Eric Leichtnam

Le problème de Cauchy ramifié I

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. n° 10, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990____A12_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LE PROBLEME DE CAUCHY RAMIFIE I

Eric LEICHTNAM

Exposé n°X

20 Février 1990

§0. Introduction

Ce texte a pour objet l'étude du problème de Cauchy ramifié linéaire non caractéristique pour les opérateurs analytiques à caractéristiques multiples de multiplicité constante. Les résultats de ce texte sont démontrés dans un article [6] accepté pour publication aux Annales Scientifiques de l'E.N.S..

Soit $a(x, D)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre m à coefficients fonctions holomorphes de $x = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$ décrivant un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^{n+1}$ tel que l'hyperplan S d'équation $x^0 = 0$ soit non caractéristique pour $a(x, D)$. Soit T l'hypersurface de S d'équation $x^0 = x^1 = 0$. Soient $a_m(x, \xi)$ le symbole principal de $a(x, D)$ et :

$$(*) \qquad a_m(x,\xi) = \prod_s a_{m,s}(x,\xi)^{m_s}$$

sa décomposition en facteurs irréductibles. Notons d le degré du polynôme réduit

$$b(x,\xi) = \prod_s a_{m,s}(x,\xi)$$

et supposons que l'équation en $\xi_0 \in \mathbf{C}$

$$b(0; \xi_0, 1, 0, \ldots, 0) = 0$$

admet d racines distinctes. On sait alors construire (voir [5]) d hypersurfaces caractéristiques distinctes $K_i = \{x; k^i(x) = 0\}$ issues de T.

Soient U un voisinage ouvert de $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ (sur lequel les coefficients de $a(x, D)$ sont holomorphes) et x_0 un point de $U \cap (S \setminus T)$. Soient v (resp. $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$) un germe en x_0 de fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^{n+1}$ (resp. $\mathbf{C}^n$) tel que v (resp. chaque u_j) se prolonge holomorphiquement le long de tout chemin d'origine x_0 tracé dans $U \setminus (\bigcup_{j=1}^{d} K_j)$ (resp. $\cap(S \setminus T)$). Choisissons Δ un voisinage ouvert de x_0 dans $U \setminus (\bigcup_{j=1}^{d} K_j)$ connexe et simplement connexe ainsi que son intersection avec S tel que l'origine 0 appartienne à $\overline{S \cap \Delta}$. Alors v (resp. les u_j) se prolongent en fonctions uniformes sur Δ (resp. $\Delta \cap S$).

Résoudre le problème de Cauchy ramifié

$$(0.1) \qquad \begin{aligned} &a(x,D)\,u(x) = v(x) \\ &D_{x^0}^h\,u(x)\,|_S = u_h(x') \qquad 0 \le h < m \end{aligned}$$

c'est par définition trouver un voisinage ouvert Ω de 0 contenu dans U et une fonction u holomorphe sur $\Omega \cap \Delta$ vérifiant $a(x, D)u = v$ sur $\Omega \cap \Delta$ et $D_{x^0}^h u \,|_{S\cap\Delta} = u_h$, $0 \le h \le m-1$, et admettant un prolongement holomorphe le long de tout chemin issu de $\Omega \cap \Delta \cap S$ tracé dans $\Omega \setminus (\bigcup_{j=1}^{d} K_j)$.

Dans la suite de cet article, on commettra fréquemment l'abus de notation qui consiste à désigner par les mêmes lettres les déterminations et leur prolongement ramifié sur le revêtement universel de $\Omega \setminus (\bigcup_{j=1}^{d} K_j)$.

Le résultat principal de cet article est le :

Théorème 0.1.— *Soient U un voisinage ouvert de $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ et v une fonction holomorphe quelconque sur le revêtement universel de U privé de la réunion des hypersurfaces caractéristiques $k^i(x) = 0$ $(1 \leq i \leq d)$. Alors il existe un voisinage ouvert Ω de 0 inclus dans U et une solution du problème (0.1) holomorphe sur le revêtement universel de Ω privé de la réunion des hypersurfaces $k^i(x) = 0$ $(1 \leq i \leq d)$. En outre on peut énoncer les résultats suivants. Si toutes les données v et u_h $(0 \leq h \leq m-1)$ sont de détermination finie alors la solution est de détermination finie. Si $a(x, D)$ est à caractéristiques simples (i.e. les entiers m_s dans (*) sont tous égaux à 1) et si toutes les données sont dans la classe de Nilsson relativement à la réunion des hypersurfaces caractéristiques, alors la solution est dans la classe de Nilsson.*

Note : Ω ne dépend que de U, de $a(x, D)$ et de S.

Remarques 0.2.
1°) Le théorème 0.1 est tout-à-fait conforme au principe fondamental énoncé par Leray : les singularités de la solution du problème de Cauchy ramifié sont déterminées par les singularités des données.

2°) Soient $s_1, \ldots, s_p$ des hypersurfaces analytiques transverses à S issues de T, deux à deux transverses et non caractéristiques (pour $a(x, D)$) en chacun de leurs points. Si le second membre du problème (0.1) est ramifié autour de la réunion des s_j $(1 \leq j \leq p)$ et des hypersurfaces caractéristiques, alors il existe une unique solution ramifiée autour de la réunion des s_j et des hypersurfaces caractéristiques , et tous les résultats du théorème 0.1 sont encore valables dans cette situation. En effet, on introduit des champs de vecteurs holomorphes sans zéros X_j $(1 \leq j \leq p)$ transverses à S tels que s_j est caractéristique pour X_j $(1 \leq j \leq p)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème (0.1) au problème de Cauchy obtenu en remplaçant $a(x, D)$ par $X_1 \circ \ldots \circ X_p \circ a(x, D)$ et en rajoutant les traces convenables. Ce qui précède est la réponse à une question posée par Pierre Schapira.

Dans le cas particulier où le second membre du problème (0.1) est de la forme $\sum_{i=1}^{d} v^i(\log k^i(x), x)$ où $(t, x) \mapsto v^i(t, x)$ $(1 \leq j \leq d)$ appartient à l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\omega \times \Omega)$ des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}_\omega \times \Omega$, $\mathcal{R}_\omega$ désignant le revêtement universel du disque de $\mathbf{C}$ $\dot{D}_\omega$ ouvert pointé de centre 0 et de rayon $\omega > 0$; le théorème (0.1) est prouvé dans [5], la solution est de la forme $\sum_{i=1}^{d} v^i(\log k^i(x), x)$ où $h^i \in \mathcal{H}(\mathcal{R}_{\omega'} \times \Omega')$ $(1 \leq j \leq d)$, elle est construite explicitement en fonction des données. La clause relative à l'unicité dans notre théorème 0.1 est donc un résultat de [5]. Dans la suite, nous supposerons $d \geq 2$.

Pour donner une meilleure idée de la structure des fonctions holomorphes ramifiées autour de la réunion des hypersurfaces caractéristiques nous allons calculer le groupe fondamental π_1 (pointé en x_0) de $\Omega' \setminus (\bigcup_{j=1}^{d} K_j)$, dans le cas particulier, mais significatif, où toutes les hypersurfaces caractéristiques sont des hyperplans.

Lemme 0.3.— *Soit Ω' un polydisque ouvert de centre $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$. Supposons que les K_j $(1 \leq j \leq d)$ soient des hyperplans. Alors le groupe fondamental π_1 de $\Omega' \setminus (\bigcup_{j=1}^{d} K_j)$ est égal à :*

$$\mathbf{Z} \times \underbrace{(\mathbf{Z} * \ldots * \mathbf{Z})}_{d-1 \quad \text{fois}}$$

et son groupe d'homologie H_1 à coefficients dans $\mathbf{Z}$ est égal à $\mathbf{Z}^d$.

Preuve. On sait (voir [3]) que le H_1 est le quotient du π_1 par son groupe des commutateurs, donc la seconde assertion découle de la première. Il existe un changement linéaire de coordonnées permettant d'écrire $x^0 = k^1(x)$, $x^1 = k^2(x)$, $k^i(x) = \lambda_i x^0 + x^1$ $(2 \leq i \leq d)$ où les nombres complexes λ_i sont non nuls et deux à deux distincts. Par abus, nous noterons K_i les droites de $\mathbf{C}^2 = \{(x^0, x^1)\}$ définies par les équations $k^i(x) = 0$. Un argument d'homogénéité montre que le groupe fondamental de Ω' privé de la réunion des hypersurfaces caractéristiques coïncide avec le groupe fondamental de $\mathbf{C}^2 \setminus (\bigcup_{j=1}^{d} K_j)$.

L'application suivante :

$$\mathbf{C}^2 \setminus (\bigcup_{j=1}^{d} K_j) \to \mathbf{C} \times \mathbf{C} \setminus \{0, -\lambda_2, -\lambda_3, \ldots, -\lambda_d\}$$

$$(x^0, x^1) \mapsto (x^0, \frac{x^1}{x^0})$$

définit un difféomorphisme. On obtient alors immédiatement le résultat.

Dans cet article, nous ne supposons pas que les K_i sont des hyperplans. Dans le cas $d \geq 3$, le π_1 du lemme 0.3 n'est pas commutatif. Cela nous conduit à donner la définition générale suivante :

Définition 0.4.— *Soient Ω' un voisinage ouvert de $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$, $x_0 \in S \cap \Omega'$, et u un germe holomorphe en x_0 prolongeable le long de tout chemin de $\Omega' \setminus (\bigcup_{j=1}^{d} K_j)$. On dit que u est à monodromie abélienne si u est invariant sous l'action du sous-groupe D des commutateurs du groupe fondamental de $\Omega' \setminus (\bigcup_{j=1}^{d} K_j)$. D'après la théorie des revêtements, il est équivalent de dire que u permet de définir une fonction holomorphe sur le revêtement associé à D.*

Nous montrerons dans [6] en construisant des contre-exemples que si le second membre du problème (0.1) est à monodromie abélienne, alors en général la solution ne sera pas à monodromie abélienne, toutefois le théorème suivant (prouvé dans [6]) indique que la monodromie de la solution est - en un certain sens - proche d'une monodromie abélienne.

Théorème 0.5.— *Supposons que le second membre v du problème (0.1) soit à monodromie abélienne, et reprenons les notations du théorème 0.1. Alors le groupe des commutateurs (voir Déf. 0.4) définit une représentation unipotente d'ordre ≤ 2 du $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré par les déterminations (en un point fixé) de la solution u du problème (0.1). Si cette représentation est diagonalisable, alors u est à monodromie abélienne.*

Le théorème suivant est démontré dans [6], c'est la réponse à une question posée par Jean-Pierre Labesse et Gilles Lebeau.

Théorème 0.6.— *Supposons que toutes les données du problème (0.1) sont de détermination finie. Si la monodromie de v est résoluble [resp. la monodromie de toutes les données est unipotente], alors la monodromie de la solution est résoluble [resp. unipotente].*

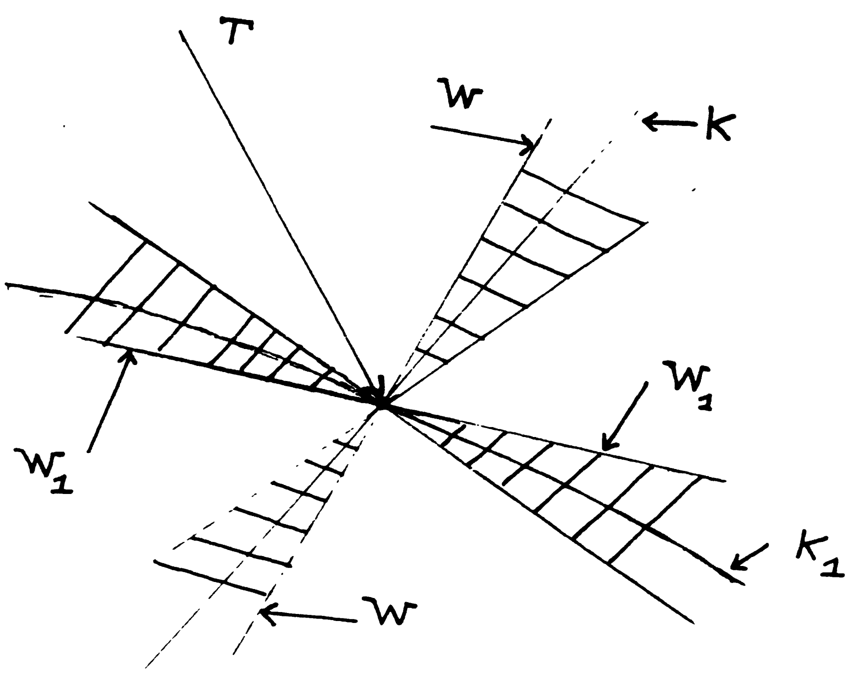
Lorsque $d = 2$, la réunion des deux hypersurfaces caractéristiques définit un diviseur à croisement normal ; dans cette situation, on vérifie que si v est une fonction holomorphe ramifiée autour de la réunion des deux hypersurfaces caractéristiques , alors il existe $\omega > 0$, un voisinage ouvert Ω de $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ et une fonction $g(t_1, t_2, x)$ holomorphe sur $\mathcal{R}^2_\omega \times \Omega$ tels que : $\forall x \in \Omega \ |k^i(x)| < \omega \ \ 1 \leq i \leq 2$ et le prolongement ramifié de v le long de tout chemin de $\Omega \setminus \cup K_j$ coïncide avec :

$$g(\text{Log } k^1(x), \log k^2(x), x)\,. \tag{0.2}$$

Lorsque $d \geq 3$, il semble qu'il n'existe pas (en général) de représentation - analogue à la formule (0.2) - des fonctions holomorphes ramifiées autour de la réunion des hypersurfaces caractéristiques . Pour contourner cette difficulté Lê Dung Trang m'a suggéré de désingulariser suivant le lieu des hypersurfaces caractéristiques en introduisant des voisinages effilés. Cette suggestion a été le point de départ de ce travail ; j'ai donc plaisir à remercier ici Lê Dung Trang.

Maintenant nous allons décrire la stratégie de la preuve du théorème 0.1. Dans la section §2 nous définissons les voisinages effilés d'hypersurfaces caractéristiques ou non caractéristiques issues de T. On donne une expression explicite du revêtement universel d'un voisinage effilé, ceci nous permet d'obtenir dans la proposition 2.5 une représentation -analogue à la formule (0.2) - des fonctions holomorphes ramifiées dans un voisinage effilé d'une hypersurface caractéristique .

Sur le dessin ci-dessous W_1 [resp. W] représente un voisinage effilé de l'hypersurface caractéristique K_1 [resp. d'une hypersurface K non caractéristique issue de T].



Dans la section §3 nous admettons le théorème 3.1 qui affirme qu'on peut recouvrir un voisinage ouvert de l'origine par un nombre fini de voisinages effilés W_i ($1 \leq i \leq N$) tels que pour toute fonction holomorphe ramifiée dans W_i - encore notée v - définie à partir d'une détermination de v en un point de W_i, il existe une fonction holomorphe ramifiée u sur W_i solution de l'équation $a(x,D)u = v$.

Nous introduisons un nombre fini d'hyperplans non caractéristiques $H(i,j)$ issus de T et nous rappelons le théorème de [5] qui affirme l'existence d'une solution holomorphe ramifiée autour de la réunion des hypersurfaces caractéristiques K_ℓ $1 \leq \ell \leq d$ pour chaque problème de Cauchy du type :

$$a(x,D)u = 0$$

$$\partial_n^h u \mid_{H(i,j)} = w_h \qquad 0 \leq h < m\,.$$

Nous prouvons alors qu'on peut prolonger un germe de solution u du problème (0.1) le long de tout chemin Γ ne rencontrant pas les hypersurfaces caractéristiques . En outre, nous montrons que le prolongement ramifié u le long de Γ possède une structure particulière grâce à laquelle il n'y a pas de problèmes de rétrécissements d'ouverts lorsque le chemin Γ passe d'un voisinage effilé W_i à un voisinage effilé W_j. La structure du germe de solution et les précisions du Théorème 3.1 permettent de voir que la solution est de détermination finie si les données le sont, et de prouver le théorème 0.6. Nous utilisons le fait (démontré dans [6]) que la solution du problème de Cauchy à second membre nul est de détermination finie si les données de Cauchy le sont.

Dans la section §4 nous considérons un voisinage effilé W_2 de l'hypersurface caractéristique $(k^2)^{-1}(0)$ et une détermination de v en un point de W_2. La proposition 2.5 assure l'existence d'une fonction $g'(t,x)$ holomorphe sur un ensemble de la forme $\mathcal{R}(c,\omega)\times\Omega$ où

$$\mathcal{R}(c,\omega)=\{t=(t_1,t_2)\in\mathbf{C}^2\,\mathrm{Re}\,t_1<\log\omega\,,\quad \mathrm{Re}\,t_2-\mathrm{Re}\,t_1\leq c\}$$

telle que le prolongement ramifié de v le long des chemins de W_2 coïncide avec $g'(\log x^0,\log k^2(x),x)$. Nous chercherons alors une solution $u(x)$ - holomorphe ramifiée dans W_2 - de l'équation $a(x,D)u=v$ sous la forme $u(x)=h(\log x^0,\log k^2(x),x)$ où $h\in\mathcal{H}(\mathcal{R}(c,\omega)\times\Omega)$. Le lemme 4.3 assure que quand on applique $a(x,D)$ à $h(\log x^0,\log k^2(x),x)$ le coefficient de $(e^{-t_1}\partial_{t_1})^{m_2}\circ((e^{-t_2}\partial_{t_1})^{m-m_2}$ n'est pas nul, m_2 désignant la multiplicité de l'hypersurface $(k^2)^{-1}(0)$. Ce fait permet de ramener la preuve du théorème 3.1 (i.e. l'existence d'une solution u de l'équation $a(x,D)u=v$ à la convergence de la série $\sum\limits_{\ell\geq 0}\mathcal{H}^\ell g(t,x)$ sur un ensemble du type $\mathcal{R}(c,\omega)\times\Omega$ où $\mathcal{H}$ et g sont définis dans la section §4. La proposition 4.5 assure la convergence de cette série. On pose $\mathcal{D}_j=e^{-t_j}\partial_{t_j}$ $1\leq j\leq 2$ et on définit deux opérateurs d'intégrations à extrémités variables :

$$\mathcal{D}_1^{-1}u(t_1,t_2)=\int_{t_2-c}^{t_1}e^\theta u(\theta,t_2)d\theta\,,\ \mathcal{D}_2^{-1}u(t_1,t_2)=\int_{t_1+c}^{t_2}e^\sigma u(t_1,\sigma)d\sigma\,.$$

L'opérateur $\mathcal{H}$ précédemment mentionné est alors somme finie de termes du type :

$$b_{\lambda,\mu,\beta}(x)\,\mathcal{D}_1^\mu\mathcal{D}_2^\lambda\mathcal{D}_1^{-m_2}\mathcal{D}_2^{-(m-m_2)}D_x^\beta$$

où λ et μ sont des entiers ≥ 0 (voir §4 pour plus de précisions). $\mathcal{D}_1^{-1}$ et $\mathcal{D}_2^{-1}$ commutent mais $\mathcal{D}_i$ et $\mathcal{D}_j^{-1}$ ne commutent pas. L'obtention de majorations sur le terme général de $\mathcal{H}^\ell g$ permettant d'établir la convergence de la série $\sum\limits_{\ell\geq 0}\mathcal{H}^\ell g$ nécessite alors l'étude de commutateurs convenables (voir [6]).

Le procédé de désingularisation que nous utilisons ne nous permet pas de construire explicitement la solution du problème (0.1) en fonction des données. Toutefois, lorsque $d=2$ nous montrons (voir [6]) qu'il est possible de construire explicitement la solution en fonction des données.

Enfin, il m'est agréable de remercier Gilles Lebeau qui a bien voulu lire la première version de [6], et dont les remarques ont permis d'en améliorer le contenu.

Plan de l'exposé

§1. Notations

Nous commençons par rappeler quelques notations. Les coordonnées d'un point x de $\mathbf{C}^{n+1}$ seront notées $(x^j)_{0\leq j\leq n}$. Si $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n)$ est un multi-indice à composantes entières, on appelle longueur de β l'entier $|\beta| = \sum\limits_0^n |\beta_i|$. L'opérateur de dérivation par rapport à la variable x^j $(0 \leq j \leq n)$ sera noté D_{x^j} et, si $\beta \in \mathbf{N}^{n+1}$ est un multi-indice de dérivation, nous poserons :

$$D_x^\beta = D_{x^0}^{\beta_0} \times \ldots \times D_{x^n}^{\beta_n}.$$

On peut écrire $a(x, D)$ sous la forme :

$$a(x, D) = \sum_{|\beta|\leq m} a_\beta(x)\, D_x^\beta\,,$$

les fonctions a_β étant holomorphes sur un polydisque ouvert U de centre $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$. Par définition le polynôme caractéristique de $a(x, D)$ a pour expression :

$$a_m(x, \xi) = \sum_{|\beta|\leq m} a_\beta(x)\, \xi^\beta\,.$$

Maintenant, nous rappelons comment sont définies dans [5] les hypersurfaces caractérisriques $k^i = 0 \quad 1 \leq i \leq d$. On sait que l'anneau A des polynômes à $n+1$ indéterminées à coefficients dans l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine est factoriel ; le polynôme caractéristique $a_m(x, \xi)$ de $a(x, D)$ se décompose en facteurs irréductibles :

$$(*) \qquad \prod_s a_{m,s}(x, \xi)^{m_s} = a_m(x, \xi)$$

l'entier $m_s \geq 1$ est appelé la multiplicité du facteur irréductible $a_{m,s}(x,\xi)$; $a_m(x,\xi)$ est un polynôme homogène en ξ de degré d_s et à coefficients holomorphes au voisinage de l'origine ; sans restreindre la généralité, on peut supposer ces coefficients holomorphes dans U. On a $m = \Sigma d_s m_s$. Considérons alors le polynôme de degré $d = \Sigma\, d_s$.

$$b(x,\xi) = \prod_s a_{m,s}(x,\xi)\,.$$

Nous supposerons que l'équation en ξ_0 :

$$b(0\,;\,\xi_0,1,0,\ldots,0) = 0$$

admet d racines distinctes $(\lambda_i)_{1\leq i\leq d}$. Alors il existe $C \in \mathbf{C}^*$ tel que

$$\forall(\xi_0,\xi_1) \in \mathbf{C}^2 \quad b(0\,;\,\xi_0,\xi_1,0,\ldots,0) = C\prod_{j=1}^{d}(\xi_0 - \lambda_j\xi_1)\,.$$

Nous noterons k^i $(1 \leq i \leq d)$ la solution du problème de Cauchy du premier ordre :

$b(x,\text{grad } k^i(x)) = 0$

$k^i(x) = x^1$ pour $x^0 = 0$

grad $k^i(0) = (\lambda_i, 1, 0, \ldots, 0)$;

ces fonctions k^i sont définies et holomorphes au voisinage de l'origine, nous pouvons évidemment les supposer définies et holomorphes dans U.

Dans [5] sont donc ainsi construites d hypersurfaces caractéristique (issues de T) K^i d'équations $k^i(x) = 0$ $(1 \leq i \leq d)$. Les hypothèses précédentes montrent que, quitte à diminuer U, nous pouvons supposer que pour $1 \leq i \leq d$ $\;k^i(x) = (\lambda_i(x)x^0 + x^1)c_i(x)$ où $x \mapsto \lambda_i(x)$, $x \to c_i(x)$ sont des fonctions holomorphes sur U vérifiant $\lambda_i(0) = \lambda_i$, $c_i(0) = 1$, $\forall x \in U$ $0{,}99 < |c_i(x)| < 1{,}01$.

Remarque 1.1. Soit K une hypersurface d'équation locale $k(x) = 0$ (grad $k(x) \neq 0$) caractéristique pour l'opérateur $a(x,D)$ et issue de T. On vérifie aisément qu'il existe $C > 0$ et $i \in \{1,2,\ldots,d\}$ tels que grad $k(0) = C(\lambda_i, 1, 0, \ldots, 0)$. La théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre montre alors qu'il existe un voisinage V de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ tel que $V \cap K = V \cap K^i$.

§2. Voisinages effilés et revêtements universels

Dans cette section nous construisons des voisinages effilés d'hypersurfaces caractéristiques ou non caractéristiques (Déf. 2.3), nous montrons qu'ils recouvrent un voisinage de l'origine (lemme 2.4) et nous donnons en utilisant la proposition 2.2 une représentation des fonctions holomorphes ramifiées dans un voisinage effilé d'une hypersurface caractéristique (prop. 2.5). Les preuves sont données dans [6].

Définition 2.1.— *Soient $\omega > 0$ et $c < 0$, on pose*

$$X(c,\omega) = \{(z_1,z_2) \in \mathbf{C}^2 / 0 < |z_1| < \omega, 0 < |\frac{z_2}{z_1}| < e^c\}.$$

Proposition 2.2.— *Soient $\omega > 0$ et $c < 0$.*

1°) Posons

$$\mathcal{R}(c,\omega) = \{(t_1,t_2) \in \mathbf{C}^2 / \mathrm{Re}\, t_1 < \log \omega, \quad \mathrm{Re}\, t_2 - \mathrm{Re}\, t_1 \leq c\}.$$

$\mathcal{R}(c,\omega)$ est convexe. Soit $(t_1,t_2) \in \mathcal{R}(c,\omega)$, alors les segments $[(t_2 - c, t_2), (t_1, t_2)]$ et $[(t_1, t_1 + c), (t_1, t_2)]$ sont inclus dans $\mathcal{R}(c,\omega)$ et on a Re $t_2 \leq$ Re $t_2 - c < \log \omega$.

2°) Le revêtement universel $\mathcal{R}'(c,\omega)$ de $X(c,\omega)$ est donné par

$$\mathcal{R}'(c,\omega) = \{(t_1,t_2) \in \mathbf{C}^2 / \mathrm{Re}\, t_1 < \log \omega, \quad \mathrm{Re}\, t_2 - \mathrm{Re}\, t_1 < c\}.$$

$$p' \mid \mathcal{R}'(c,\omega) \mapsto X(c,\omega)$$
$$(t_1,t_2) \mapsto (e^{t_1}, e^{t_2}).$$

Le groupe fondamental $\pi_1(X(c,\omega))$ de $X(c,\omega)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$.

Note : Nous travaillerons avec des fonctions holomorphe sur des *ouverts* de la forme $\mathcal{R}'(c+\varepsilon,\omega)$. Pour définir les opérateurs d'intégration $\mathcal{D}_1^{-1}$, $\mathcal{D}_2^{-1}$ dans la section §4, nous utiliserons les ensembles $\mathcal{R}(c,\omega)$ car ils contiennent les deux segments mentionnés dans le 1°). Notons que $\mathcal{R}(c,\omega)$ contient l'ouvert $\mathcal{R}'(c,\omega)$ et que $\forall \varepsilon > 0$ $\mathcal{R}'(c+\varepsilon,\omega)$ contient $\mathcal{R}(c,\omega)$.

Dans cette section nous fixons un polydisque ouvert U de centre $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$.

Définition 2.3.— *Rappelons (voir §1) que pour $1 \leq i \leq d$ $k^i(x) = (\lambda_i(x)x^0 + x^1)c_i(x)$, posons $C = 1 + \max_{1 \leq i \leq d} |\lambda_i|$.*

1°) Soient $i \in \{1,2,\dots,d\}$ et $r > 0$, nous dirons que l'ensemble W défini par :

$$W = \{x \in U / |\lambda_i(0)x^0 + x^1| < r|x^0|, \quad k^i(x) \neq 0\}$$

est un voisinage effilé de l'hypersurface caractéristique $(k^i)^{-1}(0)$. *W ne contient aucun point de $(k^i)^{-1}(0)$.*

2°) Pour chaque hypersurface $s^{-1}(0)$ de U ayant une équation du type $x^0 = 0$ ou $\lambda x^0 + x^1 = 0$ ($\lambda \in \mathbf{C}$) nous allons définir des voisinages effilés de $s^{-1}(0)$ *contenant* $s^{-1}(0) \setminus T$ (nous utiliserons en effet des hypersurfaces non caractéristique ne rencontrant pas les hypersurfaces caractéristiques de sorte que le second membre v du problème (0.1) ne présente pas de singularités suivant $s^{-1}(0) \setminus T$.

Premier cas : $s(x) = x^0$, on pose

$$W = \{x \in U / |s(x)| < r|x^1|\} \quad \text{où} \quad r > 0.$$

Deuxième cas : $s(x) = x^0 + \frac{x^1}{\lambda} (\lambda \in \mathbf{C})$ et $|\lambda| > C$, on pose

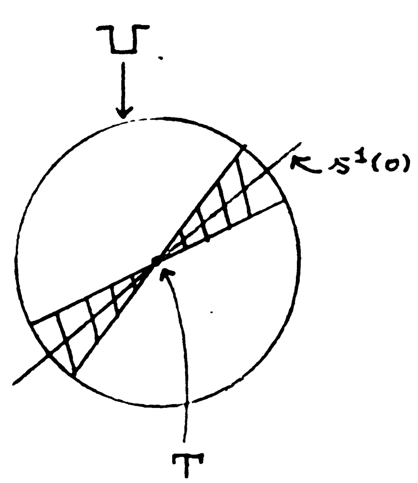
$$W = \{x \in U / |s(x)| < r|x^1|\} \quad \text{où} \quad r > 0 \quad \text{et} \quad r \neq \frac{1}{|\lambda|}.$$

Troisième cas : $s(x) = \lambda x^0 + x^1$ $(\lambda \in \mathbf{C})$ et $|\lambda| \leq C$, on pose

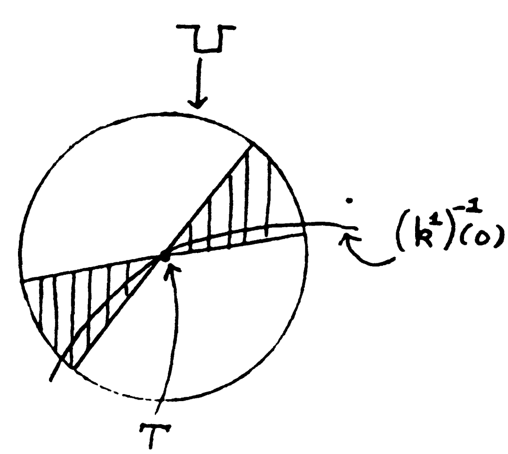
$$W = \{x \in U / |s(x)| < r|x^0|\} \quad \text{où} \quad r > 0\,.$$

La figure (2.1) [resp. (2.2)] ci-dessous représente un voisinage effilé de l'hypersurface non caractéristique $s^{-1}(0)$ [resp. de $(k^1)^{-1}(0)$]

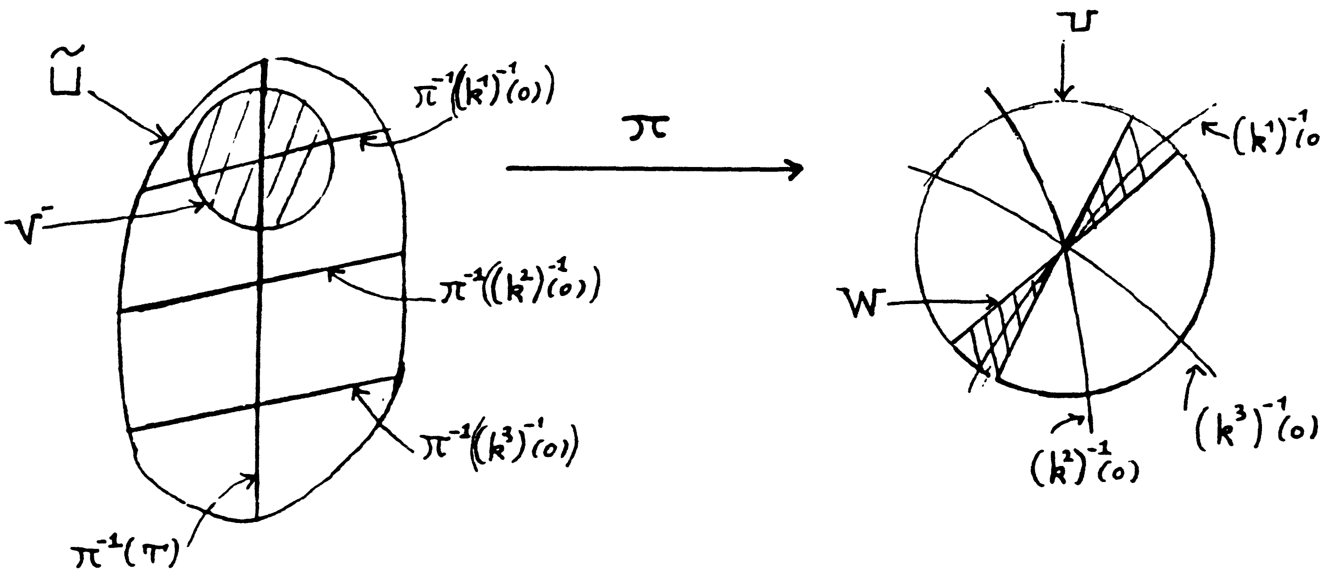
(2.1)



(2.2)



On peut donner une interprétation plus géométrique des voisinages effilés. Considérons $(\pi, \widetilde{U})$ l'éclatement de U suivant $T : x^0 = x^1 = 0, \pi : \widetilde{U} \to U.\pi^{-1}(T)$ est appelé le diviseur exceptionnel de l'éclatement (voir [4]). Un voisinage effilé W de $(k^1)^{-1}(0)$ est l'image par π d'un ouvert V de $\widetilde{U}$ contenant l'intersection du diviseur exceptionnel et de $\pi^{-1}((k^1)^{-1}(0))$, nous illustrons ce fait à l'aide de la figure ci-dessous.



Lemme 2.4.— *Reprenons les notations de la définition 2.3. Considérons pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ un voisinage effilé W_i de l'hypersurface caractéristique $(k^i)^{-1}(0)$. Supposons les W_i deux à deux disjoints. Alors il existe un polydisque ouvert U_1 (inclus dans le polydisque U de la définition 2.3) de centre 0 tel que les trois assertions suivantes soient vérifiées.*

1°) Toute hypersurface de U_1 non incluse dans la réunion des $(W_i \cup (k^i)^{-1}(0)) \cap U_1$ et ayant une équation du type $x^0 = 0$ ou $\lambda x^0 + x^1 = 0$, est non caractéristique pour chaque $a(x, D)$ en chacun de ses points (dans U_1) et ne rencontre pas dans $U_1 \setminus T$ les hypersurfaces caractéristiques .

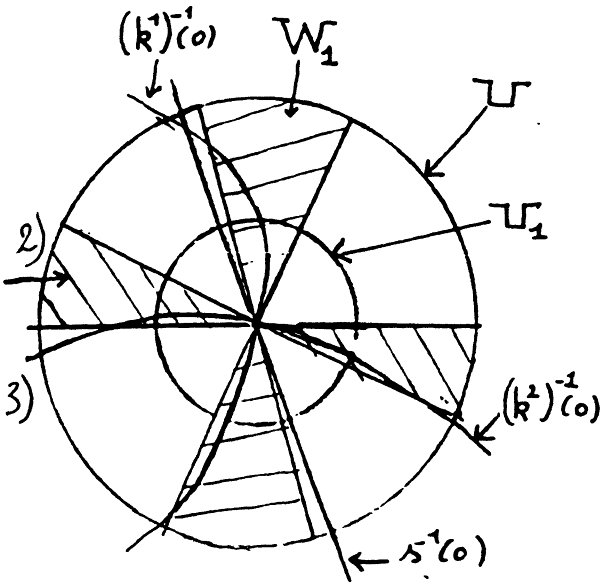
2°) Si pour chaque hypersurface $s^{-1}(0)$ de U_1 non incluse dans la réunion des $(W_i \cup (k^i)^{-1}(0)) \cap U_1$ et ayant une équation du type $x^0 = 0$ ou $\lambda x^0 + x^1 = 0$, on se donne un voisinage effilé W_s (voir 2°) de la Déf.2.3) de $s^{-1}(0)$, alors la réunion de tous les W_s et de tous les $W_i \cup (k^i)^{-1}(0)$ recouvre U_1 et on peut en extraire un recouvrement fini. En outre chaque hypersurface $s^{-1}(0)$ possède un voisinage effilé W_s ne rencontrant aucune hypersurface caractéristique dans U_1 et tel que toute hypersurface de U_1 incluse dans W_s et ayant une équation du type $\lambda x^0 + x^1 = 0$ est non caractéristique .

3°) Conservons les notations du 2°). Considérons deux voisinages effilés W et W' éléments de l'ensemble constitué des W_s et des W_i.

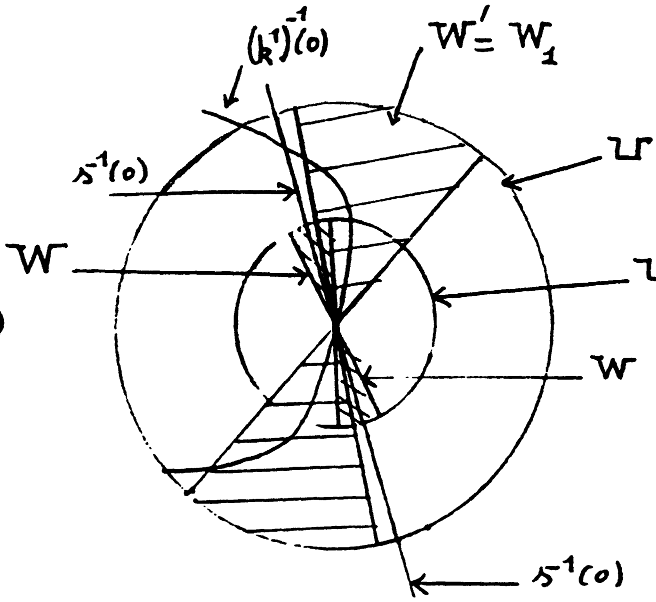
Supposons $W \cap W' \cap U_1 \neq \emptyset$, alors $W \cap W' \cap U_1$ est un ouvert connexe (par arcs) ainsi que son intersection avec tout polydisque ouvert de centre 0 et $(W \cap W' \cap U_1) \cup T$ contient des hypersurfaces ayant des équations du type : $\lambda' x^0 + x^1 = 0$ $(\lambda' \in \mathbf{C}^*)$, non caractéristiques et ne rencontrant pas dans $U_1 \setminus T$ les hypersurfaces caractéristiques .

En outre, l'intersection d'un voisinage effilé et d'un polydisque ouvert de centre l'origine est connexe.

La figure (2.3) [resp. (2.4)] ci-dessous illustre le 1°) [resp. le 3°)] du lemme 2.4.



(2.4)



Proposition 2.5.— *Soit $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ et W_i' un voisinage effilé de $(k^i)^{-1}(0)$. Alors il existe deux polydisques ouverts $U_2' \subset U'$ (inclus dans U) de centre $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$, il existe un voisinage effilé W_i'' (inclus dans W_i') de $(k^i)^{-1}(0)$, il existe deux réels $\omega_1 > 0$ et $c_1 < 0$ tels que :*

$$\forall x \in U_2' \cap W_i'' \quad (x^0, k^i(x)) \in X(c_1, \omega_1) \quad \textit{(voir def. 2.1)}$$

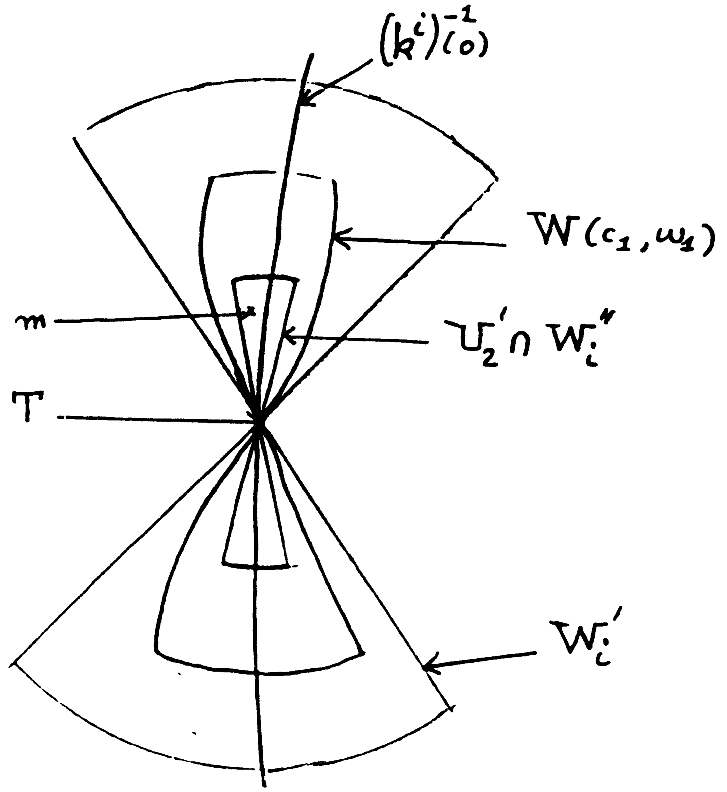
et, pour tout point $m \in U_2' \cap W_i''$ et tout germe holomorphe f en m se prolongeant le long de tout chemin d'origine m tracé dans W_i', il existe $g \in \mathcal{H}(\mathcal{R}'(c_1, \omega_1) \times U')$ telle que le prolongement ramifié $\widetilde{f}$ de f le long de tout chemin de $U_2' \cap W_i''$ coïncide avec $g(\log x^0, \log k^i(x), x)$.

Note : $x \mapsto g(\log x^0, \log k^i(x), x)$ définit de manière naturelle une fonction holomorphe ramifiée sur l'ensemble

$$W(c_1, \omega_1) = \{x \in U' / (x^0, k^i(x)) \in X(c_1, \omega_1)\}.$$

En général $W(c_1, \omega_1)$ est "tordu" et ne définit pas un voisinage effilé (au sens de la déf. 2.3) de l'hypersurface $(k^i)^{-1}(0)$, mais il contient un ensemble de la forme $U_2' \cap W_i''$.

La figure ci-dessous illustre la situation :



§3. Preuve du Théorème 0.1

Dans cette section nous admettons le théorème 3.1 dont l'énoncé est en partie calqué sur celui du lemme 2.4 et nous montrons que ce théorème entraîne le théorème 0.1.

Théorème 3.1.— *Soit v une fonction holomorphe ramifiée (dans un voisinage de l'origine) autour de la réunion des hypersurfaces caractéristiques .*

1°) Il existe un polydisque ouvert U (notation de la définition 2.3) de centre $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ et pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ il existe un voisinage effilé W_i de l'hypersurface caractéristique $(k^i)^{-1}(0)$ (les W_j étant deux à deux disjoints) tels que : pour toute fonction $\widetilde{v}$ (définie par un germe de v en un point de W_i) holomorphe sur le revêtement universel $\mathcal{R}(W_i)$ de W_i on peut trouver une fonction u holomorphe sur $\mathcal{R}(W_i)$ telle que

$$a(x, D)u = \widetilde{v}\,.$$

2°) Il existe un polydisque ouvert U_1 (inclus dans U) vérifiant les trois assertions du lemme 2.4 et tel que pour chaque hypersurface $\mathcal{S}$ de U_1 non incluse dans la réunion des $(W_i \cup (k^i)^{-1}(0)) \cap U_1$ et ayant une équation du type $x^0 = 0$ ou $\lambda x^0 + x^1 = 0$, il existe un voisinage effilé W (voir 2°) de la déf.2.3) de $\mathcal{S}$ tel que pour toute fonction $\widetilde{v}$ (définie par un germe de v en un point de W) holomorphe sur $\mathcal{R}(W)$, on peut trouver une fonction u holomorphe sur $\mathcal{R}(W)$ telle que :

$$a(x, D)u = \widetilde{v}\,.$$

3°) Si v est de détermination finie [resp. et en plus à monodromie unipotente], alors on peut supposer qu'il en est de même des fonctions u mentionnées en 1°) et 2°). Si $a(x, D)$ est à caractéristiques simples et si v est dans la classe de Nilsson, alors on peut supposer qu'il en est de même des fonctions u mentionnées en 1°) et 2°).

Remarque. Dans la première version de cet article, l'énoncé du 2°) était beaucoup plus compliqué ; je remercie vivement Claude Wagschal de m'avoir indiqué que l'énoncé actuel du 2°) suffisait pour mon objet. La preuve du 2°) est donnée dans [6].

Admettons le théorème 3.1, quitte à diminuer U, nous prendrons $U = U_1$, ce qui allègera la notation. Le lemme 2.4 montre alors qu'il existe un nombre fini de voisinages ouverts effilés W_i $1 \leq i \leq N$ tels que :

$$U = \bigcup_{i=1}^{N} W_i \cup \bigcup_{j=1}^{d} (k^j)^{-1}(0).$$

Soit $i \neq \ell$ tel que $W_i \cap W_\ell \neq \emptyset$, d'après le lemme 2.4 $W_i \cap W_\ell$ est connexe par arcs et $(W_i \cap W_\ell) \cup T$ contient une hypersurface non caractéristique en chacun de ces points $H(i,\ell)$ ayant une équation du type : $x^0 + \lambda_{i,\ell} x^1 = 0$ ($\lambda_{i,\ell} \in \mathbf{C}$) et ne rencontrant pas dans $U \setminus T$ les hypersurfaces caractéristiques .

Le lemme 2.4 et le 2°) du théorème 3.1 nous permettent de supposer qu'un et un seul des voisinages effilés W_i rencontre S. Quitte à changer la numérotation, nous supposerons que W_1 contient $U \cap (S \setminus T)$ et que pour $2 \leq j \leq N$, W_j ne rencontre pas S. Pour alléger les énoncés ultérieurs nous noterons $H(1.1)$ l'hyperplan S d'équation $x^0 = 0$. Ce qui a été dit dans la section §1 montre clairement que le symbole principal de $a(x, D)$ vérifie les mêmes propriétés vis-à vis de $H(i,\ell)$ ou de l'hyperplan S. Le résultat suivant est crucial, et démontré dans [5].

Théorème 3.2 [5].— *Il existe un polydisque ouvert Ω' de centre $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ et pour toute $H(i,\ell)$ précédemment introduite, il existe un voisinage $Y(i,\ell)$ de T dans $H(i,\ell)$, $Y(i,\ell)$ étant inclus dans $(W_i \cap W_\ell) \cup T$, tels que pour toutes données de Cauchy $(u'_j)_{0 \leq j < m}$ holomorphes sur le revêtement universel de $Y(i,\ell) \setminus T$ le problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} a(x,D)u &= 0 \\ \partial_n^j u \mid_{H(i,\ell)} &= u'_j \qquad 0 \leq j < m \end{aligned}$$

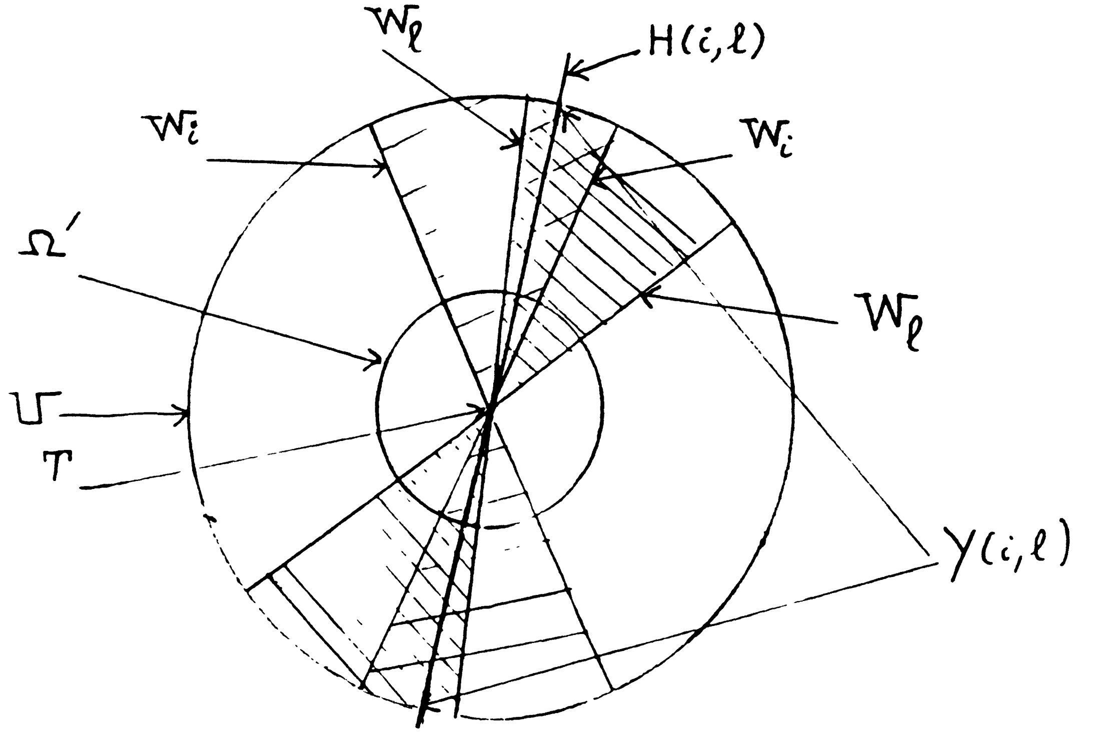
(∂_n désignant la dérivée normale pour $H(i,\ell)$), admet une unique solution h holomorphe sur le revêtement universel de Ω' privé de la réunion des hypersurface caractéristiques K_j ($1 \leq j \leq d$) construites dans la section §1. En outre, si les données de Cauchy u'_j ($0 \leq j < m$) sont de détermination finie, alors la solution h est de détermination finie (voir [6]).

Dorénavant, et jusqu'à la fin de cette section, nous nous donnons des ensembles Ω', $Y(i,\ell)$ fournis par le théorème 3.2, et nous pouvons supposer Ω' inclus dans

$$U = \bigcup_{i=1}^{N} W_i \cup \bigcup_{j=1}^{d} (k^j)^{-1}(0).$$

Remarque cruciale 3.3. Reprenons les notations du théorème 3.2. Comme $Y(i,\ell)$ est inclus dans $(W_i \cap W_\ell) \cup T$, le théorème 3.1 fournit des fonctions u'_i ramifiées dans le voisinage effilé W_i et les **traces suivant** $H(i,\ell)$ **de chaque détermination de** u'_i **sont holomorphes sur le revêtement universel de** $Y(i,\ell) \setminus T$. Naturellement $Y(i,\ell) \cap \Omega'$ et Ω' sont en général beaucoup plus petits que, respectivement $Y(i,\ell)$ et U ; et on peut supposer $H(i,\ell) \cap \Omega' \subset Y(i,\ell) \cup T$.

La figure ci-dessous illustre la situation :



Preuve du théorème 0.1 : existence et détermination finie.

D'après le théorème 3.2, on peut supposer les données de Cauchy identiquement nulles. Soit x_0 un point de $S \cap W_1 \cap \Omega'$ et u^0 un germe en x_0 de solution du problème de Cauchy

$$(0.1) \qquad \begin{aligned} &a(x,D)u^0 = v^0 \\ &D^h_{x^0}\, u^0 \mid_S = 0 \qquad 0 \le h < m \end{aligned}$$

où v^0 est le germe de v en x_0. Il faut montrer que si Γ est un chemin de $\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^{d} K_j$ d'origine x_0, le germe u^0 se prolonge le long de Γ. De plus il faut montrer que lorsque v est de détermination finie, alors le prolongement ramifié u de u^0 l'est également. Pour tout couple $(i,j) \in \{1,2,\dots,N\}^2$ avec $i \neq j$ et $W_i \cap W_j \cap \Omega' \neq \emptyset$, choisissons un point $x_{i,j}$ appartenant à $\Omega' \cap H(i,j) \cap W_i \cap W_j$ (dans le cas où $H(1,1) = S$, on pose $x_{1,1} = x_0$). Si Γ est un chemin d'origine x_0 paramétré par $[0,1]$, il existe une subdivision $t_1 = 0 < t_2 < \dots < t_p = 1$ de $[0,1]$ et pour chaque indice $j \in \{1,2,\dots,p-1\}$, il existe un voisinage effilé $W_{i(j)}$ tel que le chemin $\gamma'_j = \Gamma_{|[t_j, t_{j+1}]}$ soit d'image contenue dans $W_{i(j)}$. Quitte à modifier la subdivision, on peut supposer que $i(j) \neq i(j+1)$ pour $1 \le j \le p-2$; en outre $W_{i(1)}$ contient x_0 et donc rencontre $S \setminus T$, d'après la convention faite avant l'énoncé du théorème 3.2, on a $i(1) = 1$.

Γ est égal au chemin composé $\gamma'_1 \circ \gamma'_2 \circ \dots \circ \gamma'_{p-1}$. Soit $j \in \{1,2,\dots,p-1\}$, comme $\gamma'_j(t_{j+1}) = \gamma'_{j+1}(t_{j+1})$ appartient à $W_{i(j)} \cap W_{i(j+1)} \cap \Omega'$ et que cet ensemble est connexe par arcs, il existe un chemin ℓ_j joignant dans $W_{i(j)} \cap W_{i(j+1)} \cap \Omega'$ le point $\gamma'_j(t_{j+1})$ au point $\widetilde{x}_j = x_{i(j),i(j+1)}$. On définit alors les chemins suivants : (on pose $x_0 = \widetilde{x}_0$).

$$\gamma_1 = \gamma'_1 \circ \ell_1 \,,\; \ell^{-1}_{j-1} \circ \gamma'_j \circ \ell_j \quad (2 \le j \le p-2) \,,\; \gamma_{p-1} = \ell^{-1}_{p-2} \circ \gamma'_{p-1}.$$

Pour chaque $1 \le j \le p-2$, γ_j est d'origine $\widetilde{x}_{j-1}$ et d'extrémité $\widetilde{x}_j$. En outre, chaque chemin γ_j $1 \le j \le p-1$ est tracé dans $W_{i(j)}$. Désignons par Γ le chemin composé $\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \dots \circ \gamma_{p-1}$. On va prouver qu'on peut prolonger le germe u^0 (en x_0) de solution du problème (0.1) le long de Γ. La définition de Γ montrera alors qu'on a prolongé le germe u^0 le long de Γ. Notons v^j le germe de fonction holomorphe en $\widetilde{x}_j$ obtenu en prolongeant v^0 le long de $\gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_j$. L'existence du prolongement ramifié de u^0 le long de Γ sera établie dès que l'on aura prouvé par récurrence sur $1 \le j \le p-1$ l'assertion suivante :

(P_j). Le germe u^0 se prolonge le long de $\gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_j$ en un germe u^j en l'extrémité de γ_j. En outre, u^j s'écrit $u^j = u'^j + f^j$ où le germe u'^j [resp. f^j] se prolonge le long de tout chemin de $W_{i(j)}$ [resp. $\Omega' \setminus \bigcup_{\ell=1}^{d} K_\ell$]. De plus on a $a(x,D)u'^j = v^j$.

Prouvons l'assertion (P_1). Le théorème 3.1 assure qu'il existe un germe u'^0 au point $\widetilde{x}_0 = x_0$ se prolongeant le long de tout chemin $W_{i(1)}$ tel que $a(x,D)u'^0 = v^0$. D'autre part, le théorème 3.2 montre qu'il existe un germe f^0 en $\widetilde{x}_0$ se prolongeant le long de tout chemin de $\Omega' \setminus \bigcup_{\ell=1}^{d} K_\ell$ solution du problème

$$\begin{aligned} &a(x,D)f^0 = 0 \\ &D^h_{x^0} f^0 \mid_S = -D^h_{x^0} u'^0 \mid_S \quad 0 \le h < m\,. \end{aligned}$$

Par unicité, $u'^0 + f^0$ coïncide avec u^0. Le chemin γ_1 est tracé dans $W_{i(1)}$. Notons u'^1 [resp. f^1] le germe de fonction holomorphe en $\widetilde{x}_1$ obtenu en prolongeant u'^0 [resp. f^0] le long du chemin γ_1. L'assertion (P_1 est alors clairement vérifiée. Supposons maintenant le résultat prouvé à l'ordre $j \in \{1, 2, \ldots, p-2\}$. Le point $\widetilde{x}_j$ appartient à $\widetilde{H}_j = H(i(j), i(j+1))$. D'après le théorème 3.1, il existe un germe $\widetilde{u}'^{j+1}$ en $\widetilde{x}_j$ solution de l'équation $a(x, D)$ $\widetilde{u}'^{j+1} = v^j$ et se prolongeant le long de tout chemin de $W_{i(j+1)}$. En outre, d'après le théorème 3.2, il existe un germe $\widetilde{g}^{j+1}$ en $\widetilde{x}_j$ solution du problème

$$
\begin{aligned}
&a(x, D)\widetilde{g}^{j+1} = 0 \\
&\partial_n^h \widetilde{g}^{j+1} \mid_{\widetilde{H}_j} = -\partial_n^h \widetilde{u}'^{j+1} \mid_{\widetilde{H}_j} + \partial_n^h u'^j \mid_{\widetilde{H}_j} \qquad 0 \leq h < m
\end{aligned}
$$

se prolongeant le long de tout chemin de $\Omega' \setminus \bigcup_{\ell=1}^{d} K_\ell$ (d'après la remarque cruciale 3.3, les données de Cauchy du problème précédent vérifient en effet les hypothèses du théorème 3.2). Par hypothèse de récurrence, on a $a(x, D)u'^j = v^j$. Par unicité, le germe $\widetilde{u}'^{j+1} + \widetilde{g}^{j+1}$ coïncide avec u'^j. Le chemin γ_{j+1} est tracé dans $W_{i(j+1)}$. Notons alors u'^{j+1} [resp. g^{j+1}, resp. φ^{j+1}] le germe de fonction holomorphe en l'extrémité de γ_{j+1} obtenu en prolongeant $\widetilde{u}'^{j+1}$ [resp. $\widetilde{g}^{j+1}$, resp. f^j] le long du chemin γ_{j+1}. On a clairement $a(x, D)u'^{j+1} = v^{j+1}$. L'assertion (P_{j+1}) est alors vérifiée par u'^{j+1} et $f^{j+1} = g^{j+1} + \varphi^{j+1}$.

Les clauses relatives à la détermination finie sont traitées dans [6].

§4. Préparation à la preuve du Théorème 3.1

Dans cet exposé nous travaillerons beaucoup avec les ensembles $\mathcal{R}(c, \omega)$ car ils contiennent les deux segments mentionnés dans le 1°) de la proposition 2.2 et nous permettront de définir un peu plus loin les opérateurs d'intégration $\mathcal{D}_1^{-1}$ et $\mathcal{D}_2^{-1}$. Pour alléger les notations ultérieures, nous dirons qu'une fonction f est holomorphe sur $\mathcal{R}(c, \omega) \times U'$ (U' étant un ouvert de $\mathbf{C}^{n+1}$) s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est la restriction d'une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}'(c + \varepsilon, \omega) \times U'$.

Nous commençons la preuve des parties 1°) et 3°) du théorème 3.1. Pour fixer les idées, nous raisonnerons dans le cas de l'hypersurface caractéristique $(k^2)^{-1}(0)$. Quitte à diminuer le polydisque U de la définition 2.3, on peut supposer - en reprenant les notations de la proposition 2.5 - qu'il existe un voisinage effilé W_2' de $(k^2)^{-1}(0)$ tel que dans W_2', tout germe de v (le second membre du problème (O.1)) en un point de W_2', définit une fonction holomorphe ramifiée dans W_2' encore notée v. D'après la proposition 2.5, il existe deux polydisques $U_2' \subset U'$, un voisinage effilé $W_2''(\subset W_2')$ de $(k^2)^{-1}(0)$ et deux réels $\omega_1 > 0$ et $c_1 < 0$ tels que pour toute fonction - encore notée v -holomorphe ramifiée dans $U_2' \cap W_2''$ définie à partir d'un germe de v en un point de $U_2' \cap W_2''$, il existe $g' \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(c_1, \omega_1) \times U')$ telle que

$$\forall x \in U_2' \cap W_2'' \quad v(x) = g'(\log x^0, \log k^2(x), x) .$$

Nous chercherons une fonction $(t_1, t_2, x) \mapsto h(t_1, t_2, x)$ holomorphe sur un ouvert de $\mathcal{R}(c_1, \omega_1) \times U'$ de la forme $\mathcal{R}'(c_1', \omega_1') \times U''$ telle que dans l'intersection d'un polydisque ouvert de centre 0 et d'un voisinage effilé de $(k^2)^{-1}(0)$ on ait :

$$a(x, D)h(\log x^0, \log k^2(x), x) = v(x) = g'(\log x^0, \log k^2(x), x) .$$

Nous chercherons donc la fonction holomorphe ramifiée $u(x)$ du théorème 3.1 sous la forme $h(\log x^0, \log k^2(x), x)$. Cela dit, on prouve aisément le lemme suivant :

Lemme 4.1.— *Il existe des fonctions holomorphes sur un voisinage de l'origine* $c_{\lambda,\mu,\beta}(x)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbf{N}^2$, $\beta \in \mathbf{N}^{n+1}$, $\beta \in \mathbf{N}^{n+1}$, $|\beta| \leq m - \lambda - \mu$ *telles que :*

$$(4.1) \qquad a(x,D)h(\log x^0, \log k^2(x), x) = \sum_{\lambda+\mu\leq m} c_{\lambda,\mu,\beta}(x)\, D_x^\beta \left(e^{-t_1}\partial_{t_1}\right)^\mu \left(e^{t_2}\lambda_{t_2}\right)^\lambda$$

$$h(t_1,t_2,x)\,\Big|_{\substack{t_1 = \log x^0 \\ t_2 = \log k^2(x)}}$$

Comme l'hypersurface $(k^2)^{-1}(0)$ est caractéristique pour $a(x,D)$, le coefficient $C_{m,0(0,\ldots,0)}$ est identiquement nul. Nous omettrons les restrictions $(t_1,t_2) = (\log x^0, \log k^2(x))$, dans (4.1) nous chercherons une fonction $h(t,x)$ solution de l'équation

$$(4.2) \qquad \sum_{\substack{\lambda+\mu\leq m \\ |\beta|\leq m-\lambda-\mu}} c_{\lambda,\mu,\beta}(x)\, D_x^\beta \left(e^{-t_1}\partial_{t_1}\right)^\mu \left(e^{-t_2}\partial_{t_2}\right)^\lambda h(t,x) = g'(t,x)$$

où $t = (t_1,t_2) \in \mathcal{R}(c_1,\omega_1)$, $x \in U'$ et $g' \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(c_1,\omega_1) \times U')$ est donnée.

Rappelons la formule (*) de §0 :

$$(*) \qquad a_m(x,\xi) = \prod_s a_{m,s}(x,\xi)^{m_s}\,.$$

Quitte à changer la notation, nous supposerons que $a_{m,2}(x, \operatorname{grad} k^2(x))$ est identiquement nul, l'équation $k^2 = 0$ définit donc une hypersurface caractéristique de **multiplicité** m_2.

Lemme 4.2.— *Dans le membre de gauche de (4.2), le coefficient de chaque monôme de dérivation du type* $\left(e^{-t_2}\partial_{t_2}\right)^{m-i}\left(e^{-t_1}\partial_{t_1}\right)^{i_1} D_x^\beta$ *où* $i = i_1 + |\beta| < m_2$ *est identiquement nul.*

Preuve. Notons d_s le degré en ξ de $a_{m,s}$, on a :

$$m - i - \sum_{s\neq 2} m_s d_s = m - i - (m - m_2 d_2) = d_2 m_2 - i \geq m_2 d_2 - m_2 + 1 > m_2(d_2 - 1),$$

donc dans le coefficient de $\left(e^{-t_2}\partial_{t_2}\right)^{m-i}\left(e^{-t_1}\partial_{t_1}\right)^{i_1} D_x^\beta$ apparaîtra en facteur le terme $a_{m,2}(x, \operatorname{grad} k^2(x))$ qui est identiquement nul.

Lemme 4.3.— *Soit* $i \in \{0,1,\ldots,m_2\}$*. Le coefficient de* $\left(e^{-t_1}\partial_{t_1}\right)^i \left(e^{-t_2}\partial_{t_2}\right)^{m-i}$ *dans le premier membre de (4.2) est identiquement nul si* $i < m_2$*, et ne s'annule pas à l'origine si* $i = m_2$*.*

Preuve. Le cas $i < m_2$ découle du lemme précédent. Supposons donc $i = m_2$. Quitte à faire un changement de variables, nous pouvons supposer que $k^2(x) = x^1$. Rappelons (voir §1) que $a(x, D) = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(x) D_x^\beta$. Posons :

$$p(x, \lambda) = a_m(x; \lambda, 1, 0, 0, \ldots, 0) = \sum_{\beta_0 \leq m} a_{(\beta_0, m-\beta_0, 0)}(x) \lambda^{\beta_0}$$

comme $(k^2)^{-1}(0)$ est une hypersurface caractéristique de multiplicité constante m_2, on a

$$\forall x \in U \frac{\partial^i p}{\partial \lambda^i}(x, 0) \equiv 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq i < m_2 \, ; \; \frac{\partial^{m_2} p}{\partial \lambda^{m_2}}(0, 0) \neq 0 \, .$$

Par conséquent, on a :

$$a_m(x; \lambda, 1, 0, 0, \ldots, 0) = \sum_{m_2 \leq \beta_0 \leq m} a_{(\beta_0, m-\beta_0, 0)}(x) \lambda^{\beta_0}$$

et $a_{(m_2, m-m_2)}(0) \neq 0$. Cela dit, quand on applique $D_{x^0}^{\beta_0} \circ D_{x^1}^{m-\beta_0}$ à $h(\log x^0, \log x^1, x)$ on fait apparaître le monôme $(e^{-t_1} \partial_{t_1})^{\beta_0} (e^{-t_2} \partial_{t_2})^{m-\beta_0}$ on obtient alors aisément le lemme.

Quitte à restreindre U' nous pouvons donc supposer que le coefficient de $(e^{-t_1} \partial_{t_1})^{m_2} (e^{-t_2} \partial_{t_2})^{m-m_2}$ dans le premier membre de (4.2) ne s'annule jamais dans U'. Il existe alors des fonctions $b_{\lambda,\mu,\beta}(x)$ $(\lambda, \mu) \in \mathbf{N}^2$, $\beta \in \mathbf{N}^{n+1}$, $|\beta| \leq m - \lambda - \mu$ holomorphes sur U', et telles que l'équation (4.2) soit équivalente à :

$$(4.3) \qquad (e^{-t_1} \partial_{t_1})^{m_2} (e^{-t_2} \partial_{t_2})^{m-m_2} h(t, x) = g(t, x) \quad +$$

$$\sum_{\substack{|\beta| + \lambda + \mu \leq m \\ (\lambda, \mu) \neq (m-m_2, m_2), \lambda \neq m}} b_{\lambda,\mu,\beta}(x) (e^{-t_1} \partial_{t_1})^\mu (e^{-t_2} \partial_{t_2})^\lambda D_x^\beta h(t, x)$$

où $(t_1, t_2) \in \mathcal{R}(c_1, \omega_1), x \in U'$ et $g \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(c_1, \omega_1) \times U')$ est donnée. Le lemme 4.2 montre (et c'est crucial) que si $\lambda + \mu + |\beta| = m$ et $\lambda > m - m_2$, alors $b_{\lambda,\mu,\beta}$ est identiquement nulle. Posons $\mathcal{D}_1 = e^{-t_1} \partial_{t_1}$, $\mathcal{D}_2 = e^{-t_2} \partial_{t_2}$.

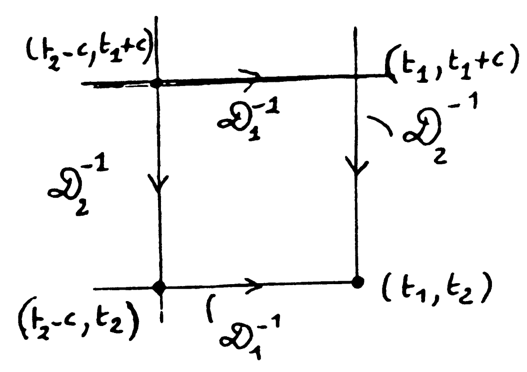
Soit $c \in]-\infty, c_1 - 3]$ (c ne sera choisi qu'à la fin de la preuve), pour $u \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(c,\omega) \times U')$ on pose

$$\mathcal{D}_1^{-1} u(t,x) = \int_{t_2-c}^{t_1} e^{\theta} u(\theta, t_2, x) d\theta \,,\ \mathcal{D}_2^{-1} u(t,x) = \int_{t_1+c}^{t_2} e^{\sigma} u(t_1, \sigma, x) d\sigma \,,$$

où $t = (t_1, t_2) \in \mathcal{R}(c,\omega)$.

Remarque 4.4. Rappelons (cf. Proposition 2.2) que les segments d'intégration $[(t_2 - c, t_2), (t_1, t_2)]$ et $[(t_1, t_1 + c), (t_1, t_2)]$ sont inclus dans $\mathcal{R}(c,\omega)$.

Le dessin suivant fait dans $\mathbf{R}^2$ (dans le plan des Re t_1, Re t_2) :



permet de deviner (cf. Lemme 5.4) que $\mathcal{D}_1^{-1}$ et $\mathcal{D}_2^{-1}$ commutent. Pour $k \in \mathbf{N}^*$ on pose $\mathcal{D}_1^{-k} = \mathcal{D}_1^{-1} \circ \ldots \circ \mathcal{D}_1^{-1}$ (k fois), $\mathcal{D}_2^{-k} = \mathcal{D}_2^{-1} \circ \ldots \circ \mathcal{D}_2^{-1}$ (k fois). Soit $u_1 \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(c_1, \omega_1) \times U')$, on observe que :

$$\mathcal{D}_1^{m_2} \circ \mathcal{D}_2^{m-m_2} \circ \mathcal{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathcal{D}_1^{-m_2}(u_1) = u_1 \,.$$

Reprenons les notations de l'équation (4.3) et posons :

$$\mathcal{H} = \sum_{\substack{|\beta|+\lambda+\mu \leq m \\ (\lambda,\mu) \neq (m-m_2, m_2), \lambda \neq m}} b_{\lambda,\mu,\beta}(x) \mathcal{D}_1^{\mu} \mathcal{D}_2^{\lambda} \mathcal{D}_2^{-(m-m_2)} \mathcal{D}_1^{-m_2} D_x^{\beta} \,, \tag{4.4}$$

rappelons (cf. lemme (4.2) que si $|\beta| + \lambda + \mu = m$ et $\lambda > m - m_2$, alors $b_{\lambda,\mu,\beta}$ est identiquement nulle. $u_1 = \sum_{\ell \geq 0} \mathcal{H}^\ell(g)$ définit une solution formelle de l'équation

$$u_1(t,x) = g(t,x) + \mathcal{H}\, u_1(t,x) \tag{4.5}$$

$h(t,x) = \Sigma\, \mathcal{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathcal{D}_1^{-m_2} \mathcal{H}^\ell g(t,x))$ définit une solution formelle de l'équation (4.3). Rappelons que nous cherchons la fonction holomorphe ramifiée $u(x)$ du théorème 3.1 sous la forme $h(\log x^0, \log k^2(x), x)$.

La proposition suivante établit la convergence de ces séries dans un espace convenable. Elle est démontrée dans [6].

Proposition 4.5.— *Il existe $\omega \in]0, e^{-2}\omega_1]$, $c \in]-\infty, c_1 - 3]$ et un voisinage Ω $(\subset U')$ de $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ tel que pour tout $g \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(c_1, \omega_1) \times U')$, les séries de somme $u_1 = \sum_{\ell \geq 0} \mathcal{H}^\ell(g)$, $h = \sum_{\ell \geq 0} \mathcal{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathcal{D}_1^{-m_2} \mathcal{H}^\ell g$ convergent uniformément sur tout compact de $\mathcal{R}(c,\omega) \times \Omega$. En outre, si g est de détermination finie [resp. et en plus à monodromie unipotente], alors il en est de même de h. Si $a(x,D)$ est à caractéristiques simples et si g est dans la classe de Nilsson, alors il en est de même de h.*

Remarque 4.6. Reprenons les notations de la proposition 4.5. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Posons

$$A(c,\varepsilon,\omega) = \{(t_1,t_2) \in \mathcal{R}'(c+\varepsilon,\omega); \mathrm{Re}\, t_2 < c + \log \omega\}.$$

Il est clair que si (t_1,t_2) appartient à $A(c,\varepsilon,\omega)$, alors les segments $[(t_2 - c, t_2), (t_1,t_2)]$ et $[(t_1, t_1 + c), (t_1, t_2]$ sont inclus dans l'ouvert convexe $A(c,\varepsilon,\omega)$. On vérifie alors aisément que $\forall\, \ell \in \mathbf{N}$ les fonctions $\mathcal{H}^\ell g, \mathcal{D}_1^{-m} \circ \mathcal{D}_2^{-(m-m_2)} \circ \mathcal{H}^\ell g$ sont holomorphes sur $A(c,\varepsilon,\omega) \times U'$. Enfin on vérifie immédiatement que la fonction $h(t,x)$ définit une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}'(c,\omega) \times \Omega$ solution de l'équation (4.3).

Preuve des parties 1°) et 3°) du Théorème 3.1 à partir de la Proposition 4.5.

Reprenons les notations utilisées au début de cette section. Fixons un couple (c,ω) vérifiant les conditions de la proposition 4.5. En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 2.5, on vérifie qu'il existe un polydisque ouvert U_3 (inclus dans U_2' et Ω) de centre $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ et un voisinage effilé W_2 (inclus dans les voisinages effilés W_2' et W_2'') de $(k^2)^{-1}(0)$ tels que :

$$\forall\, x \in U_3 \cap W_2\,, (x^0, k^2(x)) \in X(c-1,\omega) \quad \text{(voir def.2.1)}. \tag{1}$$

Tout germe de v en un point de $U_3 \cap W_2$ définit un fonction ramifiée encore notée v dans W_2', donc comme au début de cette section il existe $g' \in \mathcal{H}(\mathcal{R}(c_1,\omega_1) \times U')$ telle que dans $U_3 \cap W_2$, on ait $v(x) = g'(\log x^0, \log k^2(x), x)$.

D'après la proposition 4.5, (1) et ce qui précède, il existe $h(t,x)$ holomorphe sur $\mathcal{R}'(c,\omega) \times \Omega$ telle que

$$\forall\, x \in U_3 \cap W_2\,, \; a(x,D)\, h(\log x^0, \log k^2(x), x) = g'(\log x^0, \log k^2(x), x)$$

et $u(x) = h(\log x^0, \log k^2(x), x)$ définit une fonction holomorphe ramifiée dans $U_3 \cap W_2$ et vérifie toutes les conditions demandées dans le théorème 3.1. On raisonne de même pour les autres hypersurfaces caractéristiques et on obtient donc un polydisque $U(= U_3)$ et des voisinages effilés W_i de $(k^i)^{-1}(0)$ $1 \leq i \leq d$ vérifiant les assertions 1°) et 3°) du théorème 3.1.

Bibliographie

[1] J. BJÖRK. Ring of differential operators. North-Holland Mathematical Library, 1979.

[2] O. FORSTER. Lecture on Riemann surfaces. Graduate Texts in Matheùmatics, Springer Verlag, 1981.

[3] M. GREENBERG, J. HARPER. Algebraic Topology, a first course. Benjamin, 1981. Mathematical Lecture Notes Series.

[4] P. GRIFFITHS, J. HARRIS. Principles of Algebraic Geometry. Wiley Interscience, 1978.

[5] Y. HAMADA, J. LERAY, C. WAGSCHAL. Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristique multiples : Problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle (J. Math. pures et appl., t. 55, 1976, p. 297 à 352).

[6] E. LEICHTNAM. Le problème de Cauchy ramifié. A paraître aux Annales Scientifiques de l'E.N.S.

[7] C. WAGSCHAL. Sur le problème de Cauchy ramifié (J. Math. pures et appl. t. 53, 1974, p. 147 à 164).

[8] C. WAGSCHAL. Problème de Cauchy Analytique à données méromorphes (J. Math. pures et appl. t. 51, 1972, p. 375 à 397).

Eric Leichtnam
Centre de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05
France