Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

A. D'Agnolo
P. Schapira

Correspondance de D-modules et transformation de Penrose

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. n° 21, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A21_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1992-1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

CORRESPONDANCE DE $\mathcal{D}$-MODULES ET TRANSFORMATION DE PENROSE

A. D'AGNOLO & P. SCHAPIRA

Exposé n° XXI

18 Mai 1993

Correspondance de $\mathcal{D}$-modules et transformation de Penrose

ANDREA D'AGNOLO PIERRE SCHAPIRA

1 La transformation de Penrose classique

Soit $\mathbb{T}$ un espace vectoriel complexe de dimension 4, $\mathbb{F} = F_{12}(\mathbb{T})$ sa variété des drapeaux de type $(1,2)$, $\mathbb{P} = F_1(\mathbb{T})$ l'espace projectif de dimension 3, et $\mathbb{M} = F_2(\mathbb{T})$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension 2. La variété $\mathbb{M}$ est identifiée à une compactification conforme du complexifié de l'espace de Minkowski M_4, et on peut interpréter la famille des équations de champs de masse zéro dans M_4 comme une famille d'opérateurs différentiels entre fibrés holomorphes sur $\mathbb{M}$. Il s'agit d'une famille, que l'on note ici par $\Box_h$, paramétrée par un demi-entier h appelé hélicité, qui comprend l'équation des ondes de Maxwell, les équations du neutrino de Dirac-Weyl et les équations d'Einstein à masse nulle linéairisées.

La transformation de Penrose est une transformation intégrale associée à la double fibration

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{F} & \\ {\scriptstyle g}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{P} & & \mathbb{M} \end{array} \tag{1.1}$$

(où $f(L_1, L_2) = L_2$ et $g(L_1, L_2) = L_1$ pour $L_1 \subset L_2 \subset \mathbb{T}$ sous-espaces complexes de dimension 1 et 2) qui permet de trouver les solutions holomorphes de l'équation $\Box_h \phi = 0$ dans certains ouverts $U \subset \mathbb{M}$ en termes de classes de cohomologie de fibrés en droites sur $\widehat{U} = gf^{-1}(U) \subset \mathbb{P}$.

Plus précisément, rappelons que pour $k \in \mathbb{Z}$, les fibrés en droites sur $\mathbb{P}$ sont donnés par les $-k$-ièmes puissances tensorielles $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$ du fibré tautologique (i.e. du fibré dont la fibre au dessus de $L_1 \in \mathbb{P}$ est la droite $L_1 \subset \mathbb{T}$). On a alors le résultat suivant de Eastwood, Penrose et Wells [4]

Théorème 1.1 *Soit $U \subset \mathbb{M}$ un ouvert tel que*

$$U \cap \widehat{z} \text{ soit contractile pour tout } z \in \widehat{U}, \tag{1.2}$$

où on pose $\widehat{z} = fg^{-1}(z)$. Alors pour $k \in \mathbb{Z}$ et $h(k) = -(1 + k/2)$, le morphisme naturel associé à (1.1) qui a une $1-$forme associe l'integrale dans les fibres de f de

son image inverse par g:

$$\mathcal{P}: \ H^1(\hat{U}; \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)) \longrightarrow \ker(U; \Box_{h(k)})$$

est un isomorphisme.

Nous renvoyons à [1], [3], [9], [14] pour des exposés de cette théorie et diverses généralisations.

Suivant [2] on se propose de décrire ici une nouvelle approche de la transformation de Penrose, dans le langage des faisceaux et des $\mathcal{D}$-modules et ce, dans un cadre géométrique plus général que celui des variétés de drapeaux. Cette approche a, selon nous, plusieurs avantages: elle permet de distinguer les difficultés de nature topologique (faisceaux) et celles de nature analytique ($\mathcal{D}$-modules). De plus l'utilisation des catégories dérivées clarifie considérablement la situation et l'on verra que l'une des principales difficultés rencontrées par de nombreux auteurs est due à ce que la transformée de Penrose de certains $\mathcal{D}$-modules n'est pas "concentrée" en degré 0. Enfin, et surtout, cette approche va nous permettre de caractériser (cf le theoreme 3.3 pour un énoncé précis) tous les systèmes d'équations aux dérivées partielles que l'on peut espérer obtenir par cette transformation.

2 Correspondance de faisceaux et de $\mathcal{D}$-modules

Considérons les morphismes de variétés analytiques complexes:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ {\scriptstyle g}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle f} \\ Z & & X \end{array} \tag{2.1}$$

et supposons:

(H.1) g est lisse,

(H.2) f est propre,

(H.3) $(g, f): Y \hookrightarrow Z \times X$ est une immersion fermée.

On note d_X la dimension complexe d'une variété X. On note $D^b(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de faisceaux de $\mathbb{C}$-vectoriels sur X et $D^b_{\mathbb{R}-c}(X)$ la sous-catégorie triangulée pleine dont les objets sont $\mathbb{R}$-constructibles.(On fait référence à [8] pour une exposition détaillée de la théorie des faisceaux dans le cadre des catégories dérivées.)

Définition 2.1 Soient $F \in Ob(D^b(X))$ et $G \in Ob(D^b(Z))$. Nous posons

$$\mathcal{P}H \stackrel{\text{def}}{=} Rf_* g^{-1}(H), \tag{2.2}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}F \stackrel{\text{def}}{=} Rg_!(f^{-1}(F)[2d_Y - 2d_X]). \tag{2.3}$$

Posons $D'_X(\cdot) = R\mathcal{H}om(\cdot, \mathbb{C}_X)$ et $\mathrm{RHom}(\cdot,\cdot) = \mathrm{R}\Gamma(X; R\mathcal{H}om(\cdot,\cdot))$. Par des formules d'adjonction classiques en théorie des faisceaux, telles que la formule de dualité de Poincaré-Verdier, on obtient aisément le résultat suivant:

Proposition 2.2 *(i) Soient $F \in Ob(D^b(X))$ et $H \in Ob(D^b(Z))$. Alors*

$$\mathrm{Hom}_{D^b(Z)}(\widetilde{\mathcal{P}}F, H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(F, \mathcal{P}H).$$

(ii) Soient $K \in Ob(D^b_{\mathbb{R}-c}(X))$, $H \in Ob(D^b(Z))$, avec K à support compact. Alors on a le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont des isomorphismes:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R}\Gamma(Z; \mathcal{P}K \otimes H) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{R}\Gamma(X; K \otimes \mathcal{P}H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{RHom}(D'_Z \mathcal{P}K, H) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{RHom}(D'_X K, \mathcal{P}H) \end{array}$$

Notons $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X, et $\mathcal{D}_X$ le faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes. Notons $D^b(\mathcal{D}_X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des complexes bornés de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche. On dit qu'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ est "good" si pour tout compact $K \subset X$, il existe un $\mathcal{O}_X$-module coherent défini au voisinage de K, inclus dans $\mathcal{M}$, et qui engendre $\mathcal{M}$ (cf [10]). Notons par $D^b_{\mathrm{good}}(\mathcal{D}_X)$ la sous catégorie triangulée de $D^b(\mathcal{D}_X)$ dont les objets $\mathcal{M}$ sont à cohomologie cohérente et "good". Notons par $\underline{f}_*$ et $\underline{f}^{-1}$ les foncteurs d'image directe et inverse pour les $\mathcal{D}$-modules. (On fait référence à [6], [11] et [12] pour une exposition détaillée de la théorie des $\mathcal{D}$-modules.)

Définition 2.3 On définit le foncteur $\underline{\mathcal{P}}$ de $D^b_{\mathrm{good}}(\mathcal{D}_Z)$ dans $D^b_{\mathrm{good}}(\mathcal{D}_X)$ par:

$$\underline{\mathcal{P}}\mathcal{N} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \underline{f}_* \underline{g}^{-1} \mathcal{N}.$$

Nous appellerons parfois $\underline{\mathcal{P}}(\mathcal{N})$ la transformée de Penrose de $\mathcal{N}$.

En utilisant le théorème de Cauchy-Kowalevski-Kashiwara relativement à l'application g, et le théorème d'image directe relativement à f [6, 13], on obtient:

Proposition 2.4 *Soit $\mathcal{N} \in Ob(D^b_{\mathrm{good}}(\mathcal{D}_Z))$. Alors le morphisme naturel*

$$\mathcal{P}\, R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{N}, \mathcal{O}_X)\,[d_X - d_Y]$$

est un isomorphisme.

Posons $\mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_Z}(\cdot,\cdot) = \mathrm{R}\Gamma(Z; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(\cdot,\cdot))$. Comme corollaire des Propositions 2.2 et 2.4, on obtient

Théorème 2.5 *(i) Soit $\mathcal{N} \in Ob(D^b_{\text{good}}(\mathcal{D}_Z))$, et soit $F \in Ob(D^b(X))$. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{N} \otimes \tilde{\mathcal{P}}F, \mathcal{O}_Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{N} \otimes F, \mathcal{O}_X)\,[d_X - d_Y].$$

(ii) Soit $\mathcal{N} \in Ob(D^b_{\text{good}}(\mathcal{D}_Z))$, et soit $K \in Ob(D^b_{\mathbb{R}-c}(X))$ à support compact. Alors on a le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont des isomorphismes:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{N}, \mathcal{P}K \otimes \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{N}, K \otimes \mathcal{O}_X)\,[d_X - d_Y] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{N} \otimes D'_Z\mathcal{P}K, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{N} \otimes D'_X K, \mathcal{O}_X)\,[d_X - d_Y]. \end{array}$$

Ce résultat permet de distinguer deux types de problèmes apparaissant dans ces questions:

- calculer la transformée de Penrose faisceautique de F,
- calculer la transformée de Penrose au sens des $\mathcal{D}$-modules de $\mathcal{N}$.

Le premier problème est de nature topologique et n'offre pas de difficulté sous des hypothèses raisonnables (cf le paragraphe 4 ci-dessous). Le calcul de $\underline{\mathcal{P}}\mathcal{N}$ est nettement plus difficile. Par exemple $\underline{\mathcal{P}}\mathcal{N}$ est un complexe de $\mathcal{D}$-modules qui n'est pas nécessairement concentré en degré zéro, et si cela ne change rien tant que l'on travaille dans le langage des catégories dérivées, il en est autrement dès que l'on veut calculer explicitement la cohomologie.

Dans la prochaine section on étudiera la transformation $\underline{\mathcal{P}}\mathcal{N}$. On commence ici par donner un corollaire facile du théorème 2.5.

Pour $x \in X$, $z \in Z$ et $U \subset X$, notons $\hat{x} = gf^{-1}(x)$, $\hat{z} = fg^{-1}(z)$, $\hat{U} = gf^{-1}(U)$.

Corollaire 2.6 *Soit $\mathcal{N} \in Ob(D^b_{\text{good}}(\mathcal{D}_Z))$. Alors*

(i) [Formule du germe] Pour $x \in X$ on a

$$\mathrm{R}\Gamma(\hat{x}; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Z)) \simeq \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{N}, \mathcal{O}_X)_x\,[d_X - d_Y];$$

(ii) [Solutions holomorphes] Soit $U \subset X$ un ouvert tel que

$$U \cap \hat{z} \text{ soit contractile pour tout } z \in \hat{U}. \tag{2.4}$$

Alors

$$\mathrm{R}\Gamma(\hat{U}; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Z)) \simeq \mathrm{R}\Gamma(U; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{N}, \mathcal{O}_X))\,[d_X - d_Y].$$

Preuve: On prouve facilement que $\widetilde{\mathcal{P}}\mathbb{C}_x \simeq \mathbb{C}_{\widehat{x}}$ pour $x \in X$. D'autre part, l'hypothèse (H.3) donne une identification $U \cap \widehat{z} \simeq f^{-1}(U) \cap g^{-1}(z)$, et donc (2.4) entraîne que les fibres de g sont topologiquement triviales sur $f^{-1}(U)$. Il est alors facile de vérifier que $\widetilde{\mathcal{P}}\mathbb{C}_U \simeq \mathbb{C}_{\widehat{U}}$. □

Soit $\mathcal{L}$ un fibré vectoriel holomorphe sur Z, $\mathcal{L}^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_Z)$ son dual, et considérons le $\mathcal{D}_Z$-module localement libre

$$\mathcal{D}\mathcal{L}^* = \mathcal{D}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{L}^*.$$

On peut retrouver $\mathcal{L}$ en tant que faisceau des solutions holomorphes de $\mathcal{D}\mathcal{L}^*$ puisque:

$$\mathcal{L} \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{D}\mathcal{L}^*, \mathcal{O}_Z).$$

Dans le cadre de la correspondance (1.1), en appliquant le corollaire 2.6 avec $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)$, on obtient ainsi les isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{R}\Gamma(\widehat{x}; \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)) &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k), \mathcal{O}_X)_x\,[1], \\ \mathrm{R}\Gamma(\widehat{U}; \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)) &\simeq \mathrm{R}\Gamma(U; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k), \mathcal{O}_X))\,[1], \end{aligned}$$

où l'on pose $\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k) = \mathcal{D}\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k)$. On peut alors interpreter le Théorème 1.1 ainsi: la transformée de Penrose du $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k)$ est le $\mathcal{D}$-module associe à l'opérateur $\Box_h$.

3 L'equivalence de $\mathcal{D}$-modules

On notera $\dot{T}^*Z$ le fibré cotangent à Z privé de la section nulle. Considerons le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} & \dot{T}^*_Y(Z \times X) & \\ {\scriptstyle p_1^a}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle p_2} \\ \dot{T}^*Z & & \dot{T}^*X \end{array} \tag{3.1}$$

où $\dot{T}^*_Y(Z \times X)$ dénote le fibré conormal à $Y \hookrightarrow Z \times X$, p_1, p_2 sont les projections, et p_1^a est le compose de p_2 et de l'application antipodale. La variété $T^*_Y(Z \times X)$ étant Lagrangienne, p_1 est lisse si et seulement si p_2^a est immersive. On fait l'hypothèse suivante

(H.4) l'application p_2 est une immersion fermée sur une sous-variété fermée lisse involutive régulière V de $\dot{T}^*X$ et p_1^a est lisse et surjective.

Soit $\mathcal{E}_X$ le faisceau des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini sur T^*X (cf [11], [5], ou [12] pour une exposition détaillée). Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent, on pose $\mathcal{E}\mathcal{M} = \mathcal{E}_X \otimes_{\dot{\pi}^{-1}\mathcal{D}_X} \dot{\pi}^{-1}\mathcal{M}$, où $\dot{\pi}$ denote la projection de $\dot{T}^*X$ sur X. On dira que

$\mathcal{M}$ est a singularités régulières sur V ($RS(V)$ en abrégé), s'il en est ainsi de $\mathcal{EM}$. Rappellons que la notion de $\mathcal{E}_X$-module à singularités régulières a été introduite par [7]. On note $D^b_{RS(V)}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $D^b_{\text{good}}(\mathcal{D}_X)$ des objets à singularités régulières sur V et on définit de même $Mod_{RS(V)}(\mathcal{D}_X)$.

Théorème 3.1 *On fait les hypotheses (H.1)-(H.4).*
(i) Le foncteur $\underline{\mathcal{P}}$ est à valeurs dans $D^b_{RS(V)}(\mathcal{D}_X)$.
(ii) Si $\mathcal{N}$ est en degré zéro (i.e. est un $\mathcal{D}$-module), alors pour $j \neq 0$, $H^j(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{N})$ a sa variété caractéristique contenue dans la section nulle, (en d'autres termes, c'est une connexion holomorphe plate).
(iii) Soit $\mathcal{L}$ un fibré vectoriel holomorphe, et rappellons que $\mathcal{DL} = \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{L}$. Alors supposant X connexe, $\underline{\mathcal{P}}\mathcal{DL}$ est concentré en degré zéro si et seulement s'il existe $x \in X$ tel que $H^j(\hat{x}; \mathcal{L}) = 0$ pour tout $j \neq d_Y - d_X$.

Preuve: Les assertions (i) et (ii) se démontrent en remarquant que $\underline{\mathcal{P}}$ "commute à la microlocalisation", et que en dehors de la section nulle, la transformation de Penrose des $\mathcal{E}_Z$-modules est un foncteur exact. L'assertion (iii) se démontre en utilisant (i) et la formule du germe. □

Définition 3.2 On note $Mod_{good}(\mathcal{D}_Z; \mathcal{O}_Z)$ la localisée de la catégorie abélienne $Mod_{good}(\mathcal{D}_Z)$ par la sous-catégorie formée des modules de variétés caractéristiques contenues dans la section nulle. Autrement dit, les objets de $Mod_{good}(\mathcal{D}_Z; \mathcal{O}_Z)$ sont les good $\mathcal{D}_Z$ modules mais un morphisme u de $\mathcal{D}_Z$ modules devient un isomorphisme dans cette nouvelle catégorie dès que $Ker(u)$ et $Coker(u)$ ont leurs variétés caractéristiques portées par la section nulle. On définit de même $Mod_{RS(V)}(\mathcal{D}_X; \mathcal{O}_X)$, localisation de $Mod_{RS(V)}(\mathcal{D}_X)$, la sous-catégorie pleine de $Mod_{good}(\mathcal{D}_X)$ formée des modules à singularitées régulières sur V.

Notons $\underline{\mathcal{P}}^0$ le foncteur $H^0(*) \circ \underline{\mathcal{P}}$, "cohomologie en degré zéro de la transformation de Penrose. Ce foncteur est bien défini de $Mod_{good}(\mathcal{D}_Z)$ dans $Mod_{RS(V)}(\mathcal{D}_X)$, et envoie les modules de variétés caractéristiques contenues dans la section nulle dans des modules sur X ayant la même propriété.

Théorème 3.3 *On fait les hypothèses (H1)-H(4) et aussi:*

(H.5) L'application f est lisse, l'application g est propre et g est à fibres connexes et simplement connexes.

Alors le foncteur:

$$\underline{\mathcal{P}}^0 : Mod_{good}(\mathcal{D}_Z; \mathcal{O}_Z) \longrightarrow Mod_{RS(V)}(\mathcal{D}_X; \mathcal{O}_X)$$

est une équivalence de catégories.

Autrement dit modulo des connexions plates, tout module à singularités régulières sur V (muni d'une bonne filtration) est le transformé de Penrose d'un unique $\mathcal{D}_Z$-module cohérent muni d'une bonne filtration. Notons que sur un espace simplement connexe, le faisceau des solutions holomorphes d'une connection plate est un faisceau constant de rang fini.

4 Retour à la transformation de Penrose

Revenons maintenant à la correspondance des twisteurs (1.1), que l'on vérifie aisément satisfaire les hypothèses (H.1)–(H.5). Pour $x \in \mathbb{M}$, l'ensemble $\hat{x}$ s'identifie à un espace projectif $\mathbb{P}^1$ plongé dans $\mathbb{P}$. On vérifie alors que pour $x \in X$ on a

$$\begin{aligned} H^0(\hat{x}; \mathcal{O}_Z(k)) &= \begin{cases} 0 \quad \text{pour } k < 0, \\ \neq 0 \quad \text{et de dimension finie pour } k \geq 0, \end{cases} \\ H^1(\hat{x}; \mathcal{O}_Z(k)) &\quad \text{est de dimension infinie pour tout } k, \\ H^j(\hat{x}; \mathcal{O}_Z(k)) &= 0 \quad \text{pour } j \neq 0, 1 \text{ et pour tout } k. \end{aligned}$$

On déduit alors du Théorème 3.1 (iii) le:

Corollaire 4.1 *Le complexe $\mathcal{PD}_Z(-k)$ est concentré en degré zéro si et seulement si $k < 0$.*

Ce dernier résultat explique sans doute pourquoi beaucoup d'auteurs ne traitent que le cas de l'hélicité positive. Pour terminer, nous nous proposons de montrer comment retrouver rapidement les résultats de [16] sur les solutions hyperfonctions.

Soit ϕ une forme Hermitienne sur $\mathbb{T}$ de signature $(+,+,-,-)$. On choisi une base de $\mathbb{T}$ telle que

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & iI_2 \\ -iI_2 & 0 \end{pmatrix}$$

où $I_2 \in M_2(\mathbb{C})$ note la matrice identité. Pour $A \in M_2(\mathbb{C})$, on a

$$(A^*, I_2)\ \phi \begin{pmatrix} A \\ I_2 \end{pmatrix} = 0$$

si et seulement si A est Hermitienne. Autrement dit, la carte locale

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^4 & \longrightarrow & \mathbb{M} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_3 - x_4 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_3 + x_4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

identifie l'espace de Minkowski $M_4 = (\mathbb{R}^4, \phi)$ à un ouvert de la sous-variété compacte et complètement réelle de $\mathbb{M}$ définie par:

$$M = \{L_2 \in \mathbb{M};\ \phi(v) = 0\ \forall v \in L_2\},$$

qui est donc une compactification conforme de l'espace de Minkowski de complexifiée $\mathbb{M}$. On considère

$$\begin{aligned} F &= \{(L_1, L_2) \in \mathbb{F};\ \phi(v) = 0\ \forall v \in L_2\}, \\ P &= \{L_1 \in \mathbb{P};\ \phi(v) = 0\ \forall v \in L_1\}, \end{aligned}$$

et la double fibration induite

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ {\scriptstyle\tilde{g}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\tilde{f}} \\ P & & M \end{array} \quad \hookrightarrow \quad \begin{array}{ccc} & \mathbb{F} & \\ {\scriptstyle g}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{P} & & \mathbb{M}. \end{array}$$

On remarque avec [15] que $P \cong S^2 \times S^3$ est une hypersurface réelle de $\mathbb{P}$, et que $\tilde{g} : F \longrightarrow P$ est un fibré en cercles (i.e. localement isomorphe à $P \times S^1 \longrightarrow P$).

On note

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_M &= \mathbb{C}_M \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{M}}, \\ \mathcal{B}_M &= R\mathcal{H}om(D'_{\mathbb{M}}\mathbb{C}_M, \mathcal{O}_{\mathbb{M}}), \end{aligned}$$

les faisceaux des fonctions analytiques et des hyperfonctions de Sato sur M respectivement. Le Théorème 2.5 appliqué avec $K = \mathbb{C}_M$, $\mathcal{N} = \mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k)$, donne

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R}\Gamma(\mathbb{P}; \mathcal{P}\mathbb{C}_M \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{M}}}(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k), \mathcal{A}_M)\,[-1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{RHom}(D'\mathcal{P}\mathbb{C}_M, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{M}}}(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k), \mathcal{B}_M)\,[-1]. \end{array} \tag{4.1}$$

Comme $\tilde{g}$ est localement isomorphe à $P \times S^1 \longrightarrow P$, et que P est simplement connexe, on obtient

$$H^j\mathcal{P}\mathbb{C}_M \cong \begin{cases} \mathbb{C}_P, & \text{pour } j = 0, 1, \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Prenant alors la cohomologie de degré zéro de (4.1) on obtient sous l'hypothèse $k < 0$ le diagramme ci-dessous dans lequel les flèches horizontales sont des isomorphismes:

$$\begin{array}{ccc} H^1(P; \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{M}}}(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k), \mathcal{A}_M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2_P(\mathbb{P}; \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(k)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{M}}}(\underline{\mathcal{P}}\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(-k), \mathcal{B}_M), \end{array}$$

ce qui est le Théorème 6.1 de [16].

Références bibliographiques

[1] R. J. Baston, M. G. Eastwood, *The Penrose transform: its interaction with representation theory.* Oxford Univ. Press (1989)

[2] A. D'Agnolo, P. Schapira, *The Penrose correspondence for sheaves and $\mathcal{D}$-modules.* To appear

[3] M. G. Eastwood, *The generalized Penrose-Ward transform.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985)

[4] M. G. Eastwood, R. Penrose, R. O. Wells Jr., *Cohomology and massless fields.* Comm. Math. Phys. 78 (1981)

[5] M. Kashiwara, *B-functions and holonomic systems.* Invent. Math. 38 (1976)

[6] M. Kashiwara, *Systems of microdifferential equations* Progress in Math. 34 (1984)

[7] M. Kashiwara, T. Oshima, *Systems of differential equations with Regular Singularities and their boundary value problems*, Ann. of Math. 106 (1977) pp. 145–200.

[8] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds.* Springer Berlin Heidelberg New York 292 (1990)

[9] Yu. I. Manin, *Gauge field theory and complex geometry.* Springer Berlin Heidelberg New York 289 (1988)

[10] M. Saito, *Induced $\mathcal{D}$-modules and differential complexes.* Bull. Soc. math. France 117 (1989)

[11] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara, *Hyperfunctions and pseudo-differential equations.* In *Hyperfunctions and pseudo-differential equations.* H. Komatsu ed., Proceedings Katata 1971. Lect. Notes in Math. Springer Berlin Heidelberg New York 287 (1973)

[12] P. Schapira, *Microdifferential systems in the complex domain.* Springer Berlin Heidelberg New York 269 (1985)

[13] J.-P. Schneiders, *Un théorème de dualité relative pour les modules différentiels* C.R. Acad. Sci. Paris 303 (1986) 235–238.

[14] R. S. Ward, R. O. Wells Jr., *Twistor geometry and field theory* Cambridge monographs on mathematical physics (1990)

[15] R. O. Wells Jr., *Complex manifolds and mathematical physics.* Bulletin of the A.M.S. 1, 2 (1979)

[16] R. O. Wells Jr., *Hyperfunction solutions of the zero-rest-mass field equations* Commun. Math. Phys. 78 (1981)

P. SCHAPIRA
Université de Paris XIII
Département de Mathématiques
Av. Jean-Baptiste Clément
93430 VILLETANEUSE

A. D'AGNOLO
Université de Paris VI
Département de Mathématiques
4, place Jussieu
75251 PARIS cedex 01