K^h dans (K)) et $K^h \subset X^k$.

(φ_1) φ_h est une injection continue de $U_h \times F_k$ dans $\Gamma(U_h)$ dont la restriction à $\{x\} \times F_k$ est une application linéaire sur $\Gamma(x)$.

(φ_2) Soit $K^e \subset U_h \cap X^q$ et $U_e = \overset{\circ}{e} K^h \subset U_h$, ($K^h \subset \bar{K}^h$) alors à une application donnée φ_h on peut associer une application φ_e de $U_e \times F_q$ dans $\Gamma(U_e)$ telle que pour $x \in U_e$, $\varphi_e(\{x\} \times F_q)$ admette pour sous espace vectoriel $\varphi_h(\{x\} \times F_k)$.

Dans les espaces Γ de types tangentiels, une application φ_h correspond à un champ d'éléments de contacts de dimension h tangent en tout point x de $U(x \in X^m)$, à X^m .

PROPOSITION 1. Tout espace pseudo fibré possède une famille d'applications φ . De plus, si toutes les fibres sont munies d'une orientation, une telle famille vérifie la condition $(\varphi)_1'$ suivante :

$(\varphi)_1'$ Si φ_h et φ_h' sont deux injections de $U \times F_k$ dans $\hat{\mathcal{C}}(U)$ définies par la condition (φ_1) , elles sont strictement homotopes, c'est-à-dire qu'il existe une application continue de $U \times F_k \times [0,1]$ dans $\hat{\mathcal{C}}(U)$ telle que pour $t \in [0,1]$, $U \times F_k \times \{t\} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}(U)$ soit une des applications définies par (φ_1) , soit $\varphi_h(t)$ et que $\varphi_h(0) = \varphi_h$ et $\varphi_h(1) = \varphi_h'$.

Cette condition est donc réalisée pour tous les espaces pseudo-fibrés à fibres vectorielles sur $\mathbb{C}$.

PROPOSITION 2. Si un espace Γ possède une famille d'applications φ , il possède une structure d'espace pseudo-fibré à fibres vectorielles et cette structure est unique.

Ces propositions se démontrent par des constructions suivant les squelettes de dimensions croissantes de $(K) \times U$ et par certains relèvements d'homotopies.

Espace ${}^r\hat{\mathcal{C}}$ associé à un espace $\hat{\mathcal{C}}$ à fibres vectorielles.

Appelons r -repère réel (resp. complexe) une suite ordonnée de r vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). L'espace ${}^r\hat{\mathcal{C}}(x)$ des r -repères de $\hat{\mathcal{C}}(x)$ engendre, lorsque x décrit X , un espace ${}^r\hat{\mathcal{C}}$. ${}^r\hat{\mathcal{C}}(X^k)$ est vide, dans le cas réel pour $k < r$ et, dans le cas complexe, pour $k < 2r$. La structure d'espace pseudo-fibré de ${}^r\hat{\mathcal{C}}$ est établie par des cartes qui se définissent de manière évidente à l'aide de celles de $\hat{\mathcal{C}}$. (on appelle ${}^r\alpha_q$ l'espace des r -repères de α_q on pose ${}^r\mathcal{L} = \bigcup (L \cap X^q) \times {}^r\alpha_q$ et g définit une application g^1 de ${}^r\mathcal{L}$ sur ${}^r\hat{\mathcal{C}}(L)$).

La fibre F_k de ${}^r\hat{\mathcal{C}}(X^k)$ ayant pour rétract une variété de Stiefel Whitney réelle (resp. complexe), son homologie est triviale jusqu'à la dimension $k - r$ (resp. $k - 2r + 1$) exclue.

L'exemple donné au début de cet exposé est un espace ${}^1\hat{\mathcal{C}}$ associé à un espace de type vectoriel réel (c'est un espace Γ et l'existence de cartes résulte par exemple de la proposition 2.)

3 Sections dans les espaces pseudo fibrés, homologie et cohomologie sur X.

Complexe cellulaire (D), dual de K dans X.

On choisit une fois pour toutes un tel complexe (D) en fixant d'abord un de ses sommets dans chaque K^N (N dimension de X) puis un côté coupant canoniquement chaque K^{N-1} , etc.,. Une cellule ouverte D^m coupera canoniquement chaque K^h , à fortiori chaque X_i . Soit (T) le complexe intersection de (K) et (D). On a :

$$T^n = D^{N-h+n} \cap K^h$$

chaque T^n est dans un X_i et on vérifie que chaque $\bar{T}^n$ est dans au moins un L .

On cherchera à construire des sections au dessus des squelettes de dimensions croissantes $(D)^m$ de (D). Si $\bar{L}^n$ n'est pas vide la fibre type F_N ne l'est pas et il existe des sections au dessus de $(D)^\circ$.

Dimension d'obstruction.

Nous la noterons $N - \rho + 1$

Définition de ρ . Soit $v(k)$ la dimension du premier groupe d'homotopie non nul de F_k ; considérons la relation suivante relative à un entier ρ' :

$$k \geq \rho' + 1 \text{ entraîne } F_k \neq \emptyset \text{ et } v(k) \geq k - \rho'$$

elle est trivialement vérifiée pour $\rho' = N$; si elle est vérifiée pour ρ' elle l'est à fortiori pour $\rho'' > \rho'$. ρ sera la borne inférieure des entiers vérifiant cette relation.

HYPOTHESE : On suppose que $k = \rho$ entraîne encore $F_k \neq \emptyset$, (cette hypothèse est trivialement vérifiée dans le cas des $\bar{L}$ à structure complexe, k étant paire et ρ impaire). On peut alors caractériser ρ par les relations :

$$(3) \quad \begin{cases} k \geq \rho + 1 \text{ entraîne } v(k) \geq k - \rho \\ \text{il existe } k \geq \rho \text{ tel que } v(k) < k - \rho + 1 \end{cases}$$

Existence d'une section $s \mid (D)^{N - \rho}$

Soit $T^n = D^{N-h+n} \cap K^h \subset X^k$ avec $n - h \geq \rho$ donc $0 \leq n \leq h - \rho \leq k - \rho$;

or $k \geq \rho$ entraîne $F_k \neq \emptyset$. On peut donc définir s au dessus des

$T^\circ \in D^{N-h+n} \subset (D)^{N-\rho}$. Supposons, pour $n \geq 1$, $s \mid \bar{T}$ déterminée; on a :

$\bar{T}^n \subset L \subset \bar{K}^h$, soit $(\mathcal{L}, g)$ une carte sur $\bar{L}$ $g^{-1}. s$ définit une section au dessus de $\bar{T}^n$ dans $\mathcal{L}$ et à fortiori dans $L \times F_k$; $n \geq 1$ entraîne $k \geq \rho + 1$ donc $v(k) \geq k - \rho \geq n$ donc $g^{-1}. s$ est prolongeable en une section de $L \times F_k$ au dessus de l'intérieur T^n de $\bar{T}^n$, mais $T^n \times F_k \subset K^h \times F_k \subset \mathcal{L}$ donc la section prolongée a , par g , une image qui définit $s \mid \bar{T}^n$. D'où l'existence de $s \mid (D)^{N - \rho}$.

D'après (3) nous pouvons choisir $K^k \subset X^k$ avec $k \geq \rho$ et $v(k) < k - \rho + 1$; Soit $T^{k-\rho+1} = D^{N-\rho+1} \cap K^k$, la dimension d'obstruction dans $L \times F_k$ étant $v(k) + 1$ il y a des sections sur le bord de $T^{k-\rho+1}$ qui ne sont pas prolongeables à l'intérieur.

Donc :

PROPOSITION 4. La dimension d'obstruction est $N - \rho + 1$, ρ étant défini par les relations (3).

PROPOSITION 5. Deux sections $s \mid (D)^{N-\rho}$ et $s' \mid (D)^{N-\rho}$ sont toujours homotopes au-dessus de $(D)^{N-\rho-1}$ par une homotopie $\psi \mid (D)^{N-\rho-1}$. La démonstration se conduit comme précédemment après avoir introduit les produits $L \times (0,1)$, $\mathcal{L} \times (0,1)$ etc...

EXEMPLES. Si $\mathcal{E}$ est à fibres vectorielles $\rho = 0$ et $N - \rho + 1 = N + 1$, il n'y a évidemment pas d'obstruction.

S'il est de type tangentiel, pour l'espace ${}^1\mathcal{E}$ associé, F_k est isomorphe à $\mathbb{R}^{k*}$ ou $\mathbb{C}^{k*}$ donc $\rho = 1$ et la dimension d'obstruction est N . Pour l'espace ${}^r\mathcal{E}$ sur le corps $\mathbb{R}$ (resp $\mathbb{C}$), $\rho = r$ (resp $\rho = 2r - 1$) et la dimension d'obstruction est $N - r + 1$ (resp $N - 2r + 2$).

Si la partition (X_i) se réduit à la seule partie $X_1 = X$ on retrouve des résultats connus.

Homologie et cohomologie sur X .

Nous considérerons l'homologie simpliciale à coefficients entiers dont les chaînes de base sont les cellules D^m orientées et la cohomologie correspondante à valeurs entières.

REMARQUE. En fait la valeur d'une cochaîne sur $D^m(D^m \cap K^{N-m} = T^0 \in X^k)$ sera souvent définie par un élément du groupe d'homologie $H_{v(k)}(\mathcal{E}(T^0), Z)$, $\mathcal{E}(T^0)$ étant isomorphe à F_k . Tous ces groupes ne forment un faisceau de coefficients que moyennant certaines hypothèses sur les monomorphismes des F_k . Pratiquement, nous nous restreindrons aux cas suivants où il n'y a pas de nouvelles hypothèses à faire :

${}^r\mathcal{E}$ est un espace associé à un espace $\mathcal{E}$ à fibres vectorielles complexes, ou, si $r = 1$, à fibres vectorielles réelles orientées. Dans ces cas, chaque $H_{v(k)}(\mathcal{E}(T^0), Z)$ est bien canoniquement isomorphe à Z (Dans le cas réel, pour $r > 1$ il faudrait prendre la cohomologie à valeurs dans Z_2 ; nous laisserons donc ce cas de côté).

Homologie et cohomologie dans une partie X_i^k . Les chaînes de base pour la dimension $k-h$ seront les $D^{N-\rho} \cap X_i^k$ (de sens bien déterminé puisque X_i^k est supposé orienté).

Les coefficients seront pris dans Z ainsi que les valeurs des cochaînes correspondantes. Nous désignerons par :

$C_*(X)$, $C_*(X_i)$, $C^*(X)$, $C^*(X_i)$ les espaces des chaînes et cochaînes ainsi définis, et par $H^*(X)$ et $H^*(X_i)$ les algèbres de cohomologie.

Homomorphismes λ_{i*} , μ_{i*} , λ_i^* , μ_i^* .

$\lambda_{i*} : C_*(X_i) \rightarrow C_*(X)$ est l'homomorphisme injectif défini par $\lambda_{i*}(D^{N-h} \cap X_i) = D^{N-h}$.

$\mu_{i*} : C_*(X) \rightarrow C_*(X_i)$ est l'homomorphisme surjectif défini par :

$$\mu_{i*}(D^{N-h}) \begin{cases} = D^{N-h} \cap X_i, & \text{si } D^{N-h} \cap X_i \neq \emptyset \\ = 0 & , \text{ si } D^{N-h} \cap X_i = \emptyset \end{cases}$$

$\mu_{i*} \lambda_{i*} = \text{identité}$; μ_{i*} conserve les bords.

$\lambda_i^* : C^*(X) \rightarrow C^*(X_i)$ est l'homomorphisme transposé de λ_{i*} .

$\mu_i^* : C^*(X_i) \rightarrow C^*(X)$ est l'homomorphisme transposé de μ_{i*} .

λ^* diminue les degrés de $N-k$, μ^* les augmente de $N-k$; $\lambda_i^* \mu_i^* = \text{identité}$; μ_i^* commute avec d opérateur cobord d'où l'homomorphisme : $\bar{\mu}_i^* : H^*(X_i) \rightarrow H^*(X)$.

Soit $c \in C^{N-h}(X_i)$, on a $\langle \mu_i^* c, D^{N-h} \rangle = \langle c, (D^{N-h} \cap X_i) \rangle$ ou zéro si $D^{N-h} \cap X_i$ est vide. Il y a isomorphisme entre $C^*(X_i)$ et le sous-module différentiel $C_i^*(X)$ de $C^*(X)$ formé de toutes les cochaînes s'annulant sur toute chaîne dont le support ne rencontre pas X_i ; cet isomorphisme augmente les degrés de $N-k$.

4 Espaces pseudo fibrés, images réciproques par certaines applications.

Application f .

Soient $\underline{X}$ et X deux variétés de même dimension N munies des partitions $(\underline{X}_i)$ et (X_j) . On suppose qu'il existe une application f de $\underline{X}$ sur X , continue, conservant les ouverts et possédant les propriétés suivantes :

Sa restriction à chaque $\underline{X}_i^k$ est une application sur une variété X_j^k qui est localement un homéomorphisme.

Il existe un complexe (K) qui triangule tous les $\bar{X}_i$, qui vérifie l'hypothèse de finesse, et qui est tel que la restriction de f à l'adhérence de chaque composante connexe de $f^{-1}(K^h)$ soit un homéomorphisme.

On démontre alors :

PROPOSITION 6.

1°) Que l'image réciproque de (K) définit un complexe $(\underline{K})$ qui triangule tous les $\underline{X}_i$ et vérifie l'hypothèse de finesse.

2°) Que si (D) est une triangulation cellulaire duale de (K) dans X , son image réciproque définit une triangulation cellulaire duale de $(\underline{K})$ dans $\underline{X}$ (Nous avons démontré dans

un travail antérieur que D^n coupant canoniquement tous les X_i , son image réciproque est une variété).

3°) Que le degré topologique local de f au voisinage de tout point de $\underline{X}_i$ est le même, $m(\underline{X}_i)$, et que les points où le degré topologique local est >1 forment un sous-complexe de (K) dont la dimension est $N-2$.

Notons que f est une application simpliciale de $(\underline{K})$ dans (K) mais nullement de $(\underline{D})$ dans D .

On désignera par $\bar{m}(\underline{D}^h)$ le degré topologique de la restriction de f à $\underline{D}^h$ (laquelle est une application sur un $\underline{D}^h$).

$$(4) \quad \text{Si } \underline{D}^h \cap K^{N-h} \subset \underline{X}^k \text{ on a } \bar{m}(\underline{D}^h) = m(\underline{X}^k)$$

Cette formule est un cas particulier de la suivante :

Si $\underline{D}^h \cap \underline{X}_j^q \neq \emptyset$ la restriction de f à cette partie est une application sur une partie $\underline{D}^h \cap \underline{X}^q$ dont nous désignerons le degré topologique par $\bar{m}(\underline{D}^h \cap \underline{X}_j^q)$; on vérifie que :

$$(5) \quad \bar{m}(\underline{D}^h) = \sum_j \bar{m}(\underline{D}^h \cap \underline{X}_j^q) \times m(\underline{X}_j^q)$$

pour tous les $\underline{X}_j^q \cap \underline{D}^h$ ayant même image.

Image réciproque $\underline{\xi}$ de ξ par f .

$\underline{\xi}$ est un espace pseudo fibré dont la base est X munie de la partition (X_i) et du complexe (K) . L'ensemble des points de $\underline{\xi}$ sera la partie du produit $\underline{X} \times \underline{\xi}$ formée des couples $(\underline{x}, z)$ tels que $f(x) = \varpi(z)$. La projection ϖ du point z défini par le couple $(\underline{x}, z)$ sera $\underline{x}$, d'où l'isomorphisme canonique de $\varpi^{-1}(\underline{x}) = \underline{\xi}(\underline{x})$ sur $\varpi(x) = \xi(x)$, $x = f(\underline{x})$ qui, à z défini par $(\underline{x}, z)$, fait correspondre z . Quand $\underline{x}$ décrit $\underline{X}$ on obtient une application canonique $\tilde{f}$ de $\underline{\xi}$ sur ξ .

Cartes sur $\underline{\xi}(\underline{L})$: La restriction de f à $\underline{L}$ est un homéomorphisme sur une partie L de même dimension ; en la composant avec l'identité, on obtient un homéomorphisme

$$h \text{ de } \underline{\mathcal{L}} = \bigcup_{q=p}^q (\underline{L} \cap \underline{X}^q) \times \alpha_q \text{ sur } \mathcal{L} = \bigcup_{q=p}^q (L \cap X^q) \times \alpha_q. \text{ Par ailleurs la res-}$$

triction f' de $\tilde{f}$ à $\underline{\xi}(\underline{L})$ est une bijection, elle a donc un inverse f'^{-1} .

Si une carte sur $\xi(L)$ est définie par l'application g de $\mathcal{L}$, on définira la carte correspondante sur $\underline{\xi}(\underline{L})$ par l'application $f'^{-1} \cdot g \cdot h$ de $\underline{\mathcal{L}}$ sur $\underline{\xi}(\underline{L})$.

On vérifie que la topologie définie sur $\underline{\xi}$ par ces cartes, est la topologie induite par celle de $\underline{X} \times \underline{\xi}$.

Image réciproque d'une section.

L'isomorphisme canonique entre $\xi(x)$ et $\underline{\xi}(\underline{x})$ pour $f(x) = \underline{x}$ permet d'associer canoniquement à une section s de ξ au-dessus de $A \subset X$, une section $\underline{s}$ de $\underline{\xi}$ au-dessus de $f^{-1}(A)$.

Image directe d'une chaîne.

Soit f_* l'homomorphisme de $C_*(\underline{X})$ dans $C_*(X)$ défini par

$$(6) \quad f_*(D_i) = \bar{m}(D_i) / (D_i)$$

$\underline{D}^m$ étant orienté, $f(D)$ est une cellule orientée D_i . Cette chaîne simpliciale $\bar{m}(D_i) = D_i$ coïncide avec la chaîne singulière définie par l'application f de D_i dans X .

On vérifie que f_* commute avec l'opérateur bord :

$$f_*(\dot{D}^v) = \sum_j f_*(D_j^{v-1}) = \sum_j \bar{m}(D_j^{v-1}) / (D_j^{v-1})$$

en groupant tous les D_j^{v-1} qui ont même image $D_h^{v-1} \subset D^v$, la somme des $\bar{m}(D_j^{v-1})$ étant le degré topologique global $\bar{m}(D^v)$ de la restriction de f à $\underline{D}^v$ on a, avec les orientations des bords :

$$f_*(\dot{D}^v) = \sum_h \bar{m}(D^v) D_h^{v-1} = \bar{m}(D^v) \dot{D}^v = \text{bord } f_*(D^v)$$

Image réciproque d'une cochaîne.

f^* est l'homomorphisme de $C^*(X)$ dans $C^*(\underline{X})$ transposé de f_* ; il conserve donc les degrés, commute avec l'opérateur cobord ($d/f^* = f^*d$) et induit un homomorphisme $\bar{f}^*$ de $H^*(X)$ dans $H^*(\underline{X})$. On a donc, si $c \in C^v(X)$:

$$(7) \quad \langle f^*(c), \underline{D}^v \rangle = m(\underline{D}^v) \langle c, f(D^v) \rangle$$

Homomorphisme f_{i*} de $C_*(\underline{X}_i)$ dans $C_*(X_i)$. Il est défini par :

$$f_{i*}(D_j \cap \underline{X}_i) = \bar{m}(D_j \cap X_i) / (D_j \cap \underline{X}_i)$$

$f(D_j \cap \underline{X}_i)$ est un $D_j \cap X_i$.

Homomorphisme f_i^* de $C^*(X_i)$ dans $C^*(\underline{X}_i)$. Il est défini pour $c \in C^*(X_i)$ par :

$$(8) \quad \langle f_i^*(c), \underline{D}_j^v \cap \underline{X}_i \rangle = \bar{m}(\underline{D}_j^v \cap \underline{X}_i) \langle c, f(D_j^v \cap X_i) \rangle$$

Appliquons la propriété 6 et les formules (5) et (8) avec $c \in C^v(X_i)$ et X_j tels que $f(\underline{D}^v \cap \underline{X}_j) = D^v \cap X_i$; il vient :

$$\begin{aligned} \langle f^* \mu_i^* c, \underline{D} \rangle &= \bar{m}(\underline{D}^v) \langle \mu_i^* c, D^v \rangle = \\ \sum_j m(\underline{X}_j) \bar{m}(\underline{D}^v \cap \underline{X}_j) \langle c, D^v \cap X_i \rangle &= \sum_j m(\underline{X}_j) \langle f_j^*(c), \underline{D}_j^v \cap \underline{X}_i \rangle \\ &= \sum_j m(\underline{X}_j) \langle \mu_j^* f_j^*(c), \underline{D}^v \rangle \end{aligned}$$

donc :

$$(9) \quad f^* \mu_i^* = \sum_j m(\underline{X}_j) \mu_j^* f_j^* \text{ pour } f(\underline{X}_j) = X_i.$$

5 Système obstruteur dans certains espaces pseudo fibrés.

Si $N - \rho + 1$ est la dimension d'obstruction, le système obstruteur s'il existe se composera pour chaque X_i^k d'une classe $c(X_i^k) \in H^{k - \rho + 1}(X_i)$. Les deux conditions suivantes devront être vérifiées :

(0₁) Pour qu'il existe une section de ξ au dessus de $(D)^{N - \rho + 1}$, il faut et il suffit que tous les $c(X_i^k)$ soient nuls.

(0₂) Si f est une des applications de $\underline{X}$ dans X étudiées dans le paragraphe précédent, si $\underline{\xi}$ est l'image réciproque de ξ par f et si ξ et $\underline{\xi}$ possèdent des systèmes obstruteurs, ceux-ci doivent être liés par les relations :

$$(10) \quad f_1^* c(X_i) = \underline{c}(\underline{X}_i) \quad \text{avec } X_i = f(\underline{X}_i)$$

Système de cocycles obstruteurs attachés à une section $s \mid D^{N - \rho}$.

Un tel système, s'il est défini, sera formé par un cocycle $c(s, X_i)$ de chaque classe $c(X_i)$. Nous noterons :

$$\hat{c}(s, X_i) = \mu_i^* c(s, X_i) \in C^{N - \rho + 1}(X)$$

CAS PARTICULIER. soit un espace ${}^r \xi$ de type tangentiel, X étant différentiable et, dans le cas complexe, presque complexe. Il est plongé dans l'espace ${}^r E$ de tous les r - systèmes tangents à X , une section $s \mid D^{N - \rho}$ définit classiquement un cocycle obstruteur $c(s, X)$; la condition (0₃) suivante devra être vérifiée :

Condition (0₃) :

$$(11) \quad c(s, X) = \sum_i \hat{c}(s, X_i)$$

Définition du système obstruteur pour un espace ${}^r \xi$ de type tangentiel complexe lorsque tous les $\bar{X}_i$ sont des sous-variétés presque complexes.

On peut écrire $\bar{X}_i^k = \bigcup_j X_j^q$ pour $X_j^q \subset \bar{X}_i^k$; réciproquement à chaque X_j^k on peut faire correspondre un système d'entiers positifs ou négatifs θ_{ij} et θ_{ij}' tels que :

$$(12) \quad X_i^k = \sum_j \theta_{ij} \bar{X}_j^q + \sum_{j'} \theta_{ij'} \bar{X}_{j'}^{q'}, \text{ avec } 0 \leq q' < \rho - 1 \leq q \leq k$$

On a $\theta_{ii} = 1$. Remarquons que si $X_j^q \subset \bar{X}_i^k$ toute cochaîne de X qui s'annule sur les chaînes ne rencontrant pas X_j^q s'annule à fortiori sur celles qui ne rencontrent pas X_i^k donc $v_{ij}^* = \mu_i^{*-1} \mu_j^*$ a un sens et est un homomorphisme de $C^*(X_j^q)$ dans $C^*(X_i^k)$ augmentant les degrés de $k - q$ et conservant les bords ; il définit donc un homomorphisme $\bar{v}_{ij}^*$ de $H^*(X_j^q)$ dans $H^*(X_i^k)$.

Définition des classes $c(X_i^k)$ Soit $c(\bar{X}_j^q)$ la classe de Chern de $\bar{X}_j^q$ pour la dimension $q - \rho + 1$, on pose :

$$(13) \quad c(X_i^k) = \sum_j \theta_{ij} v_{ij}^* c(\bar{X}_j^q) \in H^{k-\rho+1}(X_i^k)$$

Définition des cocycles $c(s, X_i^k)$ attachés à une section $s \mid (D)^{N-\rho}$. Cette section, par sa restriction à $(D) \cap \bar{X}_j^q$ (qui est une triangulation cellulaire de $\bar{X}_j^q$) définit une section de l'espace de tous les r -repères tangents à $\bar{X}_j^q$ au dessus du $(k-\rho)$ -squelette donc aussi un cocycle obstruteur de la classe $c(\bar{X}_j^q)$. Posons :

$$(14) \quad \begin{aligned} c(\bar{X}_j^q) &= \mu_j^* c(s, \bar{X}_j^q) \in C^{N-\rho+1}(X) \text{ et :} \\ c(s, X_i^k) &= \sum_j \theta_{ij} \hat{c}(s, \bar{X}_j^q) = \mu_i^{*-1} c(s, \bar{X}_i^k) \end{aligned}$$

la dernière égalité, justifiée par le fait que μ_i^* est injectif et que $\hat{c}(s, X_i^k)$ est dans son image, définit le cocycle obstruteur $c(s, X_i^k)$; sa classe est $c(X_i^k)$ définie par (13).

Définition des cochaines différence attachées à $s \mid (D)^{N-\rho}$, $s' \mid (D)^{N-\rho}$ et à l'homotopie $\psi \mid (D)^{N-\rho-1}$. Les restrictions de s , s' et ψ à $\bar{X}_j^q$ définissent la cochaîne différence $\delta(s, s', \psi ; \bar{X}_j^q)$ dont le cobord est $c(s', \bar{X}_j^q) - c(s, \bar{X}_j^q)$ (cf. [1]). On pourra écrire :

$$(15) \quad \hat{\delta}(s, s', \psi ; X_i^k) = \sum_j \theta_{ij} \mu_j^* \delta(s, s', \psi ; \bar{X}_j^q) = \mu_i^{*-1} \delta(s, s', \psi ; X_i^k).$$

Chaque cochaîne différence $\delta(s, s', \psi ; X_i^k) \in C^{k-\rho}(X_i^k)$ est ainsi définie de manière unique, et l'on a :

$$(16) \quad d\delta(s, s', \psi ; X_i) = c(s', X_i) - c(s, X_i)$$

Vérification de la condition (0_1) . S'il existe une section $s \mid (D)^{N-\rho+1}$, elle définit sur chaque $\bar{X}_j^q$ une section de l'espace fibré de tous les r -repères tangents à $\bar{X}_j^q$ au dessus du squelette de dimension $q - \rho + 1 = q - 2r + 2$; donc, d'après la théorie de l'obstruction :

$$c(\bar{X}_j^q) = 0, \quad v_{ij}^* c(\bar{X}_j^q) = 0 \quad \text{et} \quad c(X_i^k) = 0$$

Réciproquement supposons nuls tous les $c(X_i^k)$; il résulte de la formule (13) appliquée pour des dimensions croissantes de k , que tous les $c(\bar{X}_i^k)$ sont nuls ; en effet supposons $c(\bar{X}_i^{k'}) = 0$ démontré pour $k' < k$, $k \geq \rho - 1$ (c'est toujours vrai pour $k = \rho - 1$) ; la formule (13) donne :

$$0 = c(X_i^k) = \theta_{ii} v_{ii}^* c(\bar{X}_i^k) + 0 = c(\bar{X}_i^k)$$

Définissons alors une section au dessus des $(D)^{N-\rho+1} \cap X_i^k$ en opérant par dimensions k croissantes : pour $k < \rho - 1$ la trace de $(D)^{N-\rho+1}$ est vide ; pour $k = \rho - 1$ elle est formée de points en nombre $c(\bar{X}_i^{\rho-1}) = 0$. Supposons donc que $\dot{X}_i^k \cap (D)^{N-\rho+1} = \emptyset$ ou sinon, que s y est déjà déterminée ; c'est alors une section de l'espace fibré de tous les r -repères tangents à $\bar{X}_i^k$ au dessus d'un complexe de dimension $\leq k - \rho - 1$; comme la classe de Chern $c(\bar{X}_i^k)$ de degré $k - \rho + 1$ est nulle, cette section est prolongeable au dessus du $(k - \rho + 1)$ -squelette $X^k \cap (D)^{N-\rho+1}$ et le prolongement étant fait au-dessus de X_i^k reste bien dans $\hat{C}(X_i^k)$. D'où la proposition.

Remarquons que le système des classes de Chern $c(\bar{X}_i^k)$ vérifie aussi (0_1) ; mais il ne vérifie ni (0_2) ni $(0'_3)$.

Vérification de la condition $(0'_3)$. La formule (12) donne :

$$\begin{aligned} \bar{X}^N = X &= \sum_i X_i = \sum_i \sum_j \theta_{ij} \bar{X}_j + \sum_i \sum_{j'} \theta_{ij'} \bar{X}_{j'} \\ &= \sum_j \left[\bar{X}_j \sum_i \theta_{ij} \right] + \sum_{j'} \left[\bar{X}_{j'} \sum_i \theta_{ij'} \right] \end{aligned}$$

Le coefficient de $\bar{X}^N$ est 1 ; celui de chaque autre $\bar{X}_j$ ou $\bar{X}_{j'}$ est zéro ; en effet raisonnons par récurrence pour des dimensions k décroissantes, supposons l'assertion vraie pour k' tel que $k < k' < N$ et considérons un point intérieur à $X_j^{k'}$; seuls interviennent alors le coefficient 1 de $\bar{X}^N$ et $\sum_i \theta_{ij}$ lequel est donc nul. D'après (14) on a donc :

$$\sum_i \hat{c}(s, x_i) = \sum_i \sum_j \theta_{ij} \hat{c}(s, \bar{X}_j) = \sum_j \hat{c}(s, \bar{X}_j) \sum_i \theta_{ij} = \hat{c}(s, \bar{X}^N) = c(s, X).$$

Condition (0_2) . Soit f une des applications définies au § 4 et telle que les $\bar{X}_i$ et les $\underline{X}_i$ soient presque complexes et que si ${}^r\hat{\mathcal{C}}$ et ${}^r\underline{\mathcal{C}}'$ sont les espaces pseudo-fibrés des r -repères tangents, ${}^r\underline{\mathcal{C}}'$ soit l'image réciproque de ${}^r\hat{\mathcal{C}}$ par f . Alors les $c(X_i)$ et $c(\underline{X}_i)$ étant définis par la formule (13), il faudra vérifier la formule (10). Nous ne donnerons pas cette vérification qui résulte d'une définition directe des $\langle \hat{c}(s, X_i) \cdot D^{N-\rho+1} \rangle$ par les classes d'homologie de certains cycles.

UNE FORMULE. Si $\underline{s}$ est l'image réciproque de s et $\underline{X}_i$ l'image directe de $\underline{X}_i$, on obtient aussi : $f_1^* c(s, X_i) = c(\underline{s}, \underline{X}_i)$. Désignons par $\underline{X}_j$ les images réciproques de X_j , on a, en vertu des formules (9) et (10) :

$$(17) \quad \hat{c}(s, X_i) = \sum_j m(\underline{X}_j) \hat{c}(\underline{s}, \underline{X}_j) \text{ pour } f(\underline{X}_j) = X_i$$

En sommant alors pour tous les X_i on obtient, compte tenu de $(0'_3)$:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^* c(s, X) = \sum_{\ell} m(\underline{X}_{\ell}) \hat{c}(\underline{s}, \underline{X}_{\ell}) \quad \text{pour } \underline{X}_{\ell} \subset X \\ \text{ou} \\ f^* c(s, X) - c(\underline{s}, \underline{X}) = \sum_{\ell} [m(\underline{X}_{\ell}) - 1] \hat{c}(\underline{s}, \underline{X}_{\ell}) \end{array} \right.$$

C'est de cette formule, démontrée dans un cas particulier que nous avons déduit les classes de Chern d'une quadrique complexe.

Détermination du système obstruteur pour un espace ${}^1\mathcal{E}$ de type tangentiel réel lorsque tous les X_i sont orientés.

Nous avons vu que l'on peut encore prendre la cohomologie à valeurs entières. Soit $c(\tilde{X}_i^k)$ la classe de degré k qui, sur le cycle fondamental défini par X_i^k orienté est égale à la caractéristique d'Euler Poincaré du complexe $\tilde{X}_i^k$ (que l'on peut supposer connexe). La formule (12) est valable et l'on définira $c(X_i^k)$ par la formule (13). Les conditions (0_1) et (0_3) se vérifient comme précédemment et la condition (0_2) résulte d'un théorème déjà démontré (cf [2]), ou peut se vérifier par un décompte de simplexes.

REMARQUE. Mentionnons brièvement trois méthodes qui permettent de définir des systèmes obstruteurs pour des espaces ${}^r\mathcal{E}$ de type tangentiel complexe dans des cas moins restrictifs que le précédent.

1° Lorsqu'il existe une application f de $\tilde{X}$ dans X par laquelle les espaces ${}^r\mathcal{E}$ des r -repères tangents se correspondent, si l'on connaît les $c(X_i)$ on peut dans certains cas démontrer que les $f^* c(X_i)$ vérifient la condition (0_1) et définir les $c(\underline{X}_i)$ par la formule (10).

2° Définition directe des cochaines différences et des cocycles obstruteurs : les $\langle \delta(s, s', \psi; X_i), D^{N-\rho} \rangle$ et les $\langle \hat{c}(s, X_i), D^{N-\rho+1} \rangle$ sont définis directement par les classes d'homologie de certains cycles.

3° Détermination de sections s' particulières telles que, si $D^{N-\rho+1} \cap K^{\rho-1} \in X_j^P$ on ait nécessairement :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \hat{c}(s', X_i^k), D^{N-\rho+1} \rangle = 0 \quad \text{si } X_i^k \neq X_j^P \\ \langle \hat{c}(s', X_j^P), D^{N-\rho+1} \rangle = \langle c(s', X), D^{N-\rho+1} \rangle \end{array} \right.$$

Cette méthode généralise une méthode déjà employée dans [2] pour la structure réelle lorsque $r = 1$.

Bibliographie

- [1] N. Steenrod, The topology of fibre bundles. Princeton University Press (1951).
- [2] M.H. Schwartz, Formules apparentées à la formule de Gauss-Bonnet. Acta Mathematica t. 91 (1954).
- [3] M.H. Schwartz, Classes de Chern des quadriques complexes. Bull. Sci. Math. (Sept. Oct. 1956).

Les questions abordées dans cet exposé seront développées dans un article à paraître [Bull. Soc. Math. 1960]