Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

W. Craig

Les moments microlocaux et la régularité des solutions de l’équation de Schrödinger

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. nº 20, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A20_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

LES MOMENTS MICROLOCAUX ET LA REGULARITE DES SOLUTIONS DE L'EQUATION DE SCHRÖDINGER

W. CRAIG

Exposé n° XX

9 Avril 1996

LES MOMENTS MICROLOCAUX ET LA RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

Walter Craig

§1. Introduction

Dans cet article, nous allons considérer les solutions de l'équation de Schrödinger, qui s'écrit

$$
\begin{aligned}
i\partial_t \psi &= -\tfrac{1}{2} \sum_{j,\ell=1}^{n} \partial_{x_j} a^{j\ell}(x) \partial_{x_\ell} \psi \ , \quad x \in \mathbb{R}^n \ , \ t \in \mathbb{R} \ , \\
\psi(x,0) &= \psi_0(x) \ .
\end{aligned} \tag{1}
$$

Les points d'interêt seront les moments et la régularité des données initiales $\psi_0(x)$ pour l'équation (1), et le rapport avec les moments et la régularité des solutions. Le fait de base est qu'il existe un rapport entre les propriétés des moments des données initiales et la régularité des solutions pour les temps t non nuls, qui dépend du comportement global des orbites de la limite classique de (1). Celle-ci est le système hamiltonien pour $(x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n)$;

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{ds} &= \partial_\xi a(x,\xi) \ , \\
\frac{d\xi}{ds} &= -\ \partial_x a(x,\xi) \ ,
\end{aligned} \tag{2}
$$

avec la fonction hamiltonienne provenant du symbole principal de (1);

$$
a(x,\xi) = \tfrac{1}{2} \sum_{j,\ell=1}^{n} a^{j\ell}(x) \xi_j \xi_\ell \ , \tag{3}
$$

dont la solution est le flot bicaractéristique $\varphi(s;x,\xi)$ dans l'espace cotangent $T^*(\mathbb{R}^n)$.

Je remercie l'IHES pour la chaleureuse hospitalité pendant le printemps 1996. Cet article est un prolongement du texte de deux exposés, à l'Ecole Polytechnique le 9 Avril 1996 (séminaire 'Equations aux Dérivées Partielles') et Universität Bonn le 2 Mai 1996 ('Oberseminar zur Analysis'). Une partie de cette recherche est soutenue par la bourse du NSF #DMS - 94 01514.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Ce rapport est évidemment un phénomène microlocal, et l'analyse peut être étendue aux équations en forme plus générale

$$i\partial_t \psi = -\tfrac{1}{2} \sum_{j,\ell=1}^{n} \partial_{x_j} a^{j\ell}(x) \partial_{x_\ell} \psi + m_1(x,D)\psi + v_0(x,D)\psi \ , \tag{4}$$

où il y a des termes de potentiel, et aussi éventuellement des termes de premier ordre provenant d'un champ magnétique. Les résultats principaux pour cette équation sont donnés dans les articles [4] et [5]. Dans cet article, je vais étendre l'analyse dans plusieurs directions. D'abord, je vais examiner les propriétés de l'évolution de l'équation comme des applications agissant sur les espaces de Sobolev et les espaces de Sobolev munis de poids. En plus, certains des résultats des références ci-dessus sont valables pour les problèmes non auto-adjoints, en utilisant une technique dit de 'transformation de jauge' dans l'article [9]. On répond à la question naturelle des propriétés de ces transformations agissant sur les mêmes espaces de Sobolev avec poids.

Pour expliquer le phénomène, il est mieux de commencer avec le cas de l'équation de Schrödinger libre

$$i\partial_t \psi = -\tfrac{1}{2}\Delta\psi \ , \quad x \in \mathbb{R}^n . \tag{5}$$

Le résultat ci-dessous est bien connu, et pas difficile à verifier.

Théorème 1. *Considérons les données initiales $\psi_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour l'équation (5). (i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$*

$$\|\psi(x,t)\|_{L^2} = \|\psi_0(x)\|_{L^2} \ . \tag{6}$$

(ii) Si en plus les données initiales sont localisées, ce qui veut dire que tous ses moments sont finis,

$$\forall k \ , \quad \int |x^k \psi_0(x)|^2 dx < +\infty \ , \tag{7}$$

alors pour tout $t \neq 0$, la solution $\psi(x,t)$ est C^∞.
(iii) Pour les données initiales $\psi_0 \in H^r(\mathbb{R}^n)$, l'espace de Sobolev avec norme

$$\|\psi_0(x)\|_{H^r}^2 = \int |(1-\Delta)^{r/2}\psi_0(x)|^2 dx \ ,$$

alors pour tout t, $\psi(x,t) \in H^r(\mathbb{R}^n)$, et $\|\psi(x,t)\|_{H^r} = \|\psi_0(x)\|_{H^r}$.
(iv) Quand $\psi_0(x)$ est dans $\mathcal{S}$, la classe de Schwartz, alors pour tout t, $\psi(x,t)$ est dans $\mathcal{S}$.

Le premier énoncé (i) est fondamental pour l'interprétation de la mécanique quantique, où la mesure $|\psi_0(x)|^2 dx = dP_0(x)$ décrit la distribution de probabilité spatiale initiale d'une particule quantique, $|\psi(x,t)|^2 dx = dP_t(x)$ est la distribution spatiale qu'il est permi de déduire selon les lois de la mécanique quantique a un autres temps t par résolution de l'équation de Schrödinger, et (6) exprime le fait que l'équation de Schrödinger conserve la probabilité. A partir de cette interprétation, il est naturel d'imposer la condition (7) aux moments de la distribution initiale, et le résultat (ii) du Théorème 1 est que la solution devient régulière instantanément, mais pourtant non localisée, pour tout t non nul. Il est clair que l'exigence que les moments initiaux soient finis ne garantit pas qu'ils soient finis pour d'autres valeurs de t ; ce qu'on discutera ci-dessous. Pourtant, une norme de Sobolev finie de $\psi_0(x)$ correspond directement aux moments finis de la densité de vitesse $|\widehat{\psi_0}(\xi)|^2 d\xi$, et l'affirmation du Théorème 1(iii) est que ces moments sont conservés par l'évolution de Schrödinger.

Le but est d'étudier les résultats analogues pour les solutions de l'équation (1), et de décrire la connection entre la régularisation dispersive des solutions et le comportement global des bicaractéristiques de (2)(3). Dans ce but, nous allons adopter les estimations suivantes sur les coefficients de (1):

$$\frac{1}{C}|\xi| \le |\partial_\xi a(x,\xi)| \le C|\xi| \ , \tag{8}$$

qui est l'hypothèse d'ellipticité, et

$$|\partial_x^\alpha (a^{j\ell}(x) - \delta^{j\ell})| \le \frac{C_\alpha}{\langle x\rangle^{\tau(\alpha)}} \ , \quad \tau(\alpha) > |\alpha| + 1 \ , \tag{9}$$

qui est la condition pour que la métrique Riemannienne sur $\mathbb{R}^n$ donnée par $(a^{j\ell})^{-1}$ soit asymptotiquement plate.

Définition 2. Le point $(x_0, \xi^0) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ n'est pas *captif au futur* (respectivement *au passé*) par le flot bicaractéristique, si

$$|\pi_x \varphi(s; x_0, \xi^0)| \to \infty \ , \text{ quand } s \to +\infty \quad (\text{respectivement, } s \to -\infty) \ . \tag{10}$$

L'ensemble de points $(x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ qui ne sont pas captifs au futur est appelé $\mathcal{E}_+$, et l'ensemble qui n'est pas captif au passé est $\mathcal{E}_-$. L'involution $\xi \mapsto -\xi$ de $T^*(\mathbb{R}^n)$ permute les ensembles $\mathcal{E}_+$ et $\mathcal{E}_-$.

Le résultat de base de l'article [5] prend en considération le front d'onde classique $WF(\psi(x,t))$ des solutions de l'équation (1).

Théorème 3. *Considérons les solutions de l'équation (1) , dont les coefficients satisfont les estimations (8) et (9). Supposons que le point (x_0, ξ^0) n'est pas captif au passé par le flot bicaractéristique $\varphi(s; x, \xi)$. Pour les données initiales $\psi_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telles que tous ses moments sont finis (7), alors pour tout $t > 0$, $(x_0, \xi^0) \notin WF(\psi(x,t))$.*

Il est clair que le résultat analogue est valable pour $t < 0$, quand (x_0, ξ^0) n'est pas captif au futur par le flot bicaractéristique.

En plus, l'équation (5) est souvent considérée avec les termes de potentiel ou de potentiel vectoriel electromagnétique, et à propos de cela un théorème parallèle est valable pour l'équation plus générale (4), où $m_1(x,\xi)$ et $v_0(x,\xi)$ sont des symboles pour les opérateurs pseudodifférentiels dont les propriétés seront décrites ci-dessous. Les travaux originaux sur la régularité microlocale de l'équation de Schrödinger (1)(4) est de L. Boutet de Monvel [2] et R. Lascar [10]. Le résultat principal sur la régularité des solutions pour $t \neq 0$, dépendant de la condition globale des bicaractéristiques non captives est publié en [5]. Cet article donne une esquisse des méthodes de la démonstration. En plus, cet article développe les résultats de [5] en plusieurs directions. (i) D'abord, il donne les estimations globales des moments des solutions, en termes de moments, de même que les normes de Sobolev des données initiales. Un corollaire des théorèmes 1 et 2 est que, différemment que des solutions des équations de diffusion, les moments des solutions de l'équation de Schrödinger ne sont pas bornés en termes seuls de moments des données initiales $\psi_0(x)$, et il faut avoir aussi une information sur les dérivées de $\psi_0(x)$. Les bornes nécessaires et suffisantes en termes des normes des espaces de Sobolev avec poids sont présentées dans le Théorème 14 de section 3, avec estimations de la croissance en temps de ces moments. (ii) L'analyse dans [5] est valable pour l'opérateur de Laplace-Beltrami $\sqrt{\det(a)}\sum_{j,\ell}\partial_{x_j}\sqrt{\det(a)^{-1}}a^{j\ell}(x)\partial_{x_\ell}$, mais les problèmes non auto-adjoint sont exclus en équation (1) ainsi que les parties de premier ordre de l'équation (4). Utilisant une idée de l'article [9] on introduit une transformation de jauge, et certaines aspects de l'analyse peut être faite pour les équations (1) et (4) qui contiennent des termes non auto-adjoints qui décroissent suffisamment vite à l'infini. Cette transformation de jauge est basée sur une quadrature microlocale, et les opérateurs pseudodifférentiels résultants ont les symboles de propriétés nouvelles, qui peuvent être analysé avec les techniques de [5, section 4] et [4]. (iii) En outre, cet article décrit des propriétés d'application sur les espaces de Sobolev et de Sobolev avec poids les opérateurs apparaissant en (ii).

L'article [4] et le présent article sont des prolongements du texte des exposés des séminaires à Toronto en 1995 et à l'Ecole Polytechnique et Universität Bonn en 1996. Tandis que les introductions des deux sont du niveau discursif, j'ai fait un effort pour minimiser l'intersection entre eux, et il y a des résultats nouveaux dans chacun.

§2. Moments microlocaux et régularité

On réécrit l'équation (1) symboliquement ainsi

$$i\partial_t\psi = A\psi\ , \tag{11}$$

où $A = -\frac{1}{2}\sum_{j,\ell}\partial_{x_j}a_{j\ell}\partial_{x_\ell}$ est auto-adjoint sur un domaine convenable de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors il y a une identité satisfaite par les solutions de (11), pour presque n'importe quel opérateur B;

$$\partial_t\mathrm{re}\langle\psi, B\psi\rangle + \mathrm{re}\langle\psi, \tfrac{1}{i}[A,B]\psi\rangle = \mathrm{re}\langle\psi,(\partial_t B)\psi\rangle\ . \tag{12}$$

Dans les cas précis pour lesquels B commute avec A et est indépendant du temps, on peut conclure que $\partial_t\mathrm{re}\langle\psi,B\psi\rangle = 0$. En particulier, pour $B = I$, $\partial_t\|\psi(x,t)\|^2_{L^2} =$

0, qui démontre le fait que l'équation (1) conserve la probabilité des solutions, ce qui est l'analogue pour l'équation (1) du Théorème 1(i). La seconde estimation de base provient du choix $B = A$ lui même, duquel $\partial_t \frac{1}{2} \int \sum_{j,\ell} a^{j\ell}(x) \overline{\partial_{x_j} \psi} \partial_{x_\ell} \psi \, dx = 0$, qui est le principe de conservation d'énergie.

Changeant de point de vue, considérons l'identité (12) avec $B = b(x, D)$ un opérateur pseudodifférentiel, dont le symbole $b(x, \xi)$ est d'ordre m et appartient à une classe convenable. Les ordres des termes de l'identité sont bien définis, et l'on voit que $b(x, D)$ est d'ordre m, tandis que $\frac{1}{i}[A, b(x, D)] = -\{a, b\}(x, D) + e$, où le crochet de Poisson est d'ordre $m + 1$ et on compte sur l'erreur e étant de l'ordre égal ou inférieur à m. L'identité (12) sera utile pour estimer la solution si

$$
\begin{aligned}
c(x,\xi) &= -\,\{a,b\}(x,\xi)\ , \\
b(x,\xi) &\geq 0\ , \quad c(x,\xi) \geq 0\ ,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

en utilisant l'inégalité de Gårding et l'inégalité différentielle résultante de (12). La relation (13) entre $b(x, \xi)$ et $c(x, \xi)$ s'appelle équation cohomologique du système dynamique (2). En fait la même stratégie a été utilisée par L. Hörmander pour une de ces démonstrations du théorème de propagation des singularités des équations hyperboliques; cela apparaît en [7]. Cependant, dans le cas présent le terme $\{a, b\}$ représente la contribution principale, et non pas l'erreur comme dans la référence antérieure.

L'identité (12) et les demandes de positivité (13) nous mènent à une question fondamentale. Quand peut - on avoir une paire de symboles $(b(x, \xi), c(x, \xi))$ qui satisfait (13)? Autrement dit, l'énoncé (13) est que $b(x, \xi) \geq 0$, et $b(x, \xi)$ décroit le long des orbites du flot bicaractéristique du champ hamiltonien (2) de $a(x, \xi)$. Une réponse minime est que pour $s < 0$, $\varphi(s; \mathrm{supp}(b)) \subseteq \mathrm{supp}(b)$, une relation qui a de mauvais conséquences pour les propriétés des symboles $b(x, \xi)$ dans les régions non captives au futur $\mathcal{E}_+$.

Adoptons le point de vue que, étant donné un symbole convenable $c(x, \xi)$, nous construisons le symbole $b(x, \xi)$ tel que $-\{a, b\} = -X_a(b) = c$, où X_a est le champ de vecteurs hamiltonien de $a(x, \xi)$ sur $T^*(\mathbb{R}^n)$. Il est bien connu que l'éxistence et la régularité des solutions de l'équation cohomologique (13) sont très liées aux propriétés de récurrence du flot $\varphi(s; x, \xi)$. L'exemple le plus simple est si $c(x_0, \xi^0) > 0$ à un point (x_0, ξ^0) sur un orbite périodique du flot bicaractéristique, alors il n'existe pas de solution $b(x, \xi)$ de (13). Par contre, quand $\mathrm{supp}(c) \subseteq \mathcal{E}_-$ est dans une région noncaptive, la réponse est plus directe. Prenons $c(x, \xi) \in S^{m+1}$ un symbole classique, qui veut dire que $\pi_x \mathrm{supp}(c)$ est compact dans $\mathbb{R}^n$, et

$$
|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta c(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m+1-|\beta|}\ . \tag{14}
$$

Supposons que $\mathrm{supp}(c) \subseteq \mathcal{E}_-$ et, pour éviter les difficultés, que $c(x, \xi) = 0$ pour $|\xi| \leq 1$. Une solution de (13) est donnée par la quadrature

$$
b(x,\xi) = \int_0^{+\infty} c(\varphi(s;x,\xi))ds\ . \tag{15}
$$

Le fait de base est que le symbole $b(x,\xi)$ n'a pas de support $\pi_x \mathrm{supp}(b)$ compact, car son support contient l'orbite au passé de chaque bicaractéristique provenant de $\mathrm{supp}(c)$. De plus, cette construction naturelle (15) mène à une classe de symboles qui ne se comportent pas particulierement bien.

Proposition 3. *Pour $c(x,\psi) \geq 0$ (pas identiquement nul), avec* $\mathrm{supp}(c) \in \mathcal{E}_-$*, le symbole b provenant de la quadrature (15) est de support* $\pi_x \mathrm{supp}(b)$ *non compact. Les estimations générale des symboles satisfaits par $b(x,\xi)$ sont que*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|} \langle x \rangle^{+|\beta|} \ . \tag{16}$$

L'estimation (16) elle - même ne donne pas une classe raisonnable de symboles, et les opérateurs pseudodifférentiels construit d'après cette classe ne forment pas en général un calcul usuel. Heureusement il y a quelques propriétés supplémentaires des symboles provenant du processus de quadrature (15). Puisque $a(x,\xi)$ est asymptotiquement plate, il existe quatre champs de vecteurs particuliers par rapport auxquels le symbole $b(x,\xi)$ se comporte mieux. Définissons

$$X_1 = \xi \cdot \partial_\xi \ , \quad X_2 = x \cdot \partial_x \ , \quad X_3 = \frac{\langle \xi \rangle}{\langle x \rangle} x \cdot \partial_\xi \ , \quad X_4 = \frac{\langle x \rangle}{\langle \xi \rangle} \xi \cdot \partial_x \ . \tag{17}$$

Proposition 4. *Pour les symboles classiques $c(x,\xi) \in S^{m+1}$ tels que* $\mathrm{supp}(c) \subseteq \mathcal{E}_-$*, le résultat $b(x,\xi)$ de formule de quadrature (15) satisfait l'estimation*

$$|X^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta\gamma} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|} \langle x \rangle^{+|\beta|} \ , \tag{18}$$

où α, β sont les n - multiindices, et γ est un 4 - multiindice.

Définition 5. La classe de symboles $S^{m,k}(\rho,\delta)$ consiste en des symboles $b(x,\xi)$ qui sont $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et qui satisfont

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|} \langle x \rangle^{k+\rho|\beta|-\delta|\alpha|} \ . \tag{19}$$

Définissons la classe de symboles $S_d^{m,k}(1,0)$ le sous ensemble de $S^{m,k}(1,0)$ satisfaisant de plus l'estimation (18) par rapport aux champs de vecteurs X_j.

Pour $m = 0$ l'opérateur $b(x,D)$ dont le symbole satisfait (16) peut même ne pas être borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, par contre les opérateurs résultant de la quadrature ont un meilleur comportement.

Théorème 6. *Prenons $c(x,\xi) \in S^1$ un symbole classique tel que* $\mathrm{supp}(c) \subseteq \mathcal{E}_-$ *et $c(x,\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq 1$. Alors la solution $b(x,\xi)$ de (15) satisfait $b(x,\xi) \in S_d^{0,0}(1,0)$, et de plus*

$$\|b(x,D)\psi(x)\|_{L^2} \leq C \|\psi(x)\|_{L^2} \ . \tag{20}$$

La démonstration de ce théorème est dans [5] (section 4); elle implique les étapes suivantes. (i) Sans perte de généralité nous pouvons supposer que le support de $c(x,\xi)$ est suffisamment petit. (ii) Alors on peut voir que le support de

$b(x,\xi)$ provenant de (15) satisfait la condition géométrique suivante: quand on a $(x,\xi),(y,\xi) \in \mathrm{supp}(b)$ en même temps que $|x-y| \geq R$, alors

$$\tfrac{1}{2}\langle x-y\rangle|\xi| \leq |(x-y)\cdot\xi| \ . \tag{21}$$

(iii) L'opérateur $b(x,D)$ permet maintenant une décomposition presque orthogonale dans la région non captive au passé. Evidemment la même analyse s'applique aux symboles $c(x,\xi) \in S^{m+1}$ tels que $\mathrm{supp}(c) \subseteq \mathcal{E}_+$ la région non captive au futur, et la formule de quadrature est une intégrale sur l'orbite future de la bicaractéristique,

$$b(x,\xi) = -\int_{-\infty}^{0} c(\varphi(s;x,\xi))\,ds \ , \tag{22}$$

bien que maintenant $b(x,\xi) \leq 0$ si $c(x,\xi) \geq 0$. Une application immédiate du Théorème 6 et de l'identité (12) est le résultat de 'régularisation microlocale' pour les régions non captives $\mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-$ pour l'équation (1).

Théorème 7. *Prenons un symbole classique arbitraire $s(x,\xi) \in S^{1/2}$ tel que $\mathrm{supp}(s) \subseteq \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-$. Soit $\psi(x,t)$ une solution de l'équation (1), alors pour tout $T>0$, $\psi(x,t)$ satisfait l'estimation*

$$\int_0^T \|s(x,D)\psi(x,t)\|_{L^2}^2\,dt \leq C(T)\|\psi_0(x)\|_{L^2}^2 \ . \tag{23}$$

Démonstration. On a déjà observé que l'évolution par l'équation (1) conserve la norme L^2 des solutions. Par troncature régulière on peut supposer que le support de $s(x,\xi)$ ne contient pas $\xi = 0$, et est contenu dans un seul des deux ensembles $\mathcal{E}_-$, $\mathcal{E}_+$. Mettons $c(x,\xi) = s(x,\xi)^2$ et utilisons (15) ou bien (22) pour $b(x,\xi) \in S_d^{0,0}(1,0)$. Utilisons la paire de symboles $(b(,\xi),c(x,\xi))$ pour les opérateurs pseudodifférentiels dans l'identité (12), et intégrons sur l'intervalle de temps $t \in [0,T]$, ce qui nous donne l'identité

$$\begin{aligned} \mathrm{re}\langle\psi(T), b(x,D)\psi(T)\rangle \ &+ \int_0^T \mathrm{re}\langle\psi(t), -\{a,b\}(x,D)\psi(t)\rangle\,dt \\ &= \mathrm{re}\langle\psi_0, b(x,D)\psi_0\rangle \ - \int_0^T \mathrm{re}\langle\psi(t), e\psi(t)\rangle\,dt \ . \end{aligned} \tag{24}$$

Les termes de (24) suivants sont bornés en termes des données initiales:

$$\begin{aligned} |\mathrm{re}\langle\psi(T), b(x,D)\psi(T)\rangle| &\leq C\|\psi(T)\|_{L^2}^2 = C\|\psi_0\|_{L^2}^2 \\ .|\mathrm{re}\langle\psi_0, b(x,D)\psi_0\rangle| &\leq C\|\psi_0\|_{L^2}^2 \ . \end{aligned} \tag{25}$$

Avec un peu plus de travail ([5], Theorem 4.5) on peut montrer que

$$|\mathrm{re}\langle\psi(t), e\psi(t)\rangle| \leq C\|\psi_0\|_{L^2}^2 \ , \tag{26}$$

donc provenant de (24) on a une estimation du terme qui reste

$$\int_0^T \mathrm{re}\langle\psi(t), c(x,D)\psi(t)\rangle\, dt \le C(T)\|\psi_0\|_{L^2}^2 \ , \tag{27}$$

et à partir d'une application de l'inégalité de Gårding pour le symbole classique $c(x,\xi)$, on a le résultat (23). $\square$

Pour $(x_0,\xi^0)\in\mathcal{E}_-$ et $s(x,\xi)$ construit avec support dans un voisinage suffisamment petit de (x_0,ξ^0), l'énoncé (23) est l'étape initiale d'une démonstration par récursion, dont la conclusion est l'énoncé du Théorème 2 de régularité dispersive des solutions de l'équation (1). Les étapes suivantes pour les résultats C^∞ sont plus difficiles, et demandent des classes de symboles plus convenables au calcul pseudodifférentiel. Celles-ci sont les classes $S^{m,k}(\rho,\delta)$ de la Définition 5, où l'on pose que $0\le\rho<\delta\le 1$, avec les symboles soutenus dans des voisinages convenables de la bicaractéristique au passé provenant de (x_0,ξ^0).

Théorème 8. *Quand $0\le\rho<\delta\le 1$, l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels construit des classes $S^{m,k}(\rho,\delta)$ forme un calcul traditionnel.*

Les classes de symboles avec conditions sur les propriétés spatiales et transformées de Fourier mélangées ont été étudiées dans le passé, en particulier dans l'article de R. Beals & C. Fefferman [1] et dans l'article de L. Hörmander au sujet du calcul de Weyl [8]. Les classes $S^{m,k}(\rho,\delta)$ ne satisfont pas le critère de [1], cependant elles sont un sous-cas du calcul de symboles de Hörmander - Weyl. Un traitement direct est présenté dans [4] et [5].

Etant donnée une paire de symboles $(b(x,\xi), c(x,\xi))$ telle que $-\{a,b\}(x,\xi) = c(x,\xi)$, et en écrivant $\frac{1}{i}[A, b(x,D)] = -\{a,b\}(x,D)+e$, l'intégrale en temps de l'identité (12) montre que

$$\begin{aligned}\mathrm{re}\langle\psi(T), b(x,D)\psi(T)\rangle &+ \int_0^T \mathrm{re}\langle\psi(t), c(x,D)\psi(t)\rangle\, dt \\ &= \mathrm{re}\langle\psi_0, b(x,D)\psi_0\rangle + \int_0^T \mathrm{re}\langle\psi(t), (\dot b(x,D)-e)\psi(t)\rangle\, dt\ .\end{aligned} \tag{28}$$

Le premier souci est de savoir si les moments, proprement microlocalisés, des solutions $\psi(t), t>0$ peuvent être contrôlés en termes de moments analogues des données initiales. Prenons une paire de symboles $(b_0(x,\xi), c_0(x,\xi))\in S^{0,K}(\rho,\delta)\times S^{1,K-1}(\rho,\delta)$, avec $\rho<\delta$, telle que $(x_0,\xi^0)\in\mathrm{supp}(c_0)\subseteq\mathrm{supp}(b_0)=\mathcal{E}_0\subseteq\mathcal{E}_-$, et telle que

$$\begin{aligned} b_0(x,\xi) &\ge 0\ ,\\ c_0(x,\xi) &= -\{a,b_0\}(x,\xi)\ge 0\ ,\\ -\{a,\langle x\rangle^{-K}b_0\} &\ge 0 \quad \text{pour} \quad |x|\ge R\ . \end{aligned} \tag{29}$$

Une telle paire de symboles peut être construite quand on pose que $\rho+\delta>1$. Les termes d'erreur de la partie droite de (28) satisfont $\partial_t b = 0$, $e = e_{(1)}(x,D)+R_{(1)}$, où

$e_{(1)}$ est un symbole dans la classe $S^{0,K-2(\delta-\rho)}(\rho,\delta)$ et $R_{(1)}$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Les K-ièmes moments de la solution $\psi(x,T)$, microlocalisés dans $\mathcal{E}_0$, sont donc bornés en termes des K-ièmes moments des données initiales et des $K-2(\delta-\rho)$-ièmes moments de la solution, dans un voisinage $\mathcal{E}_1$ légèrement plus grand que $\mathcal{E}_0$. Puisque $K-2(\delta-\rho)<K$, une récursion sur une suite croissante de voisinages de la bicaractéristique du passé $\{(x,\xi)=\varphi(s;x_0,\xi^0) \ : \ s<0\} \subseteq \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}_1 \cdots \mathcal{E}_m \subseteq \mathcal{E}^{(0)} = \operatorname{supp}(s_0)$ sert à démontrer que les K-ièmes moments de la solution $\psi(x,t)$ sont bornés par les K-ièmes moments des données initiales $\psi_0(x)$. Cela est l'énoncé du théorème suivant.

Théorème 9. *Supposons que $(x_0,\xi^0)\in\mathcal{E}_-$, alors il existe un symbole $s_0(x,\xi)\in S^{0,K}(\rho,\delta)$, avec $0\le\rho<\delta\le1$ tel que $s(x_0,\xi^0)=1$ et $b_0(x,\xi)=s_0^2(x,\xi)$ satisfait*

$$\begin{aligned} &-\{a,b_0\}(x,\xi)\ge 0\ ,\\ &-\{a,b_0\langle x\rangle^{-K}\}(x,\xi)\ge 0 \qquad \textit{pour} \quad |x|>R\ . \end{aligned} \tag{30}$$

Quand les données initiales $\psi_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ sont telles que son K-ième moment microlocal dans $\operatorname{supp}(s_0)=\mathcal{E}^{(0)}$ *est fini,*

$$\langle\psi_0, s_0^* s_0(x,D)\psi_0\rangle < +\infty\ , \tag{31}$$

alors il existe un voisinage $\mathcal{E}^{(1)}\subseteq\mathcal{E}^{(0)}$ qui contient la bicaractéristique par (x_0,ξ^0) du passé, tel que pour tout $T>0$,

$$\sup_{0\le t\le T} \operatorname{re}\langle\psi(t), b(x,D)\psi(t)\rangle < +\infty\ , \tag{32}$$

pour tout $b(x,\xi)\in S^{0,K}(\rho,\delta)$ avec $\operatorname{supp}(b)\subseteq\mathcal{E}^{(1)}$.

C'est - à - dire, pour $t>0$ les K-ième moments microlocaux de la solution $\psi(x,t)$ sont bornés sur les voisinages légèrement plus petits de la bicaractéristique au passé provenant du point (x_0,ξ^0). En fait, cet énoncé de [5] est nouveau même pour l'équation de Schrödinger libre (5).

Le deuxième élément de la récurrence est d'utiliser encore l'identité (12) pour échanger l'information sur les moments de la solution dans $\mathcal{E}_-$ avec les estimations microlocales des dérivées. Pour atteindre ce but, considérons les paires de symboles $(b(x,\xi),c(x,\xi))\in S^{m,k}(\rho,\delta)\times S^{m+1,k-1}(\rho,\delta)$, avec $\operatorname{supp}(c)\subseteq\operatorname{supp}(b)\subseteq\mathcal{E}^{(1)}\subseteq\mathcal{E}_-$ telles qu'elles satisfont les relations (13). On emploie les opérateurs conséquents $t^p b(x,D)$, $t^p c(x,D)$ dans l'identité (12); la conclusion est que

$$\begin{aligned} &\operatorname{re}\langle\psi(T),T^p b(x,D)\psi(T)\rangle + \int_0^T \operatorname{re}\langle\psi(t),t^p c(x,D)\psi(t)\rangle\,dt\\ &\qquad = \operatorname{re}\langle\psi_0, t^p|_{t=0} b(x,D)\psi_0\rangle + \int_0^T \operatorname{re}\langle\psi(t),(pt^{p-1}b(x,D)-t^p e)\psi(t)\rangle\,dt\ . \end{aligned} \tag{33}$$

Quand $p>0$ le premier terme de la partie droite s'annule et l'identité ne dépend pas explicitement des données initiales $\psi_0(x)$ ni de ces dérivées. Pour la

n-ième étape de la récurrence, prenons $m = n$, $p = n$ et $k = K - n$, et alors la partie gauche de (33) est bornée en termes des intégrales en temps des quantités qui dépendent de moins de dérivées, mais de plus de moments. Le résultat est la constatation d'un théorème qui précise l'augmentation des dérivées microlocalisées de la solution pour $t > 0$ en termes des propriétés de moment des données initiales.

Théorème 10. *Supposons que $(x_0, \xi^0) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ n'est pas captif au passé par le flot bicaractéristique du symbole principal $a(x, \xi)$. Dans les voisinages appropriés plus petits $\mathcal{E}^{(2)} \subseteq \mathcal{E}^{(1)} \subseteq \mathcal{E}_-$ de la bicaractéristique au passé provenant de (x_0, ξ^0), on considère les paires de symboles $(b_K(x\xi), c_K(x, \xi)) \in S^{K,0}(\rho, \delta) \times S^{K+1,-\nu}(\rho, \delta)$ (où $\nu > 1$), telles que les relations (13) sont satisfaites. Considérons les données initiales $\psi_0(x)$ telles que*

$$\langle \psi_0, s_0^* s_0(x, D)\psi_0 \rangle < +\infty \ , \tag{34}$$

alors pour tout $T > 0$ et $K' > K$ ($K' = K$ si K est un entier),

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \le t \le T} (t^{K'} \mathrm{re}\langle \psi(t), b_K(x, D)\psi(t)\rangle < +\infty \ , \\ &\int_0^T t^{K'} \ \mathrm{re}\langle \psi(t), c_K(x, D)\psi(t)\rangle \ dt < +\infty \ . \end{aligned} \tag{35}$$

Ce résultat précise la régularité microlocale supplémentaire que l'on attend dans les voisinages des points (x_0, ξ^0) non captifs, en termes des moments microlocaux des données initiales dans les voisinages $\mathcal{E}^{(1)} \subseteq \mathcal{E}^{(0)}$ des orbites au passé de la bicaractéristique provenant de (x_0, ξ^0). Ce résultat, qui apparaît dans [5], est aussi nouveau même pour l'équation de Schrödinger libre (5). Dans le cas où $(x_0, \xi^0) \in \mathcal{E}_-$ est également non captif au futur par le flot bicaractéristique, un argument par récursion analogue donne pour résultat les bornes sur la croissance asymptotique à infini spatial des dérivées des composants sortants des solutions. Dans ce cas, il est nécessaire de prendre les paires de symboles $(b_n(x, \xi), c_n(x, \xi)) \in S_d^{m,k}(1, 0) \times S_d^{m+1,k-1}(1, 0)$, et la récursion est telle que $n = m \le K$, $p = n$ et avec $k < -n$, donnant un poids de taux negatif en $\langle x \rangle$. En effet, la solution est aussi régulière qui l'est permis par le nombre de moments entrants des données initiales, et cependant la taille des dérivées est croissante en $\langle x \rangle$.

Sous l'involution $\xi \mapsto -\xi$, les ensembles $\mathcal{E}_+$ et $\mathcal{E}_-$ sont échangés, et sous les conditions analogues les mêmes résultats sont valables pour $t < 0$. Une modification de la démonstration est valable pour l'équation (4), étant données les conditions sur les deux symboles $m_1(x, \xi)$ et $v_0(x, \xi)$ que $m_1(x, \xi)$ est réel, et que pour un $p < 1$,

$$\begin{aligned} &|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta m_1(x, \xi)| \le C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{1-|\beta|} \langle x \rangle^{p-|\alpha|} \ , \\ &|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta v_0(x, \xi)| \le C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{1-|\beta|} \langle x \rangle^{p-1-|\alpha|} \ . \end{aligned} \tag{36}$$

Un potentiel réel $v(x)$ qui satisfait $|\partial_x^\alpha v(x)| \le C_\alpha \langle x \rangle^{p-|\alpha|}$ est permis par l'hypothèse (36), car il satisfait les estimations pour $m_1(x, \xi)$. Cela a été discuté dans les références [3], [4] et [5]. L'information sur la régularité du noyau de l'équation de Schrödinger, au - dela de celle qui est donnée ici, est présentée dans l'article [3].

§3. Estimations dans les espaces de Sobolev

Dans cette section nous allons décrire les propriétés de base de l'évolution de l'équation de Schrödinger (1) et (4), comme application des espaces de Sobolev standard et Sobolev avec poids. Ces estimations sont globales, dans le sens ou l'analyse des solutions et de ses dérivées n'utilise pas les fonctions de troncature ni les techniques microlocales. Ces estimations sont de niveau assez bas; pourtant elles n'apparaîssent pas dans la litterature, pour autant que je sache, pour les équations à coefficients variables considérées en [3], [4] et [5] et le présent article. Les hypothèses que nous imposons sur les coefficients de l'équation (1) sont que

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{j,\ell=1}^{m} \partial_{x_j} a^{j\ell}(x)\partial_{x_\ell} = a(x,D) + a_1(x,D) \ , \tag{37}$$

où les opérateurs pseudodifferentiels ont des symboles $a(x,\xi)$, le symbole principal exprimé en (3), et $a_1(x,\xi) = -\sum_{j,\ell} i\partial_{x_j} a^{j\ell}(x)\xi_\ell$. En termes des classes des symboles, nous demandons que $a(x,\xi) \in S^{2,0}(0,1)$, tel que $a_1(x,\xi) \in S^{1,-1}(0,1)$, et nous supposons que la condition d'ellipticité est valable

$$\frac{1}{C}|\xi|^2 \le a(x,\xi) \le C|\xi|^2 \ . \tag{38}$$

Celle-ci est une hypothèse plus faible que (9) en terme de taux de décroissance, bien qu'elle implique encore que la matrice $(a^{j\ell})^{-1}$ est asymptotique plate. Les demandes sur les termes d'ordre inférieur de l'équation (4) sont que $m_1(x,\xi) \in S^{1,0}(0,1)$, et qu'il soit réel, tandis que $v_0(x,\xi) \in S^{0,0}(0,1)$. J'imagine que ces demandes peuvent être affaiblies, mais cela ne sera pas poursuivi ici.

Théorème 11. *Les solutions de l'équation (1) conservent la probabilité et l'énergie; c'est - à - dire*

$$\begin{gathered} \|\psi(x,t)\|_{L^2} = \|\psi_0\|_{L^2} \quad et \\ \sum_{j,\ell} \int a^{j\ell}(x)\overline{\partial_{x_j}\psi(x,t)}dx = \langle\psi(t), A\psi(t)\rangle = \langle\psi_0, A\psi_0\rangle \ . \end{gathered} \tag{39}$$

Supposons que $m_1(x,D) + v_0(x,D)$ soit formellement auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors les solutions de l'équation (4) conservent aussi la probabilité et l'énergie.

Démonstration. Ces faits ont été mentionnés ci-dessus, et l'idée de base de la démonstration est que dans l'identité (12), les opérateurs $B = I$ et $B = A$ commutent avec A. Bien sûr les solutions ne sont pas nécessairement régulière, alors l'argument complet entretient une approximation dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ par les solutions régulières et une limite. L'*énergie* de l'équation (4) est le produit scalaire $\langle\psi(t), (A + m_1(x,D) + v_0(x,D))\psi(t)\rangle$. $\square$

L'analogue du Théorème 1(iii) pour les solutions des équations (1) et (4) est le résultat que l'évolution préserve les espaces de Sobolev classiques $H^r(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 12. *Les solutions de l'équation (1) préservent les estimations de Sobolev dans les espaces* $H^r(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\psi(x,t)\|_{H^r} \leq C(r)\|\psi_0(x)\|_{H^r} \ . \tag{40}$$

Quand $m_1(x,\xi) \in S^{1,0}(0,1)$ *est réel et* $v_0(x,\xi) \in S^{0,0}(0,1)$, *alors les estimations de Sobolev sont aussi valables pour les solutions de l'équation (4);*

$$\|\psi(x,t)\|_{H^r} \leq e^{C(r)t}\|\psi_0(x)\|_{H^r} \ . \tag{41}$$

De même que les demandes sur les moments comme (7) donnent une information de localisation sur la densité de position $|\psi(x,t)|^2dx = dP_t(x)$, les estimations de Sobolev donnent une information sur les moments de la densité de vitesse (ou de momentum) $|\widehat{\psi}(\xi,t)|^2d\xi = d\widehat{P}_t(\xi)$. L'énoncé du Théorème 12 est que les $2r$-ièmes moments de $d\widehat{P}_t(\xi)$ sont bornés en termes des $2r$-ièmes moments de la densité de moments initiaux $\widehat{dP_0}(\xi)$; par contre l'énoncé parallèle à propos de la densité de position n'est pas valable. Il est naturel alors de demander de l'information suffisante telle que les moments spatiaux de la solution soient contrôlés; cela est le sujet du prochain théorème.

Définition 13. L'espace de Sobolev avec poids $W^r(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hilbert résultant de la clôture de $\mathcal{S}$ par rapport à la norme

$$|\psi(x)|^2_{W^r} = \sum_{|\alpha|+|\beta|=r} \int |x^\beta \partial_x^\alpha \psi(x)|^2 dx \ . \tag{42}$$

Théorème 14. *Les solutions de l'équation (1) préservent les espaces de Sobolev avec poids* $W^r(\mathbb{R}^n)$*; elles satisfont l'estimation*

$$|\psi(x,t)|_{W^r} \leq e^{C(r)t}|\psi_0(x)|_{W^r} \ . \tag{43}$$

Les solutions de l'équation (4) satisfont aussi (43) quand, comme ci-dessus, $m_1(x,\xi) \in S^{1,0}(0,1)$ *est réel, et* $v_0(x,\xi) \in S^{0,0}(0,1)$.

Remarquons que, en particulier, la variance $\int |x|^2|\psi(x,t)|^2dx$ d'une solution est finie pour tout $t \in \mathbb{R}$ si les données initiales ont en même temps la variance initiale finie et l'énergie initiale finie, mais pas nécessairement autrement. En fait les opérateurs d'évolution pour (1) et (4) préservent aussi les espaces de Hilbert basés sur les normes

$$|\psi(x)|^2_{(r,s)} = \sum_{0\leq|\beta|\leq s} |\partial_x^\beta \psi(x)|^2_{W^r} \ .$$

Il est possible de voir que le caractère de la norme (42) est nécessaire, suivant les exemples des paquets d'ondes gaussiens. Regardons les données initiales pour (5) de la forme

$$\psi_0(x) = \exp(-\tfrac{1}{2}(x,Ax) + i(k,x)) \ , \tag{44}$$

avec $A = A^T$ réelle et définie positive. Alors $dP_0(x) = \exp(-(x, Ax))dx$ et $\|\psi_0(x)\|_{L^2}^2 = \sqrt{\pi^n/\det(A)}$ (nous n'avons pas normalisé ψ_0, alors dP_0 n'est pas une mesure de probabilité). Les moments de $dP_0(x)$ sont

$$\int x^k|\psi_0(x)|^2dx = \int x^k \exp(-(x, Ax))dx \ , \tag{46}$$

qui sont indépendants de k. De plus, les normes de Sobolev avec poids de $\psi_0(x)$ peuvent être exprimées

$$\|\langle x\rangle^p\partial_x^q\psi_0(x)\|_{L^2}^2 = \int \langle x\rangle^{2p}P_q(x,k)\exp(-(x, Ax))dx$$

où $P_q(x, k)$ est un polynôme monique en k de degré maximal $2q$. La solution de (5) provenant des données initiales (44) est un paquet d'ondes gaussien $\psi(x,t) = \int S^0(x-y,t)\psi_0(y)dy$, où $S^0(x,t)$ est le noyau de l'équation de Schrödinger libre, et la solution est explicitement

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi i t)^n\det(1+t^2A^2)}}\exp\big(-\tfrac{1}{2}(x-kt, A(1+t^2A^2)^{-1}(x-kt))\big)\exp(i\Phi) \tag{47}$$

avec la fonction de phase $\Phi(x,t) = \frac{1}{2t}\big((x,x)-(x-kt,(1+t^2A^2)^{-1}(x-kt))\big)$. La densité de position est donc

$$dP_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^n\det(1+t^2A^2)}\exp\big(-(x-kt, A(1+t^2A^2)^{-1}(x-kt))\big)\ dx \ ,$$

dont les $2|r|$-ièmes moments sont

$$\int |x^r|^2dP_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^n\det(1+t^2A^2)}\int |(x+kt)^r|^2\exp\big(-(x,-A(1+t^2A^2)x)\big)dx \ , \tag{48}$$

et ceux-ci croissent en $|(kt)^r|^2$. La conclusion est que (48) divergera en k plus vite que (45) à moins que $|q| \geq |r|$ explicitement. Dans ce cas les moments de la solution $\|\langle x\rangle^r\psi(x,t)\|_{L^2}^2$ ne seront pas bornés dans une norme de Sobolev de données initiales qui ne contient pas au moins $2|r|$ moments et $2|r|$ dérivées.

Démonstration. (du Théorème 12) Le fait que A est elliptique implique que les normes construites de l'opérateur A, soit

$$\begin{aligned} &\langle A^{r/2}\psi, A^{r/2}\psi\rangle + \|\psi\|_{L^2}^2 \quad (r \text{ pair}) \ , \\ &\langle A^{(r+1)/2}\psi, A^{(r-1)/2}\psi\rangle + \|\psi\|_{L^2}^2 \quad (r \text{ impair}) \ , \end{aligned} \tag{49}$$

sont comparables aux normes de Sobolev usuelles de $H^r(\mathbb{R}^n)$. Pour l'équation (1) l'estimation standard est de prendre $b(x,D) = A^r$ dans l'identité (13), et cela commute bien sûr avec A, qui démontre que $\partial_t\langle\psi(t), A^r\psi(t)\rangle = 0$. Cette façon de raisonner n'est pas valable en elle - même bien sûr, car l'élément typique $\psi \in H^r(\mathbb{R}^n)$ n'est pas régulier; mais l'approximation standard par les fonctions régulières marche dans ce cadre de problème, et montre que les quantités de (49) sont préservées par l'évolution de (1). En présence de termes d'ordre inférieur, la même démonstration marche aussi, avec les modifications appropriées pour les effets des perturbations.

Lemme 15. *Etant donnés $m_1(x,\xi) \in S^{1,0}(0,1)$ un symbole réel, et $v_0(x,\xi) \in S^{0,0}(0,1)$, alors*

$$
\begin{aligned}
&[A^p, m_1(x,D)] = \tfrac{1}{i}\{a^p, m_1\}(x,D) + e_{(1)} \\
&\big(A^p m_1(x,D) - m_1^*(x,D)A^p\big) = \tfrac{1}{i}\{a^p, m_1\}(x,D) + e_{(2)} \\
&[A^p, v_0(x,D)] = \tfrac{1}{i}\{a^p, v_0\}(x,D) + e_{(3)}
\end{aligned}
\tag{50}
$$

où $\{a^p, m_1\}(x,\xi) \in S^{2p,-1}(0,1)$, $\{a^p, v_0\}(x,\xi) \in S^{2p-1,-1}(0,1)$, et avec $e_{(1)}$, $e_{(2)}$ borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ à $H^{2p-1}(\mathbb{R}^n)$, $e_{(3)}$ borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ à $H^{2p-2}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Les opérateurs $A = a(x,D) + a_1(x,D)$, $m_1(x,D)$ et $v_0(x,D)$ sont construits d'après des classes de symboles $S^{m,k}(0,1)$, qui ont un calcul de symboles qui se comporte bien (voir [4] et [5, section 5]). A partir de cela, la démonstration n'est pas difficile. □

Pour finir la démonstration du Théorème 12, supposons que $m_1(x,D)$ et $v_0(x,D)$ soient conforms aux hypothèses précédentes. Alors pour r pair, l'analogue de l'identité (13) avec $b = A^r$ est que

$$
\begin{aligned}
\partial_t \mathrm{re}\langle\psi, A^r\psi\rangle + \mathrm{re}\langle\psi, \tfrac{1}{i}[A, A^r]\psi\rangle + \mathrm{re}\langle\psi, \big(\tfrac{1}{i}(A^r m_1(x,D) - m_1^*(x,D)A^r) \\
+ \tfrac{1}{i}(A^r v_0(x,D) - v_0^*(x,D)A^r)\big)\psi\rangle = 0 \ .
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Bien sûr $[A, A^r] = 0$, et une estimation des restes est

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{re}\langle\psi, \tfrac{1}{i}(A^r m_1(x,D) - m_1^*(x,D)A^r)\psi\rangle \\
&\quad = -\,\mathrm{re}\langle A^{r/2}\psi, \tfrac{1}{i}(A^{r/2} m_1(x,D) - m_1^*(x,D)A^{r/2})\psi\rangle \\
&\qquad + \mathrm{re}\langle A^{r/2}\psi, \tfrac{1}{i}(A^{r/2} m_1(x,D) - m_1(x,D)A^{r/2})\psi\rangle \ .
\end{aligned}
\tag{52}
$$

Les quantités dans (52) sont les deux premières expressions dans (50) de Lemme 15, et alors

$$
\|(A^{r/2} m_1(x,D) - m_1^*(x,D)A^{r/2})\psi\|_{L^2} \le C(r)\|\psi\|_{H^r} \ ,
$$

$$
\|(A^{r/2} m_1(x,D) - m_1(x,D)A^{r/2})\psi\|_{L^2} \le C(r)\|\psi\|_{H^r} \ .
$$

Le terme avec $v_0(x,D)$ est même plus simple. L'identité (51) donne alors une inégalité différentielle pour $\langle\psi(t), A^r\psi(t)\rangle$, qui implique (41). Le cas r impair est semblable. Remarquons que, si $m_1(x,\xi) = 0$ et $v_0(x,\xi)$ est réel alors (41) est valable avec les bornes indépendentes du temps, car $\langle\psi, (A+V)^r\psi\rangle \sim \|\psi\|^2_{H^r}$. □

Démonstration. (de Théorème 14) Nous allons considérer l'équation (1), car la démonstration dans le cas de l'équation (4) entraîne que plus de termes d'erreur dans l'analyse. Etant donnée une solution $\psi(x,t)$, alors

$$
i\partial_t(\langle x\rangle^q\psi) = A(\langle x\rangle^q\psi) + [\langle x\rangle^q, A]\psi \ .
\tag{53}
$$

Développons le terme du commutateur,

$$
\begin{aligned}
[\langle x\rangle^q, A]\psi = &- \tfrac{1}{2}\sum_{j,\ell}(\partial_{x_\ell}\langle x\rangle^q)a^{j\ell}(x)\partial_{x_j}\psi - \sum_{j,\ell}(\partial_{x_\ell}a^{j\ell})(\partial_{x_j}\langle x\rangle^q)\psi \\
&- \tfrac{1}{2}\sum_{j,\ell} a^{j\ell}(x)(\partial_{x_j}\partial_{x_\ell}\langle x\rangle^q)\psi \ .
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Puisque $a(x,\xi) \in S^{2,0}(0,1)$, une inspection du taux de décroissance dans (54) montre le lemme suivant.

Lemme 16.

$\|\partial_x^r[\langle x\rangle^q, A]\|_{L^2} \le C(r,q)\big(\|\langle x\rangle^{q-1}\partial_x^{r+1}\psi\|_{L^2} + \|\langle x\rangle^{q-2}\partial_x^r\psi\|_{L^2} + \cdots + \|\langle x\rangle^{q-r}\psi\|_{L^2}\big)$.

Il n'est pas suffisant de l'utiliser dans (53) pour achever une inégalité différentielle pour $\langle x\rangle^q\partial_x^r\psi$, mais cela donne l'information nécessaire pour l'étape de récursion du théorème.

Lemme 17. *Supposons que $\psi(x,t)$ satisfait l'estimation*

$$
\|\langle x\rangle^{q-1}\partial_x^{r+1}\psi(x,t)\|_{L^2} \le \exp(C(q-1,r+1)t)\|\langle x\rangle^{q-1}\psi_0\|_{H^{r+1}} \ , \tag{55}
$$

alors

(56)

$$
\|\langle x\rangle^q\partial_x^r\psi(x,t)\|_{L^2} \le \exp(C(q,r)t)\big(\|\langle x\rangle^q\partial_x^r\psi_0(x)\|_{L^2} + C(q-1,r+1)\|\langle x\rangle^{q-1}\psi_0\|_{H^r}\big) \ .
$$

La démonstration entraîne, comme d'habitude, l'inégalité de Gronwall pour (53), appliquée à $A^{r/2}\psi$, et les estimations du Lemme 16 qui bornent les termes d'erreur. La récursion dans la démonstration du Théorème 14 commence avec l'énoncé du Théorème 12 pour $H^r(\mathbb{R}^n)$, et continue en r décroissant et q ascendant pour aboutir au résultat. □

§4. Problèmes non auto-adjoints

Les résultats de [5] sont presque tous limités au cas où l'opérateur du côté droit de (4) est auto-adjoint (sauf qu'il est permis d'admettre des termes non auto-adjoints du zéro-ième ordre qui décroissent en $\langle x\rangle$ grand). Il est donc naturel de se demander jusqu'à quel point la propriété auto-adjointe est nécessaire pour les résultats de régularisation dispersive. La technique dans cette section entraîne une 'transformation de jauge', et il est intéressant que ces transformations impliquent les opérateurs pseudodifférentiels basés sur la classe des symboles $S_d^{0,0}(1,0)$ qui apparaîssait ailleurs. Dans cette section nous considérons la forme générale des équations dispersives du deuxième ordre à coefficients variables, qui est réécrite dans la forme convenable suivante:

$$
i\partial_t\psi = \big(a(x,D) + a_1(x,D)\big)\psi + \big(m_1(x,D) + ic_1(x,D)\big)\psi + v_0(x,D)\psi \ . \tag{57}
$$

Les deux symboles de premier ordre $m_1(x,\xi)$ et $c_1(x,\xi)$ seront réels, $a(x,D) + a_1(x,D) = A$ sera auto-adjoint comme précédamment et le terme nouveau du problème est la contribution $ic_1(x,D)$ qui ne l'est pas. L'équation (57) n'est plus réversible en temps, par contraste avec l'équation (1), et la convention sera de discuter la régularité du cas $t > 0$. Cependant nous n'aurons pas les mêmes résultats pour $t < 0$, simplement par l'involution $\xi \mapsto -\xi$ de $T^*(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 18. *Supposons que* $c_1(x,\xi) \in S^{1,p}(0,1)$ *soit réel, et qu'il satisfasse* $c_1(x,\xi) \geq 0$. *Alors pour* $t > 0$ *les conclusions du Théorème 3, Théorème 7 et Théorème 10 sont valables pour les solutions de l'équation (57).*

Démonstration. Pour simplifier mettons $m_1(x,\xi) = 0 = v_0(x,\xi)$. L'identité (13) est modifiée pour être réécrite

$$\begin{aligned}\partial_t \mathrm{re}\langle\psi, b(x,D)\psi\rangle + &\mathrm{re}\langle\psi, \tfrac{1}{i}[a(x,D) + a_1(x,D), b(x,D)]\psi\rangle \\ &+ \langle\psi, \tfrac{1}{2}(bc_1(x,D) + c_1^*(x,D)b)\psi\rangle = \mathrm{re}\langle\psi, \partial_t b\psi\rangle \ .\end{aligned}$$

Au lieu d'être un point difficile, la quantité $\frac{1}{2}(bc_1 + c_1^* b(x,D))$ est positive à l'ordre principal, grâce a l'hypothèse sur le signe de $c_1(x,\xi)$. Pour $b(x,\xi) \in S_d^{0,0}(1,0)$ qui en plus satisfait la condition géométrique (21),

$$\tfrac{1}{2}\langle\psi, \big(b(x,D)c_1(x,D) + c_1^*(x,D)b(x,D)\big)\psi\rangle \geq c\|s(x,D)\psi\|_{L^2}^2 + \langle\psi, e_0\psi\rangle \ , \tag{58}$$

où e_0 est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cela est utilisé pour contrôler le terme supplémentaire qui va apparaître dans la démonstration du Théorème 7, et la conclusion (27) suivra. Les considérations analogues s'appliquent dans les étapes de récursion de la démonstration du Théorème 10, d'où sa conclusion, et celle du Théorème 3 suivra aussi. $\square$

L'analyse est plus intéressante quand le symbole $c_1(x,\xi)$ de l'équation (57) n'est pas supposé avoir un signe particulier. Nous pouvons prendre $c_1(x,\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq 1$ en modifiant le terme $v_0(x,\xi)$. Considérons une transformation $p(x,D)\psi = \varphi$, et son effet sur l'équation (57);

$$\begin{aligned} i\partial_t\varphi = &\big(a(x,D) + a_1(x,D)\big)\varphi + m_1(x,D)\varphi + v_0(x,D)\varphi \\ &+ \big([p,a] + ip(x,D)c_1(x,D)\big)\psi + [p,(a_1 + m_1 + v_1)]\psi \ .\end{aligned} \tag{59}$$

L'idée présentée en [9] est de choisir la transformation $p(x,D)$ pseudodifférentielle, telle que les termes de l'ordre le plus haut de $[p,a] + ic_1$ s'annule, avec les restes d'ordre zéro, qui peuvent être contrôlés en L^2, alors que notre analyse prend en compte cette situation. Cette stratégie implique que

$$\{a,p\}(x,\xi) + p(x,\xi)c_1(x,\xi) = 0 \ , \tag{60}$$

qui veut dire que,

$$p(x,\xi) = \exp(b_0(x,\xi)) \ , \quad \text{et} \quad -\{a,b_0\} = c_1(x,\xi) \ . \tag{61}$$

Cette équation pour $b_0(x,\xi)$ est précisément l'équation cohomologique du système dynamique (2),(3), dont les propriétés de récurrence influencent la résolution du (61). Il est clair qu'il y a peu de chance de simplifier (57) par ces transformations, sauf si le flot bicaractéristique n'est pas captif sur le support du symbole $c_1(x,\xi)$. Continuons alors en ajoutant l'hypothèse que $\mathrm{supp}(c_1) \subseteq \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-$. Provenant de la connaissance ci-dessus de la quadrature, nous avons l'information suivante de la nature du symbole $p(x,\xi)$.

Proposition 19. *Le symbole $b_0(x,\xi)$ obtenu de la quadrature de $c_1(x,\xi)$ est un élément de la classe $S_d^{0,0}(1,0)$. Pourtant, par la règle de Leibnitz, le symbole $p(x,\xi) = \exp(b_0(x,\xi))$ est dans $S_d^{0,0}(1,0)$ aussi.*

Cette classe d'opérateurs a été étudiée en [4] et [5], et elle se présente encore très naturellement dans le cadre des transformations de jauge. Pour que les symboles $p(x,\xi)$ satisfassent la condition géométrique (21), adoptons la condition très restrictive que $\pi_x \mathrm{supp}(c_1)$ est compact dans $\mathbb{R}^n$. Il est probable qu'une condition moins rigoureuse soit possible, cependant on ne va pas la considérer ici. Faisons les hypothèses suivantes sur les coefficients de l'équation (57):

$$
\begin{aligned}
&a(x,\xi) \text{ est elliptique, et asymptotiquement plate,}\\
&m_1(x,\xi) \in S^{1,0}(0,1) \text{ et il est réel,}\\
&v_0(x,\xi) \in S^{0,0}(0,1), \text{ et}\\
&c_1(x,\xi) \in S^{1,0}(0,1), \text{ avec } \mathrm{supp}(c_1) \subseteq \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-,\\
&\qquad \pi_x \mathrm{supp}(c_1) \subset\subset \mathbb{R}^n \ , c_1(x,\xi) = 0 \text{ pour } |\xi| \leq 1 \ .
\end{aligned} \tag{62}
$$

Le Théorème 4.5 de [5] aborde la question de la composition d'un opérateur basé sur $S_d^{m,k}(1,0)$ et les opérateurs classiques du type $S^{m_1,k_1}(0,1)$, avec les conclusions suivantes dans notre cas.

Proposition 20. *Les opérateurs dans la liste suivante sont bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

$$
\begin{aligned}
&p(x,D)a(x,D) - a(x,D)p(x,D) + ip(x,D)c_1(x,D) \ ,\\
&p(x,D)a_1(x,D) - a_1(x,D)p(x,D) \ ,\\
&p(x,D)m_1(x,D) - m_1(x,D)p(x,D) \ ,\\
&p(x,D)v_0(x,D) \ ,\\
&v_0(x,D)p(x,D) \ .
\end{aligned}
$$

Provisoirement, écrivons par la fonction f les termes de (59) qui entraînent ψ d'une manière explicite; c'est - à - dire,

$$
\begin{aligned}
f(x,t) = &\big([p(x,D), a(x,D)] + ip(x,D)c_1(x,D)\\
&+ [p(x,D), a_1(x,D) + m_1(x,D) + v_1(x,D)]\big)\psi(x,t) \ ,
\end{aligned}
$$

et posons que $\|\psi(x,t)\|_{L^2}$ est fini. Il est alors important d'étudier le problème inhomogène

$$
\begin{aligned}
i\partial_t\varphi &= \big(a(x,D) + a_1(x,D)\big)\varphi + m_1(x,D)\varphi + v_0(x,D)\varphi + f(x,t) \ ,\\
\varphi(x,0) &= \varphi_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \ , \quad f(x,t) \in L^2(\mathbb{R}^n) \ .
\end{aligned} \tag{64}
$$

Les solutions de cette équation ont un traitement dans les espaces $L^2(\mathbb{R}^n)$ (et même en $H^r(\mathbb{R}^n)$ si $f(x,\xi)$ le permet) semblable au cas homogène (4), et l'identité analogue à (13) est que

$$
\begin{aligned}
(65) \qquad & \partial_t \mathrm{re}\langle\varphi, b(x,D)\varphi\rangle + \mathrm{re}\langle\varphi, \tfrac{1}{i}[a+a_1, b(x,D)]\varphi\rangle \\
& \quad + \mathrm{re}\langle\varphi, \tfrac{1}{i}\big((b(x,D)m_1 - m_1^* b(x,D)) + (b(x,D)v_0 - v_0^* b(x,D))\big)\varphi\rangle \\
& = \mathrm{re}\langle\varphi, \partial_t b(x,D)\varphi + (b(x,D) - b^*(x,D))f\rangle \ .
\end{aligned}
$$

Etant données les hypothèses (62) (ou encore plus clémentes) ceci entraîne les estimations de Sobolev des solutions de (64) en termes de $\varphi_0(x)$ et $f(x,t)$. En particulier, si on met $b(x,D) = I$, alors

$$
(66) \qquad \partial_t \|\varphi(x,t)\|_{L^2}^2 \leq C_0\big(\|\varphi(x,t)\|_{L^2}^2 + \|\varphi(x,t)\|_{L^2}\|f(x,t)\|_{L^2}\big) \ ,
$$

donc

$$
(67) \qquad \|\varphi(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{C_0 t}\|\varphi_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t e^{C_0(t-\tau)}\|f(x,\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \ .
$$

Ce n'est pas une estimation des solutions de (59), car $f(x,t)$ est une fonction linéaire de $\varphi(x)$ selon la relation $p(x,D)\psi = \varphi$. De plus, il est naturel d'attendre que l'inverse $p^{-1}(x,D) = q$ soit $q \sim \exp(-b_0(x,D))$; cependant il n'y a pas de calcul pseudodifférentiel pour $S_d^{0,0}(1,0)$, alors le rapport entre q et $\exp(-b_0(x,D))$ n'est pas garanti. Avec l'hypothèse que $p(x,D)$ a un inverse qui est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, on a le résultat suivant.

Théorème 21. *Si l'opérateur $p(x,D)$ est inversible sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, alors il existe une solution $\varphi(x,t)$ de l'équation (59) dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et elle satisfait l'estimation*

$$
(68) \qquad \|\varphi(t)\|_{L^2} \leq e^{C_1 t}\|\varphi_0\|_{L^2} \ ,
$$

où C_1 dépend de C_0 de même que les normes d'opérateurs de $p^{-1}(x,D)$, $[p,a] + ipC_1$ et $[p, a_1 + m_1 + v_0]$. De plus, la fonction $\psi(x,t) = p^{-1}(x,D)\varphi(x,t)$ est une solution de l'équation (57).

Démonstration. En esquisse, on utilise une récursion pour $\varphi_n(t)$ qui est la solution de l'équation (64) avec $f = f(\psi_{n-1})$, où $\psi_{n-1} = q\varphi_{n-1}$. Les estimations directes montrent que l'équation inhomogène a les solutions en $L^2(\mathbb{R}^n)$, et un argument par contraction, aussi direct, qui entraîne l'estimation (67) sur un court intervalle de temps, montre que la suite $\varphi_n(x,t)$ converge dans $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ vers une solution de (59). L'équation est linéaire, donc cette solution peut être prolongée sur les intervalles en temps quelconque. □

L'identité (65) peut être appliquée encore une fois pour démontrer une estimation de régularité microlocale des solutions de l'équation (59), analogue à l'estimation (23). Supposons comme ci-dessus que les coefficients de (57) satisfont (62).

Théorème 22. *Supposons que l'opérateur $p(x,D)$ est inversiblement borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, et prenons $c(x,\xi)$ un symbole classique dans $\mathcal{S}^1$ tel que* $\operatorname{supp}(c) \subseteq \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-$. *Alors pour tout $T > 0$, la solution de l'équation (59) satisfait l'estimation de régularisation microlocale*

$$\int_0^T \operatorname{re}\langle \varphi(t), c(x,D)\varphi(t)\rangle dt \leq C\|\varphi_0\|_{L^2}^2 \ . \tag{69}$$

En ce cas, la solution $\psi(x,t) = p^{-1}(x,D)\varphi(x,t)$ de l'équation (57) satisfait l'estimation de régularité

$$\int_0^T \operatorname{re}\langle \psi(t), \tilde{c}(x,D)\psi(t)\rangle dt \leq C\|\psi_0\|_{L^2}^2 \ , \tag{70}$$

où $\tilde{c}(x,\xi) = |p(x,\xi)|^2 c(x,\xi)$.

Remarquons que ces hypothèses sont réversibles en temps, alors la démonstration du Théorème 22 implique les mêmes résultats pour $T < 0$.

Démonstration. L'identité (65) et la solution de (14) pour $b(x,\xi) \in S_d^{0,0}(1,0)$, étant donné $c(x,\xi) \in \mathcal{S}^1$ avec $\operatorname{supp}(c) \subseteq \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-$ impliquent le procédé de la démonstration du Théorème 7 pour pouvoir conclure (69). Pour arriver à l'énoncé (70) on peut utiliser le résultat dans [4] que la composition de $S_d^{m,k}(1,0)$ avec un symbole classique (où $\pi_x \operatorname{supp}(c)$ est compact) est bien définie et donne une série asymptotique d'opérateurs pseudodifférentiels avec des restes bien contrôlés. Alors

$$\begin{aligned}\langle \varphi, c(x,D)\varphi\rangle &= \langle \psi, p^*(x,D)c(x,D)p(x,D)\psi\rangle \\ &= \langle \psi, \tilde{c}(x,D)\psi\rangle + \langle \psi, e\psi\rangle \ ,\end{aligned}$$

où e est un opérateur de restes qui est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

Il manque un critère raisonnable pour que $p(x,D)$ soit inversible borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sans un calcul de symboles on ne peut corriger simplement le choix naturel de $p^{-1}(x,D) \sim \exp(-b_0)(x,D)$. Pourtant un critère direct est de supposer que $c_1(x,\xi)$ est petit, et d'utiliser la petite taille de $b_0(x,D)$ que cela impliquee.

Théorème 23. *Quand $c_1(x,\xi)$ est suffisamment petit, dans le sens que les constantes $C_{\alpha\beta}$ de l'estimation*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta c_1(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{1-|\beta|}\langle x\rangle^{-|\alpha|} \tag{71}$$

sont suffisamment petites pour $|\alpha|$, $|\beta| \leq L$, pour L approprié, alors l'opérateur $p(x,D) = \exp(b_0)(x,D)$ est inversible sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Les petites constantes en (71) impliquent que la solution $b_0(x,\xi)$ donnée par les quadratures (13) et (22) est aussi petite, ce que, a son tour, implique que la décomposition

$$p(x,\xi) = \exp(b_0(x,\xi)) = 1 + p_{(1)}(x,\xi)$$

a pour résultat le symbole $p_{(1)}(x,\xi) \in S_d^{0,0}(1,0)$ qui est petit. Le résultat est que $p_{(1)}(x,D)$ est un opérateur qui est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, avec petite norme d'opérateur (voir [5], section 4). Donc l'opérateur $p(x,D)$ est une petite perturbation de l'identité, et il est inversible. $\square$

Remarquons que, ni le résultat du Théorème 21 ni celui du Théorème 22, ne demande de comprendre l'inverse de $p(x,D)$ en termes d'opérateurs pseudodifférentiels et les propriétés de leurs symboles; on demande seulement que l'inverse est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Le critère même que $p(x,D)$ est borné ne dépend que des quantités associées du système dynamique (2), (3) et de la quadrature de $c_1(x,\xi)$.

§5. Propriétés d'application de $S_d^{0,0}(1,0)$

La transformation $p(x,D)$ de Section 4 entraîne les symboles $p(x,\xi) \in S_d^{0,0}(1,0)$, et après avoir été transformée, l'équation (59) entraîne les coefficients qui sont aussi dans cette classe. C'est ce qui a motivé la question des propriétés de continuité de ces opérateurs pseudodifférentiels, agissant sur les espaces de Sobolev classiques, où bien sur les espaces de Sobolev avec poids. Les deux résultats ici donnent une réponse à ces questions de base, et ils montrent le rôle des champs de vecteurs X_j définis en (17), et la condition géométrique sur le support de ces symboles.

Théorème 24. *Etant donné $p(x,\xi) \in S_d^{0,0}(1,0)$ qui satisfait la condition géométrique (21) sur son support, l'opérateur $p(x,D)$ est borné sur $H^r(\mathbb{R}^n)$ pour tout entier r.*

Démonstration. Pour $p(x,\xi) \in S_d^{0,0}(1,0)$ et $\varphi(x) \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\partial_x p(x,D)\varphi =& \partial_x \int\int e^{i\xi(x-y)} p(x,\xi)\varphi(y)\,dyd\xi \\ =& \int\int e^{i\xi(x-y)}\big(\partial_x p(x,\xi)\varphi(y) + p(x,\xi)\partial_y\varphi(y)\big)dyd\xi \ .\end{aligned}$$

Puisque $p(x,\xi) \in S_d^{0,0}(1,0)$, alors $\partial_x p(x,\xi)$ est aussi dans $S_d^{0,0}(1,0)$ et la condition (21) sur le support est autant valable pour l'un que pour l'autre. Les hypothèses du théorème impliquent donc que l'opérateur $p(x,D)$ est une application continue de $H^1(\mathbb{R}^n)$ en soi - même, et le reste suit par récursion. $\square$

La même question est naturelle à poser quand cela entraîne les normes de Sobolev avec poids. Définissons les espaces de Sobolev $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$ avec les normes

$$\|\varphi(x)\|^2_{H^{r,s}} = \int |\langle x\rangle^s \langle\partial_x\rangle^r \psi(x)|^2 dx \ .$$

Théorème 25. *Etant donné $p(x,\xi) \in S_d^{0,0}(1,0)$ tel qu'il satisfait la condition du support (21), l'opérateur $p(x,D)$ est borné sur $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$. Pourtant, $p(x,\xi) \in$*

$S_d^{m,k}(1,0)$ *qui satisfait (21) donne un opérateur pseudodifférentiel qui est une application borné de* $H^{r,s}(\mathbb{R}^n)$ *à* $H^{r-m,s-k}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Commençant avec $p(x,\xi) \in S_d^{0,0}(1,0)$ et $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, les poids multiplicatifs contre $p(x,D)$ ont les résultats suivants
(73)

$$\begin{aligned}
|x|^2 p(x,D)\varphi(x) &= |x|^2 \int\int e^{i\xi(x-y)} p(x,\xi)\varphi(y)dyd\xi \\
&= x \cdot \int\int (x-y)e^{i\xi(x-y)} p(x,\xi)\varphi(y)dyd\xi + x \cdot \int\int e^{i\xi(x-y)} p(x,\xi)y\varphi(y)dyd\xi \\
&= \int\int e^{i\xi(x-y)} ix \cdot \partial_\xi p(x,\xi)\varphi(y)dyd\xi + x \cdot \int\int e^{i\xi(x-y)} p(x,\xi)\varphi(y)dyd\xi \ .
\end{aligned}$$

Quand $p(x,\xi)$ est dans $S_d^{0,0}(1,0)$, alors $ix \cdot \partial_\xi p(x,\xi) \in S^{-1,1}(1,0)$ grâce à la propriété (18) par rapport au champs vectoriel X_3. Alors quand $p(x,\xi)$ satisfait en même temps la condition du support (21),

$$\| \frac{|x|^2}{\langle x \rangle} p(x,D)\varphi \|_{L^2} \leq C(\|\varphi(x)\|_{L^2} + \|x\varphi(x)\|_{L^2}) \ , \tag{74}$$

et cela implique que $p(x,D)$ est borné sur $H^{0,1}(\mathbb{R}^n)$. Le reste de l'énoncé du résultat suit par récursion. □

La dernière remarque est au sujet des conditions (17), (18) et (21) des symboles pour que les opérateurs pseudodifférentiels se comportent bien sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. La discussion ci-dessous est basée sur les constructions de L. Hörmander dans la référence [6].

Théorème 26. *Il existe des symboles* $q(x,\xi) \in S^{0,0}(\rho,\delta)$ *avec* $\delta < \rho$ *tels que* $q(x,D)$ *n'est pas borné sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Dans la référence [6], le Corollaire 5 montre des exemples des symboles $r(x,\xi) \in S^0_{\delta,\rho}$, la classe de symboles de Hörmander, (d'où

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta r(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(K)\langle\xi\rangle^{\rho|\alpha|-\delta|\beta|} \ ,)$$

où $0 < \delta \leq \rho < 1$ et où $r(x,D)$ n'est pas borné de $L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ à $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Sans perte de généralité supposons que $\pi_x \mathrm{supp}(r) \subseteq K$ est un ensemble compact. Il est clair que $r(x,D)$ n'est pas borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, pas plus que les opérateurs construits de n'importe quelle extension du symbole $r(x,\xi)$ de l'extérieur de K. Mettons $q(x,\xi) = r(\xi,x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in K$, et prolongeons $q(x,\xi)$ d'une manière homogène de degré zéro en ξ à l'extérieur d'une grande boule qui contient K, tel que $q(x,\xi) \in S^{0,0}(\rho,\delta)$, les classes de la Définition 5. Alors $q(x,D)$ ne peut pas être borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, car autrement $q^*(x,D)$ serait aussi borné, et alors pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, nous aurions

$$\|r(x,D)\varphi\|_{L^2} = \|q^*(x,D)\widehat{\varphi}\|_{L^2} \leq C\|\varphi\|_{L^2} \ .$$

□

References

[1] R. Beals and C. Fefferman, *Spatially inhomogeneous pseudodifferential operators: I*, Duke Math. Journal **42** (1975), 1–42.

[2] L. Boutet de Monvel, *Propagation des singularités des solutions d'équations analogues à l'équation de Schrödinger*, Colloque Int'l Univ. Nice, Lecture Notes in Math. 459, Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1974, pp. 1–14.

[3] W. Craig, *Properties of microlocal smoothing for Schrödinger's equation*, Proceedings of the workshop on Spectral theory for the Schrödinger equation, Institute of Mathematical Sciences, Madras., 1995.

[4] W. Craig, *On the microlocal regularity of the Schrödinger kernel*, Proceedings of the Toronto summer workshop on PDE, American Mathematical Society, Providence, 1996, (a paraître).

[5] W. Craig, T. Kappeler and W. Strauss, *Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equation*, Commun. Pure Applied Math. **48** (1995), 769–860.

[6] L. Hörmander, *On the L^2 continuity of pseudo - differential operators*, Commun. Pure Applied Math. **24** (1971), 529–535.

[7] L. Hörmander, *On the existence and regularity of solutions of linear pseudo - differential equations*, Enseignment Mathematiques **17** (1971), 99–163.

[8] L. Hörmander, *The Weyl calculus of pseudo - differential operators*, Commun. Pure Applied Math. **32** (1979), 359–443.

[9] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Smoothing effects and local existence theory for the generalized nonlinear Schrödinger equation* (1996), préprint.

[10] R. Lascar, *Propagation des singularités des solutions d'équations pseudodifferentielles quasi-homogènes*, Annales Inst. Fourier **27.2** (1977), 79–123.

Mathematics Department et Lefschetz Center for Dynamical Systems, Brown University, Providence Rhode Island 02912, USA

Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 35 route de Chartres, 91440 Bures - sur - Yvette, France

E-mail address: craigw@math.brown.edu