SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

SYLVIA DOBYINSKY
YVES MEYER

Lemme div-curl et renormalisation

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1991-1992), exp. nº 2, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A2_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1991-1992

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

LEMME DIV-CURL ET RENORMALISATION

Sylvia DOBYINSKY et Yves MEYER

Exposé n° I I

22 Octobre 1991

1. Introduction.

L'énoncé suivant est dû à P.L. Lions et est démontré dans [ ]

Théorème 1.— *Soient* $E(x) = (E_1(x), \cdots, E_n(x)), B(x) = (B_1(x), \cdots, B_n(x))$ *deux champs de vecteurs vérifiant les propriétés suivantes*

(1.1) $E_j(x) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ *pour* $1 \leq j \leq n$

(1.2) $B_j(x) \in L^q(\mathbf{R}^n)$ *pour* $1 \leq j \leq n$

(1.3) $1 < p < \infty \ , \ 1/p + 1/q = 1$

(1.4) div $E(x) = 0$, *au sens des distributions*

(1.5) rot $B(x) = 0$, *au sens des distributions.*

Alors le produit scalaire $E(x).B(x)$ *appartient à l'espace* $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)$ *de Stein et Weiss.*

Nous nous proposons de donner une nouvelle démonstration de ce résultat. Cette nouvelle démonstration est basée sur l'opération de **renormalisation du produit**.

Pour simplifier l'exposition, nous commencerons par supposer que $u(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions scalaires, appartenant respectivement à $L^p(\mathbf{R}^n)$ et à $L^q(\mathbf{R}^n)$. On notera uv le produit ponctuel usuel entre ces fonctions. Un **opérateur de renormalisation** R est un **opérateur bilinéaire et symétrique** $R : L^p \times L^q \to \mathcal{H}^1$ tel que l'on ait, pour tout couple $(u, v) \in L^p \times L^q$,

$$uv = P(u, v) + R(u, v) \tag{1.6}$$

où $P(u, v)$ est **le plus petit possible**, au sens que $v \mapsto P(u, v)$ est un opérateur compact dès que u appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

En d'autres termes, le produit entre une fonction régulière et une fonction de $L^q(\mathbf{R}^n)$ n'a pas besoin d'être renormalisé et $P(u, v)$ est donc "négligeable" si $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

L'opérateur bilinéaire de renormalisation $R(u, v)$ possèdera d'autres propriétés intéressantes. Désignons par u_j et v_j , $j \geq 1$, deux suites respectivement bornées dans L^p et L^q et supposons que $u_j \rightharpoonup u$, $v_j \rightharpoonup v (j \to +\infty)$ où $\rightharpoonup$ désigne la convergence au sens des distributions. Alors on aura $R(u_j, v_j) \rightharpoonup R(u, v)$ $(j \to +\infty)$. Enfin le terme $R(u, v)$ aura un sens dans des situations où ni uv, ni $P(u, v)$ n'ont de signification. Si, par exemple, $u \in L^p, v \in L^q$ mais cette fois $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} > 1$, on aura cependant $R(u, v) \in \mathcal{H}^r$ (qui est maintenant un espace de distributions puisque $0 < r < 1$). La définition de l'espace $\mathcal{H}^r$ de Stein et Weiss se trouve dans [4].

L'opération de renormalisation consiste donc, dans ce dernier cas, à soustraire du produit uv une partie infinie $P(u, v)$ de façon à obtenir le produit renormalisé oscillant $R(u, v)$. On voit l'analogie avec les parties finies de Hademard.

2. La construction de l'opérateur R.

Tous les opérateurs bilinéaires T que nous allons construire ressembleront au produit ponctuel usuel au sens suivant. On demande que si τ_x est l'opérateur de translation par $x \in \mathbf{R}^n$, on ait

$$T(f,g) = h \Longrightarrow T(\tau_x f, \tau_x g) = \tau_x h \ . \tag{2.1}$$

Alors $T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \mapsto \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ est donné par

$$T(f,g)(x) = (2\pi)^{-2n} \int\int e^{i(\xi+\eta).x} \tau(\xi,\eta) \hat{f}(\xi) \hat{g}(\eta) d\xi d\eta \ . \tag{2.2}$$

Nous supposerons dans tout ce quit suit que $\tau(\xi,\eta) \in L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ et cette condition est nécessaire si l'on veut que T se prolonge en un opérateur linéaire continu de $L^2 \times L^2$ à valeurs dans L^1. Cette condition n'est évidemment pas suffisante, comme le montre le contre-exemple $\tau(\xi,\eta) = m(\xi+\eta)$ où $m(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|}$. La fonction τ sera appelée le symbole de T et nous supposerons une fois pour toutes que

$$\tau(\xi,\eta) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \{0,0\}) \tag{2.3}$$

et

$$\tau(\lambda\xi, \lambda\eta) = \tau(\xi,\eta) \quad \text{pour tout} \quad \lambda > 0 \ . \tag{2.4}$$

Alors on montre [1] que T est borné de $L^2 \times L^2$ dans L^1. On aura besoin des deux énoncés précisant cette remarque

Lemme 1.— *Si outre (2.3) et (2.4), nous supposons $\tau(\xi,-\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n, \xi \neq 0$, alors T est borné de $L^p \times L^q$ dans $\mathcal{H}^1$ si $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$.*

Lemme 2.— *Si les hypothèses du lemme 1 sont satisfaites et si l'on a, en outre, $\tau(\xi,0) = 0$ pour tout $\xi \neq 0$ et $\tau(0,\eta) = 0$ pour tout $\eta \neq 0$, alors T est borné de $L^p \times L^q$ dans l'espace de Besov homogène $\dot{B}_1^{0,1}(\mathbf{R}^n)$.*

Une dernière observation essentielle est le fait que (2.1) implique la formule de Leibniz. A savoir, si $\partial_j = \partial/\partial x_j$,

$$\partial_j T(f,g) = T(\partial_j f, g) + T(f, \partial_j g) \ . \tag{2.5}$$

Pour clore cette section, indiquons la définition de P et R (opérateurs de renormalisation).

L'opérateur bilinéaire P est construit à l'aide d'un symbole $\pi(\xi,\eta)$, vérifiant (2.3) et (2.4) et tel que

$$\pi(\xi,\eta) = 1 \quad \text{si} \quad |\xi+\eta| \leq \frac{1}{10}(|\xi| + |\eta|) \tag{2.6}$$

$$\pi(\xi,\eta) = 0 \quad \text{si} \quad |\xi+\eta| \geq \frac{1}{5}(|\xi|+|\eta|) \tag{2.7}$$

Il est clair qu'il est possible de construire une telle fonction π car sur la sphère unité de $\mathbf{R}^{2n}$, les compacts définis par $|\xi+\eta| \leq \frac{1}{10}(|\xi|+|\eta|)$ et $|\xi+\eta| \geq \frac{1}{5}(|\xi|+|\eta|)$ sont disjoints. On demandera également que $\pi(\xi,\eta) = \pi(\eta,\xi)$. Alors R est défini par un symbole bilinéaire $\rho(\xi,\eta)$ et l'on a $\rho = 1-\pi$. Donc $\rho(\xi,-\xi) = 0$ si $\xi \neq 0$ si $\xi \neq 0$ et R est borné de $L^p \times L^q$ dans $\mathcal{H}^1$ si $1 < p < \infty$, $1/p+1/q = 1$. Par ailleurs, changer le choix de π revient à ajouter à ρ un symbole vérifiant les conditions du lemme 2. C'est à dire que le résultat $R(f,g)$ sera le même, modulo une fonction de $\dot{B}_1^{0,1}$.

Si l'on raisonne modulo $\dot{B}_1^{0,1}$, tous les opérateurs de renormalisation que nous venons de construire sont équivalents.

3. La preuve du lemme du div-curl.

On écrit chaque produit ponctuel E_jB_j sous la forme

$$E_jB_j = P(E_j,B_j) + R(E_j,B_j) \tag{3.1}$$

et l'on sait déjà que chaque terme $R(E_j,B_j)$ appartient à $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^n)$.

Il suffit donc de démontrer que $P(E_1,B_1)+\cdots+P(E_n,B_n) \in \mathcal{H}^1$. Or on a mieux, à savoir

$$P(E_1,B_1)+\cdots+P(E_n,B_n) = \sigma(x) \in \dot{B}_1^{0,1} \; . \tag{3.2}$$

Pour le démontrer, on observe que $B_1 = \partial_1 V, \cdots, B_n = \partial_n V$ où V vérifie $\Lambda V \in L^q$ lorsque $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$ (opérateur de Calderón).

Alors $\sigma(x) = \partial_1 P(E_1,V)+\cdots,\partial_n P(E_n,V)$ comme on le voit en appliquant la règle de Leibniz et en utilisant le fait que div $E = 0$.

Finalement le lemme 2 s'applique à chacun des opérateurs bilinéaires $T_j(u,v) = \partial_j P(u_j,V)$, $v = \Lambda V$. En effet, le symbole de T_j est $i(\xi_j+\eta_j)|\eta|^{-1}\pi(\xi,\eta) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \{0,0\})$. Ce symbole vérifie évidemment les hypothèses du lemme 2.

4. Liens avec le paraproduit de J.M. Bony.

En revenant à (1.6), il est facile de vérifier que $R(u,v)$ est, modulo une fonction de $\dot{B}_1^{0,1}$ la somme du paraproduit de u par v et du paraproduit de v par u. On sait que l'opérateur bilinéaire définissant le paraproduit se prolonge au cas où u et v sont deux distributions tempérées. Ici nous avons privilégié la situation homogène où les fréquences tendant vers 0 sont traitées avec le même soin que les fréquences tendant vers l'infini ("infrared cutoff and ultraviolet cutoff").

Références

[1] R. Coifman et Y. Meyer "Au delà..." Astérisque 57, SMF (1978)

[2] R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer and S. Semmes, Compensated compactness and Hardy spaces, à paraître au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées

[3] S. Dobyinsky, Thèse, CEREMADE (1992)

[4] Ch. Fefferman and E. Stein, Acta Math. **129** (1972), 137-193.

CEREMADE

Université Paris-Dauphine

Place du Mal de Lattre de Tassigny

75775 Paris cedex 16