Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

N. Burq

Résonances pour le problème de Dirichlet à l'extérieur d'obstacles convexes à coins en dimension 2

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. n° 17, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A17_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1992-1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

RESONANCES POUR LE PROBLEME DE DIRICHLET A L'EXTERIEUR D'OBSTACLES CONVEXES A COINS EN DIMENSION 2

N. BURQ

Exposé n° XVII

16 Février 1993

1. Introduction

Soit Θ, un compact de $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\partial\Theta$ est analytique sauf en un point $O = (0,0)$ et qu'il existe des fonctions a et b, analytiques au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ telles que localement, Θ est défini par l'équation $\Theta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R};\ b(x) \leq y \leq a(x)$. On suppose que Θ est strictement convexe, c'est à dire que partout où elle est définie, la courbure de $\partial\Theta$ est strictement positive.

Le but de cet exposé est d'étendre à ce cadre des résultats de C. Bardos, G.Lebeau et J. Rauch ([BLR]) sur les singularités Gevrey 3 et la diffusion. Plus précisément nous allons montrer que la résolvante tronquée du Laplacien avec conditions de Dirichlet, dans l'ouvert $\Omega = \Theta^c$, analytique dans $\Im m\lambda < 0$, admet un prolongement analytique sous une courbe inverse cubique. Ces résultats seront utilisés dans un travail ultérieur pour calculer les pôles dans le cas de deux obstacles.

On note $R(\lambda)$, la résolvante du Laplacien avec conditions de Dirichlet, holomorphe dans $\Im m\lambda < 0$. l'opérateur $R(\lambda)$ vérifie :

$$\begin{aligned} (\Delta + \lambda^2)R(\lambda)u &= u, \text{ dans } \Omega, \\ R(\lambda)u\,|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

pour $u \in C_0^\infty(\Omega)$ et s'étend de manière classique en un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

On note $U(t)$ le propagateur du problème suivant

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta)\,U(t)f &= 0, \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t, \\ U(t)f\,|_{t=0} &= 0, \\ \partial_t U(t)f\,|_{t=0} &= f \in C_0^\infty(\Omega), \end{aligned} \tag{1.2}$$

qu'on étend comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Soient $R_1 > R > 0$ tels que $\Theta \subset B(O,R)$. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$; $\chi \equiv 1$ au voisinage de $B(O,R)$ et $\mathrm{supp}(\chi) \subset B(O,R_1)^c$. On note $R_\chi(\lambda) = \chi R \chi$ l'opérateur défini par la relation suivante :

$$R_\chi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t}\chi U(t)\chi dt. \tag{1.3}$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Il existe $A, B > 0$ tels que la résolvante tronquée R_χ admet un prolongement analytique comme opérateur de $\mathcal{L}(L^2(\Omega); H_0^1(\Omega))$ à un domaine $U_{A,B}$ et y vérifie l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} &\exists C > 0;\ \forall \lambda \in U_{A,B}, \\ &\|R_\chi(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega);H_0^1(\Omega))} \leq C e^{C\Im m\lambda_+}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

où on a noté $\Im m\lambda_+ = sup(\Im m\lambda, 0)$.

La démonstration de ce résultat utilise deux ingrédients :

- Une stratégie de G. Popov [P], qui permet de réduire le problème à l'obtention de résultats de propagation de type Gevrey 3 en temps à valeur H^1 en espace, pour la solution de l'équation des ondes dans l'ouvert Ω

- Des résultats de P. Gérard et G. Lebeau [GL] sur la diffraction d'une onde par un coin, qui, modulo une légère modification, fournissent de telles estimations.

Nous utiliserons les notions suivantes de rayons C^∞ et C^ω (analytiques) : on prend un système de coordonnées centré sur le coin O. Soit L l'arête; $L = \{(x = 0, y = 0, t) \in \mathbb{R}^3\}$. Soit $X = \Omega \times \mathbb{R}_t$. On note $T_b^*X = T^*X \cup T^*(\partial X - L) \cup T^*L$. On a une projection naturelle :

$$p : \ T^*\mathbb{R}^3 \mid_{\overline{X}} \longrightarrow T_b^*X$$

qui définit la topologie de T_b^*X.

Un rayon C^∞ (respectivement C^ω) est, par définition une application continue,

$$\rho : \ I \longrightarrow p(car\Box \cap \{(\tau, \xi) \neq (0,0)\}),$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, telle que ρ est un rayon C^∞ (respectivement C^ω) au sens usuel près de $s \in I$ si $\rho(s) \notin T^*L$, l'ensemble $\{s;\ \rho(s) \in T^*L\}$ est discret et si $(t(s), \tau(s))$ sont les coordonnées (t, τ) de $\rho(s)$, on a $\tau(s) = \tau_0 \neq 0$ et $t(s) = t - 2\tau_0 s$.

2. Démonstration du théorème

2.1. Réduction du problème à un résultat de propagation des singularités dans un coin

On note $U_0(t)$ le propagateur du problème suivant :

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta)\, U_0(t) f &= 0, \text{ dans } \mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t, \\ U_0(t) f \mid_{t=0} &= 0, \\ \partial_t U_0(t) f \mid_{t=0} &= f \in C_0^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

qu'on étend comme opérateur de $L^2(\mathbb{R}_x^2)$ dans $H_0^1(\mathbb{R}_x^2)$.

On note $G^3(\mathbb{R}^n)$ la classe des fonctions Gevrey 3, c'est à dire vérifiant l'estimation suivante :

$$\forall K \subset\subset \mathbb{R}^n \ \exists C > 0;\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ \forall x \in K \ \mid \partial_x^\alpha f(x) \mid \leq C^{|\alpha|+1}(3\alpha!)$$

Soit $T = 2R_1$ le temps maximum nécessaire à tout rayon parcouru à vitesse 1, issu du support de χ, pour en sortir.

Soit $\zeta \in G^3(\mathbb{R}^{2+1})$ telle que :

- $\zeta \equiv 1$ dans $\{|\ |x| - t\ | < T\}$
- $\zeta \equiv 0$ dans $\{|\ |x| - t\ | > T + 1\}$

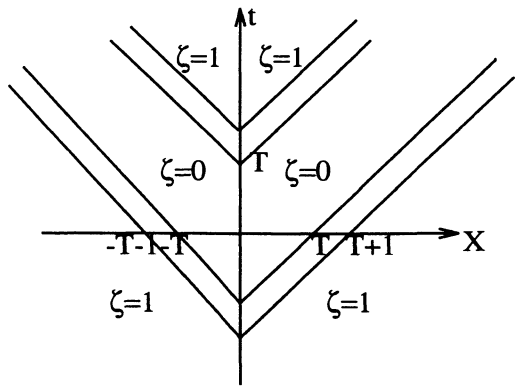

figure 1

Soient $U_\chi(t) = \chi U(t)\chi$ et $E(t) = \zeta U(t)\chi$. On note, pour $\Im m\lambda < 0$,

$$\chi\hat{E}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t}\chi E(t)dt. \tag{2.2}$$

Comme $\chi E(t)$ est à support compact en temps (car $\chi\zeta$ l'est), $\chi\hat{E}(\lambda)$ admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}$, comme fonction à valeur $\mathcal{L}(L^2(\Omega); H_0^1(\Omega))$ et a une estimation du type (1.4).

On pose

$$F(t) = \left[\partial_t^2 - \Delta, \zeta\right] U(t)\chi. \tag{2.3}$$

L'opérateur $E(t)$ est alors le propagateur du problème :

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta)E(t)f &= F(t)f, \text{dans } \Omega \times \mathbf{R}_t, \\ E(t)f\,|_{\partial\Omega} &= 0, \\ E(t)f\,|_{t=0} &= 0, \\ \partial_t E(t)f\,|_{t=0} &= \chi f. \end{aligned} \tag{2.4}$$

THÉORÈME 2. — *L'opérateur $F(t)$ est Gevrey 3 en temps à valeurs $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$.*

Nous admettons dans un premier temps ce résultat ; nous allons en déduire le théorème 1 en suivant la méthode de Popov [P].

On note $\tilde{F}(t)$ le prolongement par 0 de F comme opérateur $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$. Soit $W(t)$ le propagateur du problème

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta)W(t)f &= \tilde{F}(t)f \text{ dans } \mathbf{R}_x^2 \times \mathbf{R}_t, \\ W(0)f = \partial_t W(0)f &= 0,\ f \in L^2(\mathbf{R}^2); \end{aligned} \tag{2.5}$$

c'est à dire

$$W(t) = \int_0^t U_0(t-s)\tilde{F}(s)ds. \tag{2.6}$$

Soit $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\Psi \equiv 0$ au voisinage de $B(0,R)$ et telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage du support de $(1-\Psi)$. Soit

$$
\begin{aligned}
Q(t) &\stackrel{def}{=} (\partial_t^2 - \Delta)[E(t)f - \Psi W(t)f] \\
&= (1-\Psi)F(t)f + [\Delta, \Psi]W(t)f
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

On a alors, comme $Q(t)f\,|_{\partial\Omega} = 0$,

$$
E(t)f - \Psi W(t)f = U(t)\chi f + \int_0^t U(t-s)\chi Q(s)ds f \tag{2.8}
$$

car $\chi Q(t) = Q(t)$. On en déduit que pour $\Im mk < 0$, on a

$$
\chi \hat{E}(k)f = R_\chi(k)f + R_\chi(k)\hat{Q}(k)f + \Psi\chi\widehat{W}(k). \tag{2.9}
$$

En suivant la méthode de Popov ([P]), on peut alors montrer que $\hat{Q}(k)$ et $\widehat{W}(k)$ admettent des prolongements analytiques à $\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}^+$ comme opérateurs $\mathcal{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega))$ et $\mathcal{L}(L^2(\Omega); H_0^1(\Omega))$ respectivement, ont dans ces espaces des estimations du type (1.4) et que l'opérateur $Id + \hat{Q}(k)$ est inversible comme opérateur $\mathcal{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega))$ dans on ouvert $U_{A,B}$ et y est uniformément borné; ce qui prouve le théorème 1.

2.2. Démonstration du théorème 2

On a

$$
\begin{aligned}
F(t) &= [\partial_t^2 - \Delta_x, \zeta]\, U(t)\chi, \\
&= ((\partial_t^2 - \Delta_x)\,\zeta + 2\partial_t\zeta\partial_t - 2\nabla\zeta\nabla)\, U(t)\chi.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

On rappelle les propriétés vérifiées par les troncatures ζ et χ : on a $\Theta \subset\subset B(0,R)$, $T = 2R_1 > R_1 > R$ et

$$
\begin{aligned}
\chi &= 1 \quad \text{sur } B(0,R), \\
\chi &= 0 \quad \text{sur } B(0,R_1)^c, \\
\zeta &\in G^3(\mathbb{R}^{2+1}), \\
\zeta &= 1 \quad \text{sur } \{||x|-t| < T\}, \\
\zeta &= 0 \quad \text{sur } \{||x|-t| > T+1\}.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

On pose $\eta = \operatorname{dist}(B(0,R_1)^c, \operatorname{supp}(\chi))$.

LEMME 2.1. — *Pour tout point $x_0 \in \overline{\Omega} \cap \operatorname{supp}(\chi)$, il existe $\epsilon > 0$, $V(x_0)$, un voisinage de x_0, un temps t_0, supérieur au temps mis par tous les rayons issus de V pour rencontrer le point O, tels qu'aucun rayon analytique issu de V ne rencontre le coin O entre les instants $t_0 - \epsilon$ et $t_0 + \epsilon$.*

Démonstration. — On distingue deux cas :

i) Le segment $[x_0, O]$ rencontre Θ en un point distinct de O; le temps $t_0 = 0$ convient alors, par vitesse finie de propagation.

ii) Le segment $[x_0, O]$ ne rencontre Θ qu'en O. On note alors $S = [x_0, O]$. Si V est assez petit, tous les rayons C^∞ issus de V qui rencontrent O sont proches de S. On note t_1 la longueur de S et t_2 la longueur du plus petit rayon, γ, analytique, non C^∞, issu de x_0, qui rencontre le point O. Si V est assez petit, les rayons issus de V qui rencontrent le point O ont des longueurs proches de $t_1 + n \times \text{longueur}(\partial\Theta)$; $n \in \mathbb{N}$ ou de $t_2 + n \times \text{longueur}(\partial\Theta)$; $n \in \mathbb{N}$. Comme $t_2 > t_1$, il suffit de prendre $t_0 \in]t_1, t_2[$, ϵ assez petit et V assez petit.

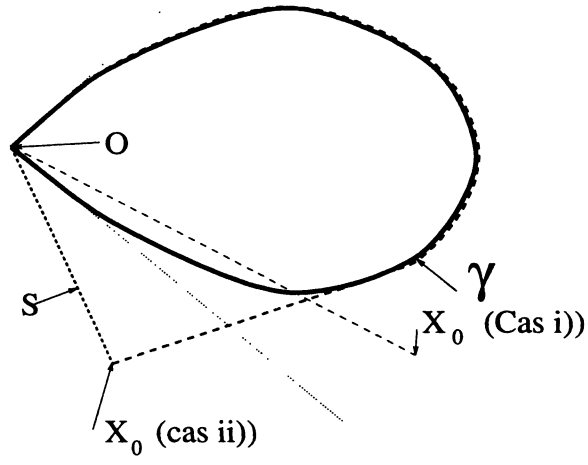

figure2

En adaptant les méthodes de P. Gérard et G. Lebeau, on démontre la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. — *Soit $u \in H^1_{loc}(\overline{\Omega})$, solution de $(\partial_t^2 - \Delta_x)u = 0$ dans $\Omega \times \mathbb{R}_t$, $u\,|_{\partial\Omega} = 0$. Si u ne possède aucune singularité analytique arrivant de $t < t_0$ sur le point O à l'instant t_0, alors u est analytique en temps à valeurs $H^1_0(\Omega)$ au voisinage de (t_0, O).*

Supposons maintenant que u possède une singularité analytique arrivant de $t < t_0'$ au point O, avec $t_0' \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. On peut alors propager cette singularité dans le passé tant qu'on ne rencontre pas le point O de nouveau. Si on le rencontre à un instant t_0'', on sait alors qu'il n'existe aucun voisinage de (O, t_0'') où u est analytique en temps à valeurs H^1 (car hors du coin, comme $(\partial_t^2 - \Delta_x)u = 0$ et $u\,|_{\partial\Omega} = 0$, analytique en temps à valeurs H^1 est équivalent à analytique). D'après la proposition 2.2, u possède alors une singularité analytique arrivant de $t < t_0''$ au point O à l'instant t_0''. En réitérant ce processus jusqu'à l'instant $t = 0$ et en utilisant le lemme 2.1, on en déduit qu'il existe un voisinage V de $O \times [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ tel que u est analytique

en temps à valeurs H^1 dans V. On supposera par la suite que V est de la forme $V = \Omega \cap B(O,\eta)$.

LEMME 2.3. — *Si η est assez petit et si $u \in G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O,\eta)))$ au voisinage de $t = 0$, alors $u \in G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O,\eta/6)))$ au voisinage de $t = \eta/3$.*

Démonstration. — Soit $\Psi \in G^3(\mathbb{R}_t)$ telle que $\Psi \equiv 0$ pour $t < -\eta/4$, $\Psi \equiv 1$ pour $t > \eta/4$ et telle que $u \in G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O,\eta)))$ sur le support de Ψ. Soit $\chi \in G^3(\mathbb{R}^2)$ tel que $\mathrm{supp}(\chi) \subset B(O,\eta)$ et $\chi \equiv 1$ sur $B(O, \frac{3\eta}{4})$. La fonction Ψu est alors solution de l'équation

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta_x)\Psi u &= \Psi'' u + 2\Psi' \partial_t u, \\ \Psi u \,|_{t<-\eta/4} &\equiv 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Soient v et w solutions des équations

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta_x)v &= \Psi''\chi v + 2\Psi' \partial_t \chi v, \\ v \,|_{t<-\eta/4} &\equiv 0, \\ v \,|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta_x)w &= \Psi''(1-\chi)v + 2\Psi' \partial_t (1-\chi) w, \\ w \mid t < -\eta/4 &\equiv 0, \\ w \,|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

D'après la conservation de la norme H^1, $v \in G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega))$ et par vitesse finie de propagation, pour t proche de $\eta/3$, w est identiquement nulle dans $B(O, 3\eta/4 - (\eta/3 - \eta/4)) = B(O,\eta/6)$.

On choisit maintenant $\eta > 0$ assez petit vérifiant le lemme 2.3 et tel que tout rayon C^∞ qui quitte $B(O,\eta)$ ne rencontre plus jamais cette boule (c'est possible car Θ_2 est convexe). On suppose également $2\eta < \epsilon$ où ϵ est donné par le lemme 2.1.

LEMME 2.4. — *On note $T = \sup\{t > t_0;\ u \in G^3([t_0 - \epsilon; t]; H^1(\Omega \cap B(O,\eta)))\}$. Nous avons montré que $T \geq \epsilon + t_0$. On a en fait $T = +\infty$.*

Démonstration. — Nous raisonnons par l'absurde. Supposons en effet que $T < +\infty$. Alors, $u \notin G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O,\eta)))$ au voisinage de T. Si de plus $u \notin G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O,\eta/6)))$ au voisinage de T, d'après la contraposée du lemme 2.3, $u \notin G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O,\eta)))$ au voisinage de $T - \eta/3 > t_0 - \epsilon$, ce qui est absurde. On peut donc supposer que $u \notin G^3\left(\mathbb{R}_t; H^1\left(\Omega \cap \left(B(O,\eta) \setminus \overline{B(O,\eta/6)}\right)\right)\right)$ au voisinage de T. Il existe donc un point $(t = T, \tau, x, \xi) \in T_b^* X$ tel que $x \in B(O,\eta) \setminus \overline{B(O,\eta/6)}$ et u n'est pas microlocalement Gevrey 3 en $(t = T, \tau, x, \xi)$. On peut alors propager sur un rayon C^∞ cette singularité dans le passé tant qu'on ne rencontre pas le coin. Comme $T \geq t_0 + \epsilon$, on le rencontre nécessairement avant $t = 0$ et comme de plus on part d'un point $x \in B(O,\eta)$, on ne quitte pas cette boule. On rencontre donc le coin avant l'instant $T - \eta$. Il existe donc $\rho = (t, \tau, x, \xi) \in T^*X$ tel que $T - \eta \leq t \leq T$, $x \in B(O,\eta/6) \setminus \{O\}$ et u n'est pas microlocalement Gevrey

3 en ρ. Comme $(\partial_t^2 - \Delta)u = 0$, $u\,|_{\partial\Omega} = 0$ et comme $x \neq O$, on en déduit que $u \notin G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O, \eta/6)))$ au voisinage de t, et on conclut comme précédemment ce qui termine la démonstration du lemme 2.4.

En utilisant le théorème de propagation des singularités Gevrey 3 de G. Lebeau [Le], on déduit du lemme 2.4 que pour tout $S > 0$ on a

$$u \in G^3([t_0 - \epsilon + S; +\infty[; H_0^1(\Omega \cap B(O, S))) \tag{2.15}$$

Finalement, en utilisant une partition de l'unité et en remarquant que pour $x_0 \in B(O, R_1)$, le temps t_0 associé par le lemme 2.1 est inférieur à R_1, on déduit de (2.15)

$$\forall u_0 \in L^2(\Omega),\ U(t)\chi u_0 \in G^3([R_1 + S, +\infty[; H_0^1(\Omega \cap B(O, S))) \tag{2.16}$$

La fonction ζ n'est pas constante pour $t \geq 0$ sur deux zones seulement

i) $T + t \leq |x| \leq T + t + 1$

ii) $t - T - 1 \leq |x| \leq t - T$

On sait par vitesse finie de propagation que $U(t)\chi u_0$ est identiquement nulle sur la première zone et dans la deuxième zone, on peut utiliser (2.16) avec $|x| = S$; on a donc

$$F(t)u_0 \in G^3(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)) \tag{2.17}$$

Un argument de [L] permet alors de déduire de (2.17) le théorème 1.

Références

[BLR] C.Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, *Scattering frequencies and Gevrey 3 singularities*, Inventiones mathematicae **90** (1987), 77–104.

[GL] P. Gérard, G.Lebeau, *Diffusion d'une onde par un coin*, Prépublications de l'Université d'Orsay **64** (1991).

[L] P.D. Lax, *Asymptotic solutions of initial value problems*, Duke Math. J. **24** (1957), 627–646.

[Le] G. Lebeau, *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction*, Comm. Partial Differ. Equations **9** (1984), 1437–1494.

[P] G. Popov, *Some estimates of Green's functions in the shadow*, Osaka J. Math **24** (1987), 1–12.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex
France