

SÉMINAIRE SUR LES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES ÉCOLE POLYTECHNIQUE

D. V. CHOODNOVSKY

G. V. CHOODNOVSKY

**Sur les systèmes à plusieurs particules avec potentiel en $1/r^2$,
l'équation de Riccati et les systèmes complètement intégrables
reliés à l'équation de Schrödinger**

Séminaire sur les équations non linéaires (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 11, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SENL_1977-1978___A12_0

© Séminaire sur les équations non linéaires (Choodnovsky)
(École Polytechnique), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire sur les équations non linéaires implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E S U R
LES EQUATIONS NON-LINEAIRES

- I -

SUR LES SYSTEMES A PLUSIEURS PARTICULES AVEC
POTENTIEL EN $1/r^2$, L'EQUATION DE RICCATI ET
LES SYSTEMES COMPLETEMENT INTEGRABLES
RELIES A L'EQUATION DE SCHRODINGER

D.V. CHOODNOVSKY

Dept. of Mathematics, Columbia University
New York (New York) 10027

and

G.V. CHOODNOVSKY

I. H. E. S., 35, route de Chartres
91440 Bures sur Yvette

This work was partially supported by NSF and ONR.

Avril 1978

Nous établissons, dans cet article, un lien entre le problème de plusieurs particules alignées en présence d'un potentiel en $\frac{1}{r^2}$ et les fonctions propres méromorphiques $\varphi(x,t)$ de l'équation de Schrödinger dépendante du temps en considérant les pôles comme des particules. A l'aide d'une équation de Riccati, nous obtenons une transformation de Bäcklund pour le problème à plusieurs particules et des propriétés exactes sur le mouvement des pôles des solutions méromorphes générales des équations de Korteweg-de-Vries d'ordre plus élevé.

§ 1. La forme de l'hamiltonien H d'un système de particules alignées $a_i : i \in I$ interagissant via un potentiel Gx^{-2} est la suivante :

$$(1) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{i \in I} b_i^2 + G \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^{-2}$$

Le système hamiltonien de la forme :

$$(2) \quad a_{itt} = 2G \sum_{j \neq i} (a_i - a_j)^{-3} : i \in I$$

est alors équivalent à la représentation de Lax :

$$(3) \quad \frac{dL}{dt} = [A, L]$$

avec des matrices $L = (L_{ij})_{i,j \in I}$; $A = (A_{ij})_{i,j \in I}$

La représentation de Lax (3) pour le système (2) a été trouvée dans référence [1] et L et A ont la forme :

$$(4) \quad L_{ij} = \delta_{ij} b_i + (1 - \delta_{ij}) \sqrt{-G} (a_i - a_j)^{-1} ;$$

$$(5) \quad A_{ij} = \delta_{ij} (-\sqrt{-G} \sum_{k \neq i} (a_i - a_k)^{-2}) + (1 - \delta_{ij}) \sqrt{-G} (a_i - a_j)^{-2}$$

pour tout $i, j \in I$. L'existence de la représentation de Lax (3) implique que l'hamiltonien H admet les intégrales premières $J_n = \frac{1}{n} \text{tr}(L^n) : n = 1, 2, \dots$ [1], [2]. Ces intégrales premières ont la forme simple suivante :

$$(6) \quad J_n = \frac{1}{n} \sum_{i \in I} b_i^n + G \sum_{i \neq j} (b_i^{n-2} + b_i^{n-3} b_j + \dots + b_j^{n-2}) \times (a_i - a_j)^{-2} + \dots$$

Ils sont tous en involution et en conséquence, le système (1) est complètement intégrable pour I fini [1], [3].

De plus, les trajectoires de H (et J_n pour tout $n \geq 1$) sont des fonctions algébriques de x et t pour tout I fini [1], [7]. Des formules simples pour les solutions sont données en [1], [3], [8].

§ 2. Le lien entre le problème à plusieurs particules avec potentiel en $\frac{1}{r^2}$ et les systèmes complètement intégrables est basé sur la remarque que les potentiels $u(x,t) = -2 \sum_{i \in I} (x - a_i)^{-2}$ avec $a_i = a_i(t) : i \in I$ gouvernés par (3), jouent un rôle important dans les problèmes de fonctions propres pour l'équation de Schrödinger non stationnaire [5]. Il a été prouvé, dans des cas particuliers ([2], [4], [6]) et de façon complètement générale ([5]), que seuls ces potentiels peuvent avoir des fonctions propres $\psi(x,t,k)$ méromorphes en x .

Plus précisément, considérons l'équation de Schrödinger non stationnaire :

$$(7) \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t) \right) \psi = \frac{d\psi}{dt}$$

pour des fonctions méromorphes $\psi(x,t,k)$ en tant que fonction de x , ayant pour $k \rightarrow \infty$ l'expansion asymptotique suivante :

$$(8) \quad \psi(x,t,k) = e^{kx+k^2 t} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x,t) k^{-n}$$

Supposons que $\psi(x,t,k)$ est méromorphe pour tout t, k et avec des pôles du premier ordre seulement (ce n'est pas une condition restrictive ; si $\psi(x,t,k)$ a des pôles, ils sont du premier ordre). Alors le potentiel $u(x,t)$ est aussi méromorphe :

$$(9) \quad u(x,t) = -2 \sum_{i \in I} (x-a_i)^{-2}$$

Il existe un $a_i = a_i(t) : i \in I$, tel qu'avec une norme convenable pour ψ nous pouvons écrire :

$$\psi_0 = 1,$$

$$(10) \quad \psi_n = \sum_{i \in I} \omega_i^{[n]} (x-a_i)^{-1} : i \in I, n = 1, 2, \dots$$

Alors, nous trouvons que $(\omega_i^{[n]} : i \in I) = \vec{\omega}^{[n]} : n = 1, 2, \dots$

satisfont le schéma de récurrence suivant ([5]) :

$$\vec{\omega}^{[n+1]} = -\frac{1}{L} L \vec{\omega}^{[n]} ;$$

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \vec{\omega}^{[n]} = A \vec{\omega}^{[n]} : n \geq 1$$

pour les matrices L, A de (4), (5) pour $G = -4$. La condition de consistance de (11) est simplement (3). Donc l'existence de $\psi(x,t,k)$ méromorphe (8) satisfaisant (7) pour $u(x,t)$ (conséquence de (9)) est équivalente à (2) pour $G = -4$:

$$(12) \quad a_{itt} = -8 \sum_{j \neq i} (a_i - a_j)^{-3} : i \in I$$

Pour I fini, $\psi(x,t,k)$ est une fonction rationnelle en x, t, k (de la même façon $u(x,t)$ est rationnel en x, t [1], [7] et peut être mise sous la forme :

$$(13) \quad \psi(x,t,k) = e^{kx+k^2t} (1 + \sum_{i=1}^N \lambda_i(t,k) (x-a_i)^{-1})$$

pour $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ rationnels en k

Remarque : si tous les $\psi_n(x,t)$ sont des zéros, excepté pour un nombre fini d'entre eux, alors $\psi(x,t,k)$ peut être exprimé à l'aide des Wronskiens de solutions entières $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ d'équations aux dérivées partielles linéaires [6] :

$$(14) \quad \varphi_{it} = \varphi_{ixx} + \lambda_i^2 \varphi_i : i = 1, \dots, m \quad \text{and}$$

$$\psi(x, t, k) = \frac{W(\varphi_1, \dots, \varphi_m e^{kx + k^2 t})}{W(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}$$

Pour $m = 1$ nous arrivons à l'équation de Burgers - Hopf

$$w_t = 2ww_x + w_{xx}$$

avec

$$u = 2w_x \quad [2], [6]$$

Cependant, il existe des systèmes (2) avec la forme (13) qui ne peuvent pas être réduits à la forme (14)

§ 3. Considérons l'équation de Riccati associée à l'équation à la fonction propre (7)

$$(15) \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} + u - \frac{d}{dt} \right) \varphi = 0$$

Pour $\varphi(x, t)$ arbitraire

$$(16) \quad \chi = \frac{d}{dx} \log \varphi$$

Nous obtenons

$$(17) \quad \frac{d}{dx} (\chi^2 + \chi_x + u) = \frac{d}{dt} \chi$$

Pour une fonction méromorphe $\varphi(x, t)$ avec des pôles d'ordre au plus un et pour $u(x, t)$ de la forme (9), nous trouvons que $\chi(x, t)$ est aussi une fonction méromorphe de la forme :

$$(18) \quad \chi(x, t) = \gamma + \sum_{i \in J} c_i (x - \alpha_i)^{-1},$$

ou

$$(19) \quad c_i = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} 1 \text{ pour } i \in I \text{ et } c_i = +1 \text{ si } \alpha_i \text{ différent du } a_j$$

(en fait de (9), (17) nous trouvons seulement $c_i = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} 1$ ou $c_i = 2$ mais si les postes de $\varphi(x,t)$ sont du premier ordre, alors $c_i = 2$ est impossible).

De plus, dans (18),

$$(20) \quad I \subset J \text{ et } \alpha_i = a_i \text{ pour } i \in I \subset J \text{ et } c_i = -1 \text{ pour } i \in I$$

Le système d'équation pour $\gamma, c_i, \alpha_i : i \in J$ équivalent à (17) pour (9), (18) donnés à la forme :

$$(21) \quad \alpha_{it} = \sum_{j \in J, j \neq i} 2c_j (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} + 2\gamma : i \in J$$

Le système (21) avec c_j fixé a été considéré en détail dans [2].

En utilisant des équations fonctionnelles de [2]; nous obtenons immédiatement :

Lemme 2 Pour $c_i = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} 1 : i \in J$, il découle du système (21) les systèmes d'équations :

$$(22) \quad \alpha_{itt} = -8 \sum_{j \in J, c_j = c_i, j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)^{-1} : i \in I$$

En fait, nous obtenons deux systèmes d'équations de (22) : l'un est simplement équivalent à (12) (pour $c_i = +1$). Posons :

$$I_{\pm} = \{i \in J : c_i = \pm 1\}$$

Alors nous trouvons que $J = I_{+} \cup I_{-}$ et $\{\alpha_i : i \in I_{+}\} = \{a_i : i \in I\}$,

$\{\alpha_i : i \in I_{-}\}$ satisfait chaque système (12) séparément pour l'hamiltonien

H mais avec peut être un nombre différent de particules. En d'autres mots, la condition de méromorphisme de φ définit une transformation de Bäcklund entre deux problèmes à plusieurs particules avec l'hamiltonien H :

$$\{ \alpha_i : i \in I^+ \} \xrightarrow{\quad} \{ \alpha_i : i \in I^- \}$$

Par suite du § 2, nous pouvons prendre $\varphi(x,t) = \psi(x,t,k)$

En particulier,

Corollaire 3. Tout système (12) peut être plongé dans (21) avec $c_j = \pm 1$ pour $j \in J$, $I \subset J$ et $c_i = -1$ si et seulement si $\alpha_i = a_i$ ou $i \in I$

Pour $\chi(x,t,k) = (\log \psi)_x$,

$$(23) \quad \chi = k + \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x,t) k^{-n}$$

et pour $I = N$ fini, nous avons à cause de (13)

$$(24) \quad \chi(x,t,k) = k - \sum_{i=1}^N (x - a_i)^{-1} + \sum_{i=1}^N (x - d_i)^{-1}$$

avec $d_i = d_i(t,k) : i = 1, \dots, N$ et $(d_1, \dots, d_N)$ étant le système de particules satisfaisant aussi (12) (trajectoire du hamiltonien H pour $G = -4$) pour tout k . De par (8), (10), (11), (13) $d_i = 1, \dots, N$ sont définis comme des zéros en x du polynôme $P_N(x,k)$ avec des coefficients dépendant seulement de $a_i, a_{it} : i = 1, \dots, N$. (24) nous donne une représentation très naturelle pour la transformation de Bäcklund de (12). Cette transformation de Bäcklund est naturellement reliée à l'équation de Riccati (17) : si (17) est satisfaite, alors pour :

$$(25) \quad u_1 = u + 2 \chi_x = u + 2 \frac{d^2}{dx^2} \log \varphi$$

$$\chi_1 = -\chi \text{ ou } \varphi_1 = \varphi^{-1}$$

nous obtenons

$$\frac{d}{dx} (\chi_1^2 + \chi_{1x} + u_1) = - \frac{d}{dt} \chi_1$$

Si le potentiel u a des fonctions propres méromorphes, alors le potentiel u_1 a aussi des fonctions propres méromorphes. Si ψ est une fonc-

tion propre arbitraire pour l'équation de Schrödinger dépendante du temps avec le potentiel u , alors la fonction propre générale pour le potentiel u a la forme

$$\psi_1 = \varphi \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{\psi}{\varphi} \right)$$

En partant de fonctions arbitraires de $u(x,t)$ de la forme (9)

$$(i.e. \text{ avec } \int_{-\infty}^{\infty} a(k) \psi(x,t,k) dk \text{ ou } \frac{\partial^i}{\partial k^i} \psi(x,t,k))$$

nous pouvons construire des transformations de Bäcklund entre n et m particules pour tout nombre fini n et m (dans le cas stationnaire, voir [8])

§ 4. En utilisant (7) - (11), il s'ensuit pour un potentiel u de la forme (9) et pour χ de la forme (23) :

$$\frac{2}{\chi(k) + \chi(-k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\chi^{2n+1}}$$

Ici, nous trouvons pour J_m (6)

$$(26) \quad R_n = \sum_{i \in I} \frac{\partial J_{2n+1}}{\partial b_i} (x - a_i)^{-2} : n = 1, 2, \dots$$

Maintenant, si u est indépendant du temps et $u = u(x,y)$, alors la $n^{\text{ième}}$ équation de Korteweg-de-Vries (KdV) a la forme [7] :

$$(27) \quad U_y = \frac{\partial}{\partial x} R_n$$

De (12), (25), (26), il découle immédiatement une réponse affirmative à la question [7] : les pôles des solutions méromorphes de la $n^{\text{ième}}$ équation de KdV évoluent selon l'hamiltonien J_{2n+1} avec la restriction $\text{grad } H = 0$

Références

1. J. Moser, Adv. Math. 16(1975), 197
 2. D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, Nuovo Cimento, V. 40 B, N° 2 (1977), 339 - 353
 3. F. Calogero, Lett. Nuovo Cimento 13 (1975), 411
 4. D.V. Chudnovsky, J. Math Physics, parts I and II (to be published)
 5. D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, Meromorphic eigenvalue problem, pole interpretation and many-particle problem for non-linear equations, (to be published)
 6. D.V. Chudnovsky, Proc. Natl. Acad. Sci. (in print)
 7. H. Airlaut, H.P. Mc Kean, J. Moser, Comm. Pure and Appl. Math. V. XXX (1977), 95 - 148
 8. M. Adler, J. Moser, On a class of polynomials connected with the Korteweg-de-Vries equation (to be published).
-