Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2001-2002

Serge Alinhac

Un exemple d'explosion à l'infini pour une équation d'ondes quasi-linéaire

Séminaire É. D. P. (2001-2002), Exposé n° XVI, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A16_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Un exemple d'explosion à l'infini pour une équation d'ondes quasi-linéaire

S. Alinhac

Introduction

Nous considérons ici l'équation dans $\mathbf{R}^3_x \times \mathbf{R}_t$

$$\partial_t^2 u - c^2(u)\Delta_x u = 0, c(u) = 1 + u, \tag{$(1.1)_a$}$$

avec des données de Cauchy C_0^∞, de taille ϵ. Le but de cet exposé est de présenter les idées de la preuve de l'existence globale d'une solution C^∞ pour ϵ assez petit.

1. Notations et résultat principal

Les coordonnées sont notées ici

$$x = (x_1, x_2, x_3), t = x_0, \partial u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \partial_3 u, \partial_t u),$$

et l'on utilisera aussi les coordonnées polaires

$$r = |x|, x = r\omega, r\partial_r = x\partial_x.$$

Les champs de rotation sont définis par

$$R = x \wedge \partial,$$

et Z_0 désigne l'un quelconque des champs de Klainerman

$$\partial_i, R_j, S = t\partial_t + x\partial_x, h_i = x_i\partial_t + t\partial_i.$$

Le Laplacien s'écrit

$$\Delta_x = \partial_r^2 + (2/r)\partial_r + (1/r^2)\Delta_\omega,$$

avec

$$\Delta_\omega = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2.$$

Pour écrire $(1.1)_a$, on introduit les opérateurs

$$P \equiv c^{-1}\partial_t^2 - c\Delta, P_1 \equiv c^{-1}\partial_t^2 - c(\partial_r^2 + (1/r^2)\Delta_\omega),$$

en sorte que, avec $u = (\epsilon/r)U$,

$$Pu = 0, P_1 U = 0.$$

La géométrie radiale est décrite par les champs

$$L \equiv c^{-1/2}\partial_t + c^{1/2}\partial_r, L_1 \equiv c^{-1/2}\partial_t - c^{1/2}\partial_r.$$

et

$$P_1 = LL_1 - cr^{-2}\Delta_\omega + (Lu/2c)L.$$

Les données de Cauchy pour $(1.1)_a$ sont

$$(1.1)_b \qquad u(x,0) = \epsilon u_1^0(x) + \epsilon^2 u_2^0(x) + \ldots, (\partial_t u)(x,0) = \epsilon u_1^1(x) + \epsilon^2 u_2^1(x) + \ldots,$$

où les u_i^j sont des fonctions réelles C^∞, supportées dans $|x| \leq M$. Finalement, nous posons

$$\sigma_1 = M + 1 - r + t,$$

qui représente en gros la distance au bord du cône d'onde $r = M + t$. Notre résultat principal est le suivant.

Théorème. *Soit $s_1 \in \mathbf{N}$. Pour ϵ assez petit, le problème de Cauchy (1.1) possède une solution C^∞ globale. De plus,*

$$|Z_0^\alpha \partial u|_{L^2} \leq C\epsilon(1+t)^{C\epsilon}, |\alpha| \leq s_1,$$

$$|\partial u| \leq C\epsilon(1+t)^{-1}, |Z_0^\alpha \partial u| \leq C\epsilon(1+t)^{-1+C\epsilon}\sigma_1^{-1/2}|\alpha| \leq s_1 - 2.$$

Si les données initiales sont *radiales*, la solution u l'est aussi ; dans ce cas, Lindblad [13] a prouvé l'existence globale.

2. Explosion à l'infini ?

Nous expliquons ici le titre de l'exposé. Soit w la solution du problème linéarisé en zéro

$$(\partial_t^2 - \Delta)w = 0, w(x,0) = u_1^0(x), w_t(x,0) = u_1^1(x).$$

On sait que, pour une certaine fonction C^∞ F_0,

$$w \sim (1/r)F_0(\omega, r-t), r \to +\infty.$$

En prenant ϵw comme une première approximation de u, on observe que le terme $u\Delta u$ produit un effet de *temps lent* , pour le temps lent

$$\tau \equiv \epsilon \log(1+t).$$

Cela signifie qu'en grand temps, on attend une meilleure approximation de u de la forme

$$u \sim \epsilon/rV(r-t,\omega,\tau),$$

pour une fonction C^∞ V satisfaisant $V(r-t,\omega,0) = F_0(\omega, r-t)$. En substituant cette expression de u dans (1.1), on obtient

$$V_{\sigma\tau} + VV_{\sigma\sigma} = 0, V(\sigma,\omega,0) = F_0(\omega,\sigma), \sigma \equiv r-t. \tag{2.1}$$

Le point fondamental est que (2.1) possède une solution globale V, mais les dérivées de V ont une *croissance exponentielle à l'infini* en τ, sauf justement V_σ qui reste borné. En effet, posons

$$\sigma = \phi(s,\omega,\tau), W(s,\omega,\tau) = V(\phi,\omega,\tau).$$

En choisissant ϕ et W définis par

$$\phi_s = \exp(\tau\partial_\sigma F_0), \phi(M,\omega,\tau) = M, W = \phi_\tau,$$

on obtient la solution V de (2.1). Nous croyons (bien que nous ne fournissions pas de preuve de ce fait) que u se comporte effectivement (au moins pour $|\sigma| \leq C$) comme ϵ/rV, c'est à dire n'a pas le comportement d'une solution libre. C'est ce phénomène que nous appelons *explosion à l'infini.* La présente situation est analogue à celle observée par exemple par Delort [8] dans son étude de l'équation de Klein-Gordon .

3. Méthode de Klainerman et nature de la présente difficulté

La méthode de Klainerman [11], [10] consiste à commuter Z_0^α avec l'équation, puis à utiliser une inegalité d'énergie pour controler $|Z_0^\alpha \partial u|_{L^2}$. Finalement, l'inégalité de Klainerman

$$(1+t)\sigma_1^{1/2}|v| \leq C\Sigma_{|\alpha|\leq 2}|Z_0^\alpha v|_{L^2}$$

permet d'obtenir la décroissance de ∂u en norme L^∞.

Ici, on a par exemple

$$PR_i u = 2(R_i u)\Delta u.$$

A supposer que l'on puisse utiliser l'inégalité d'énergie standard pour P, le lemme de Gronwall conduirait à estimer $|Z_0 \partial u|_{L^2}$ avec un facteur d'amplification

$$\exp \int_0^t |R_i u|_{L^\infty}.$$

Comme on attend

$$|R_i u|_{L^\infty} \sim \epsilon(1+t)^{-1+C\epsilon},$$

ce facteur serait

$$\exp(C^{-1}(1+t)^{C\epsilon}),$$

qui est énorme et inacceptable. De même, en appliquant Z_0^α à l'équation, on obtiendrait dans l'équation pour $PZ_0^\alpha u$ un terme

$$(Z_0^\alpha u)(\Delta u).$$

Même pour $|\sigma|$ borné, on ne pourrait contrôler un tel terme, car Δu croit exponentiellement en τ à l'infini. Pour $|\sigma|$ quelconque, il faudra utiliser un lemme de type Poincaré, car l'inégalité d'énergie ne contrôle que $\partial(Z_0^\alpha u)$.

Le remède à ces difficultés est bien sûr, comme dans [7], de modifier les champs standard Z_0 en des champs mieux adaptés à la géométrie de l'opérateur, et, de ce fait, commutant mieux avec P. Néanmoins, comme nous le verrons, ceci entraine toutes sortes de difficultés. Idéalement, nous prenons comme champs modifiés Z_m les champs

$$R_i^m = R_i + a(R_i)L_1, S^m = S + a(S)L_1, H_0^m = H_0 + a(H_0)L_1, H_0 = ct\partial_r + (r/c)\partial_t, \tag{3.1}$$

où les fonctions a sont définies par

$$La(R_i) + a(R_i)(L_1u/(2c)) = -R_iu/(2c), \tag{3.2}$$

$$La(S) + a(S)(L_1u/(2c)) = -Su/(2c), a(H_0) = -a(S).$$

Ces modifications ont pour effet d'obtenir des relations de commutation de la forme

$$[R_i^m, L] = *L, [S^m, L] = *L, [H_0^m, L] = *L.$$

En fait, pour éviter la singularité en $r = 0$, on introduit dans (3.2) une troncature $\bar\chi = \bar\chi(r/(1+t))$.

4. Stratégie de la preuve et estimations L^∞

La preuve se fait par induction sur le temps [10]. D'abord, il est assez facile de montrer que, pour tout $\bar\tau > 0$ fixé, u existe au moins pour $\tau \le \bar\tau$, avec les estimations libres, pour ϵ assez petit. Dans la suite, on fixe un tel $\bar\tau$.

On suppose donc, pour t inférieur à un certain T (avec en fait $\epsilon\log(1+T) \ge \bar\tau$),

$$|Z_0^\alpha \partial u| \le C\epsilon(1+t)^{-1+\eta}\sigma_1^{-1/2}, |\alpha| \le 10, \eta = 10^{-2}. \tag{HI}$$

Remarquons que cette hypothèse aura notamment pour conséquence que "tout se passe bien" dans une zone $r \le t/2$. Notre effort se concentrera donc sur la zone "extérieure" $r \ge t/2$.

La preuve comprend alors trois grandes étapes :

Etape 1 : On déduit de l'hypothèse d'induction (HI) de meilleures estimations L^∞ pour un *petit* nombre de dérivées de u

$$|Z_0^\alpha \partial u| \leq C\epsilon(1+t)^{-1+C\epsilon}\sigma_1^{\mu-1}, |\alpha| \leq 6, \mu = 1/2 + 10^{-1}. \tag{4.1}$$

Etape 2 : A l'aide de la méthode d'énergie de Klainerman, on obtient alors (toujours pour $t \leq T$) des bornes L^2 d'un *grand* nombre de dérivées de u

$$|Z_0^\alpha \partial u|_{L^2} \leq C\epsilon(1+t)^{C\epsilon}, |\alpha| \leq 12. \tag{4.2}$$

Etape 3 : A l'aide de l'inégalité de Klainerman, on obtient finalement

$$|Z_0^\alpha \partial u| \leq C\epsilon(1+t)^{-1+C\epsilon}\sigma_1^{-1/2}, |\alpha| \leq 10.$$

Si $C\epsilon \leq \eta/2$, c'est beaucoup mieux que (HI), donc (HI) ne cesse jamais d'être vraie et u existe globalement avec les estimations du Théorème.

Pour obtenir les estimations L^∞ (4.2), on écrit tout simplement, pour disons $r \geq M + t/2$,

$$LL_1U = (c/r^2)\Delta_\omega U - (Lu/(2c))LU,$$

et l'on commute les produits Z_m^α avec l'équation. Après quoi, on intègre le long des courbes intégrales de L. En particulier, on obtient $|L_1U| \leq C$, qui conduit à $|\partial u| \leq C\epsilon/(1+t)$. Ce fait est essentiel car le facteur d'amplification dans l'inégalité d'énergie est

$$\exp \int_0^t |\partial u|_{L^\infty} \leq (1+t)^{C\epsilon}.$$

5. Régularisation

Les difficultés commencent avec le calcul de $[Z_m, P]u$, pour un champ modifié

$$Z_m = Z_0 + aL_1.$$

En effet, ce commutateur contient le terme $(Pa)L_1u$, et en particulier les termes

$$(r^{-2}\Delta_\omega a)L_1u, (LL_1a)L_1u.$$

D'après les formules (3.2) qui définissent les a, on ne peut espérer contrôler R^ka qu'à l'aide de R^kZ_mu, en sorte qu'il nous manque *deux* dérivées si l'on veut conserver la décroissance r^{-2}, ou *une* dérivée si l'on écrit

$$r^{-2}\Delta_\omega = r^{-1}\Sigma(R_i/r)R_i.$$

Dans tous les cas, on doit remplacer a par $S_\theta a$; ici, θ est un grand paramètre, et la régularisation $S_\theta v$ de v correspond en gros à la troncature de $\hat{v}(\xi)$ pour $|\xi| \leq \theta$. La philosophie ici est celle du calcul paradifférentiel de Bony [6], dans lequel les symboles des opérateurs apparaissent toujours *masqués* (par une régularisation S_θ), ou encore celle des théorèmes de Nash-Moser [5], [9]. La règle est que la géométrie de l'opérateur (ici, les a) est contrôlée par des équations *exactes* (ici, (3.2)), tandis que les champs Z_m font intervenir des expressions *régularisées* des quantités géométriques. C'est aussi le point de vue adopté par exemple dans [4], où, au lieu d'utiliser des champs $Z = \Sigma a_i \partial i$ tangents à certaines surfaces caractéristiques peu régulières, on utilise les opérateurs $\Sigma T_{a_i} \partial_i$ ($T_a v$ étant le paraproduit de Bony).

A première vue, on n'a besoin que d'une régularisation en variables ω, donnant

$$R_i S_\theta v \sim \theta S_\theta v,$$

puisque la connaissance de La devrait permettre de négliger $LL_1 a$. Malheureusement, il se passe ceci : on doit choisir $\theta = \theta(t)$, avec l'espoir que le facteur $1/r$ compensera la croissance de θ dans des termes tels que $(1/r) R_i S_\theta v$; comme L et L_1 ont des coefficients variables, il apparait dans le commutateur $[LL_1, S_\theta] a$ des dérivées du second ordre de a en ∂_r et ∂_t également. On est donc forcé d'introduire S_θ comme une régularisation en ω *et* en r, disons

$$S_\theta = S_{\theta_1}^{(r)} S_{\theta_2}^{(\omega)},$$

où les deux paramètres $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ devront être déterminés.

On définit donc des champs modifiés régularisés $\tilde{Z}_m$ par

$$\tilde{R}_i^m = R_i + \tilde{a}(R_i) L_1, \tilde{S}^m = S + \tilde{a}(S) L_1, \tilde{H}_i^m = H_i + \tilde{a}(H_i) L_1,$$

où $H_i = ct\partial_i + (x_i/c)\partial_t$ et

$$\tilde{a}(R_i) = S_\theta a(R_i), \tilde{a}(S) = S_\theta a(S), \tilde{a}(H_i) = -\omega_i \tilde{a}(S) - (\omega \wedge \tilde{a}(R))_i.$$

Le choix des paramètres θ_i résulte de plusieurs contraintes. D'une part,

$$[\partial_t, S_\theta] = \theta_1'/\theta_1 s_\theta + \theta_2'/\theta_2 s_\theta,$$

où s_θ désigne divers opérateurs analogues à S_θ. On doit imposer $\theta_i'/\theta_i = O(\epsilon(1+t)^{-1})$ pour majorer convenablement certains termes de commutation. On choisit donc

$$\theta_i(t) = \theta_i^0 (1+t)^{\beta_i \epsilon}.$$

D'autre part, pour maîtriser d'autres commutateurs, on doit prendre β_1 et $\beta_2 - \beta_1$ assez grands. Cette dissymétrie correspond à la dissymétrie de comportement entre les dérivées premières de u : $\epsilon^{-1}(1+t)\partial u$ est borné alors que $\epsilon^{-1}(1+t) R_i u$ peut croître comme $(1+t)^{C\epsilon}$.

6. Inégalité d'énergie et phase ψ

Nous écrivons

$$P\tilde{Z}_m u = -[\tilde{Z}_m, P]u, v = \tilde{Z}_m u,$$

et l'inégalité utilisée doit permettre de contrôler tous les termes du commutateur. Le calcul détaillé de ces termes est pénible, et il apparaît que les plus délicats à traiter sont

$$r^{-2}(L_1\tilde{a})(\Delta_\omega u), (L\tilde{a})(L_1^2 u), (L_1 L\tilde{a})(\partial u), (1+t)^{-1}(L\tilde{a})(\partial u). \tag{6.1}$$

Pour traiter le premier terme de (6.1), nous devons disposer d'une inégalité qui met en évidence le meilleur comportement des dérivées spéciales $(R_i/r)v$. De telles inégalités, de type Morawetz, existent, voir par exemple [10], [12]. Nous utilisons ici l'idée introduite dans [1] et explicitée quelque peu dans [3] : en procédant comme pour l'inégalité d'énergie usuelle, mais en ajoutant un poids e^b, on est amené à calculer

$$\int_D P v v_t e^b dx dt'$$

dans une bande $D = [0,t] \times \mathbf{R}^3$. Le choix $b = b(r-t)$ fait apparaître (si P est l'équation des ondes) un gain de termes

$$\int_D b' \Sigma(\partial_i v + \omega_i \partial_t v)^2.$$

Si l'on choisit b borné, le poids disparait des inégalités finales. Bien entendu, les dérivées $\partial_i + \omega_i \partial_t$ sont tangentes aux cônes $r - t = C$, et en particulier

$$R/r = \omega \wedge (\partial + \omega \partial_t).$$

Pour des raisons qui seront expliquées au paragraphe suivant, on utilise en fait, dans ce travail, un poids

$$\exp(\tau+1)b(\psi), b(s) = B(-s)^\nu, \nu > 0, B > 0,$$

où ν et B^{-1} sont choisis assez petits. Ce poids est borné par dessus et par dessous par $(1+t)^{C\epsilon}$, ce qui est licite dans nos estimations.

La fonction ψ est une *phase approchée* du problème, qui sert de substitut à $r-t$. Elle est définie par

$$L\psi = 0, \psi(0,\omega,t) = -M - 1 - t.$$

Pour l'essentiel, les champs modifiés Z_m sont tangents aux cônes $\psi = C$ au lieu des cônes standard $r - t = C$. Il apparaît cependant que ψ n'est pas partout comparable à $r-t$: cela n'est vrai que si $|r-t|$ est assez grand. Il existe une *zone aveugle* de la forme

$$0 \le M + t - r \le C_1(1+t)^{C_1\epsilon}$$

dans laquelle on ne peut affirmer que $|\psi|$ est grand si $|r-t|$ l'est.

Avec les notations

$$p=(\tau+1)b(\psi),\, |w|_0^2=\int(\exp p)w(x,t)^2dx,\, T_i=\partial_i+\omega_i\partial_t$$

l'inégalité que nous utilisons s'écrit

$$|(\partial v)(.,t)|_0^2+C\int_0^t\int_{r\geq t'/2}(\exp p)(\tau+1)b'(\psi)\Sigma(T_iv)^2dxdt'\leq$$

$$\leq C|(\partial v(.,0)|_0^2+C\int_0^t\int_{\mathbf{R}^3}(\exp p)|Pv||v_t|dxdt'+$$

$$+C\epsilon\int_0^t dt'/(1+t')|(\partial v)(.,t')|_0^2dt'.$$

7. L'inégalité de Poincaré

Comme nous l'avons expliqué en 3., nous avons besoin de contrôler, en norme d'énergie, un terme tel que $(\Delta u)v$ par $\epsilon(1+t)^{-1}\partial v$. Or, même pour $|r-t|$ borné, où v est facilement contrôlé par ∂v, on n'espère pas une telle inégalité car $|\epsilon^{-1}(1+t)\Delta u|$ croit exponentiellement en τ. C'est là que la phase ψ intervient de façon cruciale. On peut obtenir en effet le comportement approximatif

$$L_1^2U\sim\psi_r h(\psi,\omega),\, |h(s,\omega)|\leq C(1+|s|)^{-3/2+4\eta},$$

en calculant explicitement $L(\psi_r^{-1}L_1^2U)$ et en intégrant. D'autre part, comme

$$(r+ct)L=c^{1/2}(\Sigma\omega_iH_i+S),$$

on voit que L_1u est la seule mauvaise dérivée de u. Donc $(1/4)L_1^2u\sim(1/4)(\epsilon/r)L_1^2U$ est le terme principal de Δu, et il suffit de considérer $(L_1^2u)v$. On obtient, avec comme plus haut $p=(\tau+1)b(\psi)$, l'inégalité de Poincaré

$$\int_{r\geq t/2}(\exp p)(L_1^2u)^2v^2dx\leq C\epsilon^2(1+t)^{-2}\int_{r\geq t/2}(\exp p)v_r^2dx+\dots,$$

où les points indiquent un terme facilement contrôlé. L'idée est, en utilisant la strucutre spéciale de L_1^2u, de faire le changement de variable

$$s=\psi(r,\omega,t),\, w(\psi,\omega,t)=v(r,\omega,t)$$

dans l'intégrale en v. On est alors ramené à une situation standard en variable s, pour laquelle l'inégalité de Poincaré sur w est obtenue comme d'habitude en écrivant

$$w(s) = \int^{s} w'(s')ds',$$

et ainsi de suite. C'est ce calcul qui commande l'utilisation du poids p de préférence à un poids standard $(\tau + 1)b(r - t)$.

8. Fin de la preuve

Nous avons passé sous silence le gros des vérifications techniques, qui concernent le calcul des commutateurs $[\tilde{Z}_m^\alpha, P]$, $[\tilde{Z}_m^\alpha, S_\theta]$ etc. Remarquons que les coefficients des champs Z_m dépendent de u et de a (a pour $a(R_i)$, etc.). Un simple calcul comme par exemple $Z_m^\alpha c$ fait apparaître l'action de champs Z_m sur ces coefficients. D'autre part, à chaque étape du raisonnement, on dispose du contrôle disons de $Z_m^k u$, ce qui implique au mieux un contrôle de $Z_m^{k-1} a$. L'ensemble du raisonnement, qui se fait par récurrence sur k, suppose donc la mise en place d'un *calcul* approprié (au sens où l'on dit "calcul pseudo-différentiel", "calcul symbolique", etc.) qui permet tout simplement d'écrire des formules, l'écriture explicite de tous les termes étant rapidement impossible.

Par ailleurs, il existe aussi un autre type de vérification technique : à supposer qu'on ait obtenu des estimations en norme d'énergie sur $\tilde{Z}_m^\alpha \partial u$, encore faut-il revenir aux champs standard pour pouvoir utiliser l'inégalité de Klainerman. Nous n'insistons pas sur tous ces *détails*, renvoyant le lecteur curieux à [2].

Bibliographie

[1] Alinhac S., "The null condition for quasilinear wave equations in two space dimensions I", Invent. Math. 145, (2001), 597-618.
[2] Alinhac S., "An Example of Blowup at Infinity for a Quasilinear Wave Equation", Preprint, Université Paris-Sud (Orsay), (2002).
[3] Alinhac S., "A remark on energy inequalities for perturbed wave equations", Preprint, Université Paris-Sud, (2001).
[4] Alinhac S., "Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires", Ann. scient. Ec. Norm. Sup, quatrième série, tome 21, (1988), 91-132.
[5] Alinhac S. et Gérard P., "Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser", Inter Editions, Paris, (1991).
[6] Bony J-M., "Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires", Ann. scient. Ec. Norm. Sup, quatrième série, tome 14, (1981), 209-246.
[7] Christodoulou D. et Klainerman S., "The global nonlinear stability of the Minkowski space", Princeton Mathematical series 41, (1993).
[8] Delort J-M., "Existence globale et comportement asymptotique pour l'équation de Klein-Gordon quasilinéaire à données petites en dimension 1", Ann. scient. Ec. Norm. Sup., quatrième série, tome 34, (2001), 1-61.
[9] Hörmander L., "The Nash-Moser theorem and paradifferential calculus", Analysis, et cetera, Academic Press, Boston, 429-449.
[10] Hörmander L., "Lectures on Nonlinear Hyperbolic Equations", Math. et Applications 26, Springer Verlag, Heidelberg, (1997).
[11] Klainerman S., "Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation", Comm. Pure Appl. Math. 38, (1985), 321-332.
[12] Klainerman S., "A Commuting Vectorfields Approach to Strichartz type Inequalities and Applications to Quasilinear Wave Equations", Int. Math. Res. Notices 5, (2001), 221-274.
[13] Lindblad H., "Global solutions of nonlinear wave equations", Comm. Pure Appl. Math XLV, (1992), 1063-1096.

S. Alinhac, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France.
serge.alinhac@math.u-psud.fr