Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

R. J. DiPerna
P. L. Lions

Équations différentielles ordinaires et équations de transport avec des coefficients irréguliers

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1988-1989), exp. nº 14, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1988-1989____A14_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1988-1989

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES ET EQUATIONS DE TRANSPORT AVEC DES COEFFICIENTS IRREGULIERS

R.J. DIPERNA (†) et P.L. LIONS

† décédé le 8 janvier 1989

Exposé n°XIV

28 Février 1989

I Introduction

Nous donnons ici un bref résumé de résultats récents (voir [4]) qui concernent l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions d'équations différentielles ordinaires et d'équations de transport. Ces résultats autorisent des coefficients peu réguliers, et permettent donc de traiter de nombreux exemples intervenant dans l'étude des **modèles cinétiques** (voir [5]) ou en **Mécanique des Fluides** (voir [6] et la section III ci-dessous). Une description rapide de ces résultats est donnée dans la section II. Signalons néanmoins qu'il s'agit d'étudier des **flots** associés à des équations différentielles ordinaires plutôt qu'une solution individuelle correspondant à une condition initiale fixée. En effet, l'étude globale du flot permet d'éliminer un ensemble "exceptionnel" - dont il faut démontrer, par exemple, qu'il est négligeable pour la mesure de Lebesgue - de conditions initiales "singuliers" pour l'existence, l'unicité ou la stabilité.

Les démonstrations des résultats présentés dans la section II peuvent être trouvés dans [4] : elles reposent sur une étude précise des équations de transport associés ("point de vue Eulérien") et notamment sur la notion de solutions renormalisées de telles équations.

II Principaux résultats

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N (N \geq 1)$, soit $B(x)$ un champ de vecteurs dans $\mathbf{R}^N$ -dont la régularité sera précisée ultérieurement- . On s'intéresse à l'existence, l'unicité et la stabilité de solutions de

$$(1) \qquad \frac{dX}{dt} = B(X), \forall t \in \mathbf{R}; X(0) = x \in \bar{\Omega}\ .$$

Outre le caractère homogène de cette équation différentielle ordinaire - hypothèse qui n'est pas fondamentale pour les résultats qui suivent -, nous supposerons pour simplifier (voir [4] pour un cadre plus général) que $\bar{\Omega}$ est un domaine invariant i.e.

$$(2) \qquad B(x).\nu(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

où ν désigne le nombre unitaire (par exemple extérieure) à $\partial\Omega$. Nous noterons λ la mesure de Lebesgue sur $\bar{\Omega}$ et par $Y \circ \lambda$ la mesure image de λ par une application mesurable Y de $\bar{\Omega}$ dans $\bar{\Omega}$ (par exemple) de sorte que $Y \circ \lambda$ est alors une mesure sur $\bar{\Omega}$ et

$$\forall \varphi \in C(\bar{\Omega}), \int \varphi d(Y \circ \lambda) = \int \varphi(Y(x))dx.$$

Nous utiliserons la condition suivante

$$(*) \qquad X_t \circ \lambda \leq C^{C_0|t|}\lambda, \forall t \in \mathbf{R}$$

avec $C_0 \geq 0$, et où $X_t(x) = X(t,x)$ est solution de (1).

Enfin, nous dirons que X est un flot p.p. associé à (1) si $X \in C(\mathbf{R}; L^1(\Omega))$ et si X vérifie

$$(3) \qquad X(t,x) \in \bar{\Omega} \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$(4) \qquad \lambda(\{x \in \Omega / X(t,x) \in N\}) = 0 \quad \text{si} \quad \lambda(N) = 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$(5) \qquad \frac{\partial X}{\partial t} = B(X) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \Omega)$$

$$(6) \qquad X(t+s,x) = X(t, X(s,x)) \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega, \quad \forall t,s \in \mathbf{R} .$$

Remarques : 1) Les conditions (3), (6) et $(*)$ entraînent bien sûr

$$(*') \qquad X_t \circ \lambda \geq e^{-C_0|t|}\lambda, \quad \forall t \in \mathbf{R} .$$

2) D'autre part, la continuité dans L^1 de X_t et les conditions $(*)$ impliquent que $B(X_t) \in C(\mathbf{R}; L^q(\Omega))$ si $B \in L^q(\Omega)(1 \leq q < \infty)$.

3) Enfin, $(*)$ entraîne (4).

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un des résultats prouvés dans [4].

Théorème 1.— *Soit $B \in W^{1,1}(\Omega)$ vérifiant (2), tel que* div $B \in L^\infty(\Omega)$.

1) Il existe un unique flot p.p. X associé à (1), vérifiant $(*)$ avec $C_0 = \|\text{div}B\|_{L^\infty}$.

2) Si $B \in W^{1,p}(\Omega)(1 \leq p < \infty), X \in C^1(\mathbf{R}; L)$ avec $L = L^{P^*}(\Omega)$ et $p^* = \frac{Np}{N-p}$ si $p < N$, $L = L^q(\Omega)(\forall q < \infty)$ si $p = N$, $L = C(\bar\Omega)$ si $p > N$.

De plus, p.p. $x \in \Omega$, $B(X) \in C(\mathbf{R}), X \in C^1(\mathbf{R})$, (1), (3) et (6) ont lieu ($\forall t \in \mathbf{R}, \forall s \in \mathbf{R}$) ; et si $p > N$, ces affirmations sont exactes pour tout $x \in \bar\Omega$.

3) Le flot X vérifie aussi

$$(7) \qquad \frac{\partial X}{\partial t} = B(x).\nabla_x X \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \Omega), X_{|t=0} = x \quad \textit{dans} \quad \Omega$$

et X est l'unique solution de (7) dans $L^\infty(\mathbf{R} \times \Omega)$.

4) Soit $(B_n)_n \in W^{1,1}(\Omega)$ (par exemple) vérifiant div $B_n \in L^\infty(\Omega)$ *et (2) (pour tout $n \geq 1$), on note X_n le flot p.p. correspondant et on suppose que B_n converge dans $L^1(\Omega)$ vers B. Enfin, on suppose que* divB_n *converge dans $L^1(\Omega)$ vers* div$B$ *ou bien que* (div$B_n)_n$ *est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Alors, X_n converge vers X dans $C([-T,+T]; L^q(\Omega))(\forall q < \infty)$, $\frac{\partial X_n}{\partial t}$ converge vers $\frac{\partial X}{\partial t}$ dans $C([-T,+T]; L^1(\Omega))$ pour tout $T \in]0,\infty[$; en particulier $X_n(\cdot,x)$ converge vers $X(\cdot,x)$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}$, pour presque tout $x \in \Omega$.*

Remarques :

1) La question de l'unicité d'un flot p.p. sans supposer $(*)$ est ouverte.

2) Dans [4], nous donnons un exemple où $N = 2, B \in W^s_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)(\forall s \in]0,1[)$, div $B = 0$ pour lequel deux flots p.p. distincts préservant λ existent. Cet exemple indique que la régularité supposée sur B est en général "optimale". Restent néanmoins deux cas "limite" intéressants pour lesquels nous conjecturons que des contre exemples

similaires à celui mentionné ci-dessus devraient être possibles : il s'agit du cas où $B \in BV(\mathbf{R}^2), \mathrm{div} B = 0$ et du cas où B est une solution stationnaire des équations d'Euler dans $\mathbf{R}^2$ dans le cas incompressible telle que $B \in L^2$, rot$B$ est une mesure bornée c'est à dire

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathrm{div}(B \otimes B) + \nabla p = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), p \in \mathcal{D}'(\Omega), \\ \mathrm{div} B = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), B.\nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega, B \in L^2(\Omega), B \in M_b(\Omega) \end{cases}$$

où $M_b(\Omega)$ désigne l'espace des mesures bornées sur Ω.

Un tel contre exemple -grâce à la construction utilisée dans [6] et que nous rappelons dans la section III ci-dessous fournirait un exemple de non unicité pour le problème de Cauchy correspondant aux équations d'Euler dans $\mathbf{R}^3$ dans le cas incompressible, pour des données initiales L^2.

3) Des contre exemples classiques (voir [4] pour plus de détails) indiquent que la condition de bornitude sur $\mathrm{div} B \in L^\infty(\Omega)$ est fondamentale : elle l'est de toute façon pour assurer $(*)$. On peut toutefois l'affaiblir légèrement en supposant que $c^{\alpha|\mathrm{div} B|} \in L^1(\Omega)$ avec $\alpha > 0$ et on peut également la remplacer par $\frac{1}{w}\mathrm{div}(Bw) \in L^\infty(\Omega)$ où $(w, w^{-1} \in L^\infty_+(\Omega)$ - il convient alors de remplacer λ par $w\lambda$.

4) Des résultats analogues pour des flots dans l'espace entier sont possibles et nous renvoyons le lecteur à [4] pour des énoncés précis.

5) Si l'équation différentielle n'est plus homogène i.e. si B dépend de t, des résultats similaires restent vrais (voir [4]) : il convient alors de supposer que $B \in L^1(0, T; W^{1,1}(\Omega)), \mathrm{div}\ B \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ (avec $T \in]0, \infty[$). Le résultat de stabilité donné dans (4) est alors vrai à condition de supposer que B_n converge faiblement dans $L^1(]0, T[\times\Omega)$ vers B et que $\int_0^T dt \int dx |B_n(t, x+h) - B_n(t, x)| \to 0$ si $|h| \to 0$ uniformément en n.

6) La démonstration du Théorème 1 repose sur l'étude de l'équation de transport associée à (1) à savoir si $B \in C(\bar{\Omega})$, le flot X donné dans le théorème 1 vérifie (1), (3), (6) pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $X \in C^1(\mathbf{R}\,; C(\bar{\Omega}))$. ∎

$$(9) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = B.\nabla_x f \quad \text{dans} \quad \mathbf{R} \times \Omega, f_{|t=0} = f^0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

ou f^0 est une condition initiale fixée. Cette étude est rendue possible grâce à la notion de solution renormalisée de (9) : soit $f^0 \in L^0(\Omega) = \{f$ mesurable de Ω dans $\mathbf{R}, |f| < \infty p.p.\}$, nous dirons que $f \in L^0(\mathbf{R} \times \Omega)$ est une solution renormalisée de (9) si, pour toute fonction $\beta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\beta(f)(\in L^\infty(\mathbf{R} \times \Omega))$ est solution de (9) au sens des distributions pour la condition initiale $\beta(f^0)$; et ceci a un sens dès que $\beta \in L^1(]0, T[\times\Omega)$ et div $NB \in L^1(]0, T[\times\Omega)$ (si on pose l'équation (9) sur $]0, T[\times\Omega \cdots)$. On vérifie bien sûr aisément que toute solution renormalisée de (9) appartenant à $L^\infty(]0, T[\times\Omega)$ par exemple est solution au sens des distributions, par contre la réciproque n'est pas vraie en général et elle le devient si on suppose que $B \in L^1(0, T; W^{1,1}(\Omega)), \mathrm{div} B \in L^1(O, T; L^\infty(\Omega))$.

Avec cette notion de solutions, on peut démontrer le résultat suivant (voir [4] pour plus de détails) qui permet notamment de démontrer le Théorème 1 :

Théorème 2.— *Soit $B \in W^{1,1}(\Omega)$ vérifiant (2), tel que* $\mathrm{div}B \in L^\infty(\Omega)$. *Soit* $f^0 \in L^0(\Omega)$

1) Il existe une unique solution renormalisée $f \in L^0(\mathbf{R} \times \Omega)$ de (9). En particulier, f vérifie : $\beta(f) \in C(\mathbf{R}; L^1(\Omega))$ et

$$\int_\Omega \beta(f)dx(t) = \int_\Omega \beta(f^0)dx - \int_0^t \int_\Omega (\mathrm{div}B)\beta(f)dx\ ds\ \forall t \in \mathbf{R},\ \forall \beta \in C_b(\mathbf{R})\ . \tag{10}$$

De plus, on a :

$$f(x,t) = f^0(X(t,x))\ \forall t \in \mathbf{R}\ , \tag{11}$$

p.p. $x \in \Omega$ où X est le flot donné dans le Théorème 1.

Enfin, $f \in C(\mathbf{R}; L^q(\Omega))$ si $f^0 \in L^q(\Omega)$ $(\forall 1 \leq q < \infty)$.

2) Si $B \in W^{1,p}(\Omega)$ et si $f \in L^1(-T,T; L^q(\Omega))(\forall T \in]0,\infty[)$ est une solution au sens des distributions de (9) avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, et $1 \leq p \leq \infty$, alors f est une solution renormalisée.

3) Soit $(B_n)_n \in W^{1,1}(\Omega)$ (par exemple) vérifiant $\mathrm{div}B_n \in L^\infty(\Omega)$ et (2) (pour tout $n \geq 0$). On suppose que $\mathrm{div}B_n$ converge dans $L^1(\Omega)$ vers $\mathrm{div}B$ ou que $(\mathrm{div}B_n)_n$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Soit $(f_n^0)_n \subset L^0(\Omega)$, on considère la solution renormalisée de (9) correspondant à (B_n, f_n^0) que l'on note f_n, on suppose que f_n^0 converge en mesure vers $f^0 \in L^0(\Omega)$ et on désigne par f la solution renormalisée de (9) correspondante.

Alors, f_n converge vers f en mesure sur Ω, uniformément en $t \in [-T,+T](\forall T \in]0,\infty[)$, i.e. $\lambda(\{(f_n - f)(t,x) \geq \alpha\}) \underset{n}{\rightarrow} 0$ quand n tend vers $+\infty$, uniformément en $t \in [-T,+T]$, $\forall \alpha > 0$. Si de plus f_n^0 converge vers f^0 dans $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$, alors f_n converge vers f dans $L^p(\Omega)$, uniformément en $t \in [-T,+T]$ $(\forall T \in]0,\infty[)$.

Remarques : L'analogue (ou l'adaptation au point de vue Eulérien) des remarques faites après le Théorème 1 est valide.

Nous donnons dans la section suivante diverses applications à la Mécanique des Fluides : signalons également les applications à l'équation de Vlasov-Poisson données dans [5] ainsi que des applications à la propagation du chaos moléculaire dans le contexte de systèmes conservatifs (problème à N corps et équations de Vlasov) où, notamment grâce à l'entropie, et les résultats précédents, il est possible d'obtenir la convergence (forte dans L^1!) des densités réduites vers une solution renormalisée de l'équation de Vlasov (travail en préparation [7]).

III Applications à la Mécanique des Fluides

Nous décrirons ici brièvement quelques applications des résultats précédents à des modèles de fluides incompressibles, correspondant à l'évolution d'un fluide remplissant une région donnée Ω de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ et nous considèrerons toujours l'un des trois cas suivants : Ω ouvert borné régulier avec conditions aux limites de type Dirichlet, le cas périodique dans chacune des coordonnées (Ω est alors un rectangle ou un parallèpipède) ou enfin le cas où Ω est l'espace entier. Bien entendu, dans le cas d'un fluide non visqueux la condition de Dirichlet ne porte que sur la composante normale (à $\partial\Omega$) du champ de vitesses. Pour la plupart des résultats présentés ci-dessous, nous prendrons la liberté de ne pas rappeler ces conditions aux limites sauf, bien sûr, lorsque nos résultats dépendent du type de conditions aux limites.

Nous commençons par le cas des équations de Nevier-Stokes en dimension 3 à savoir

(12)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f \text{ dans } (0,T)\times\Omega \\ u_{|t=0} = u^0 \text{ dans } \Omega, \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } (0,T)\times\Omega, u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)^3)\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3) \end{cases}$$

avec $\nu > 0, T > 0, f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^3)$ $u^0 \in L^2(\Omega)^3$ et div $u = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, où p est le champ de pression i.e. une fonction scalaire sur $(0,T)\times\Omega$ que l'on absorbe dans la formulation faible classique après multiplication par des fonctions à divergence nulle. L'existence de telles solutions ("faibles") est connue depuis les travaux fondamentaux de J. Leray [15], [16], [17] et E. Hopf [13]. La représentation lagrangienne de tels flots, utile pour certaines questions numériques ou pour une approche géométrique (voir V. Arnold [2], D. Ebin and J. Marsden [11]...), a été étudiée par C. Foias, C. Guillopé et R. Temam [12] où il est montré l'existence d'une telle représentation (préservant les volumes) pour chaque solution faible. Il s'agit donc de résoudre

$$\frac{d\xi}{dt} = u(t,\xi), \xi(0) = x \in \bar{\Omega}, \xi(t) \in \bar{\Omega}\forall t \in [0,T] \tag{13}$$

et les résultats de la section précédente (et de [4]) donnant immédiatement l'existence, l'unicité et la stabilité de tels "flots Lagrangiens" $\xi(t,x)$ préservant la mesure de Lebesgue pour chaque solution faible u de (12). De plus, $\xi \in W^{1,\infty}(0,T;L^6(\Omega))$ et pour tout $t \in [0,T]$, il existe une application η de Ω dans Ω ($\eta \in L^6(\Omega)$) telle que $\eta \circ \lambda = \lambda$ et $\xi(t)\circ\eta(x) = x$ p.p. dans Ω (et $\eta \in L^6(\Omega)$).

Le deuxième exemple d'applications consiste en une généralisation de (12) au cas de fluides nonhomogènes : on introduit alors la densité p fonction scalaire sur Ω et on considère maintenant le système

$$\rho \geq 0, \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \quad \text{dans} \quad (0,T)\times\Omega, \rho|_{t=0} = \rho^0, \rho \in L^\infty_{t,x} \tag{14}$$

(15)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u\otimes u) - \operatorname{div}\{\nu(\rho)\nabla u\} + \nabla\rho = \rho f \text{ dans } (0,T)\times\Omega \\ \rho u|_{t=0} = m^0 \text{ dans } \Omega, \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } (0,T)\times\Omega, u \in L^2(O,T;H^1), \rho^{1/2}u \in L^\infty(0,T;L^2) \end{cases}$$

avec $\rho^0 \in L^\infty(\Omega), \rho^0 \geq 0$ p.p., $m^0 \in L^2(\Omega), \nu \in C([0,\infty);(0,\infty))$,
$T > 0$, $f \in L^2(0,T;L^{6/5}(\Omega))$, Ω ouvert de $\mathbf{R}^3$. Bien sûr, si $\Omega = \mathbf{R}^3$ ou si on impose des conditions aux limites de Dirichlet ($u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$), il n'y a pas lieu d'imposer des conditions aux limites sur ρ ; par contre, dans le cas périodique, on doit imposer que ρ est également périodique.

Grâce aux résultats de la section II, on obtient le théorème suivant (dont la démonstration figure dans [6]).

Théorème 3.— *Sous les conditions précédentes*
1) *Il existe une solution (ρ, u) du système (14) - (15)*
2) *Toute solution (ρ, u) du système (14) - (15) vérifie*

$$(16) \qquad \int_\Omega \beta(\rho)dx(t) = \int_\Omega \beta(\rho^0)dx, \forall \beta \in C([0,\infty);[0,\infty)), \forall t \in [0,T] \ .$$

En particulier, si $\rho^0 \geq \underline{\rho} > 0, \rho(t) \geq \underline{\rho} > 0 \forall t \in [0,T]$ et $u \in L^\infty(0,T\ ;L^2(\Omega))$.

Remarques.
1) Ce résultat généralise les résultats de Antonzev et Kajikov [1], Kajikov [14] où seul le cas $\rho^0 \geq \underline{\rho} > 0$ est considéré (pas de vide) et où la partie 2) n'est pas démontrée.
2) L'unicité est bien sûr ouverte puisque le système (14) - (15) contient le cas homogène i.e. les équations de Navier-Stokes (prendre $\rho^0 \equiv 1$ auquel cas, d'après 2), $\rho \equiv 1$ sur $(0,T) \times \Omega$).
3) Le type d'application des résultats de la section II sous tendue par le résultat précédent peut être appliqué à certains modèles incompressibles de la MHD ou de la théorie $k-\varepsilon$ de la turbulence.

Nous considérons maintenant le cas des équations d'Euler bi-dimensionnelles dans le cas incompressible i.e.

$$(17) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div }(u \otimes u) + \nabla p = 0 \quad \text{dans} \quad (0,\infty) \times \Omega, \text{div} u = 0 \quad \text{dans} \quad (0,\infty) \times \Omega$$

si l'on considère la formulation en vitesses, ou

$$(18) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{div}(u\omega) = 0 \quad \text{dans} \quad (0,\infty) \times \Omega, \text{rot} u = \omega, \text{div} u = 0 \quad \text{dans} \quad (0,\infty) \times \Omega$$

si l'on considère la formulation en vorticité ; dans les deux cas, on impose des conditions initiales : $u_{|t=0} = u^0, \omega_{|t=0} = \omega^0$ dans Ω et $\omega^0 = \text{rot} u^0$, $\text{div} u^0 = 0$ dans Ω. Si $\Omega \neq \mathbf{R}^2$, la condition aux limites de Dirichlet est

$$(19) \qquad u.\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \nu \quad \text{normale unitaire extérieure à} \quad \partial\Omega$$

et dans le cas périodique on suppose u^0, ω^0 périodiques et $\int \omega^0 dx = 0$ et on impose que u, ω soient périodiques. L'existence de solutions classiques uniques est bien connue, le cas "limite" où l'unicité est connue étant lorsque $\omega^0 \in L^\infty, u^0 \in L^2$ (voir Yudovich [21]) : dans tous ces cas, le flot Lagrangien est également uniquement déterminé et ω est constante le long des trajectoires des particules. Hors du cadre régulier, une autre situation présente également un intérêt aussi bien pratique que théorique : il s'agit des nappes de tourbillon où l'on suppose que $u^0 \in L^2$ et que ω^0 est une mesure bornée. Nous renvoyons à A. Majda [19] pour une revue sur les équations d'Euler et en particulier sur ce point particulier et à R.J. DiPerna et A. Majda [9], [10] pour une étude des nappes de tourbillon.

Nous allons ici nous intéresser à la situation intermédiaire : $u^0 \in L^2, \omega^0 \in L^p(1 < p < \infty)$. Dans ce cas, l'existence de solutions faibles est connue dans la formulation en vitesses ($u \in L^\infty(0,\infty;X_p)$ où $X_p = \{u \in L^2, \nabla u \in L^p\}, X_p = W^{1,p} \cap L^2$ si $p \geq 2$) ou dans la formulation en vorticité si $p > 4/3(\omega \in L^\infty(0,\infty;L^p), u \in L^\infty(0,\infty;W^{1,p} \cap L^2)$ d'où $\omega u \in L^\infty(0,\infty;L^q)$ avec $q > 1$ grâce à l'inégalité de Sobolev), voir A. Majda [18], [19] pour ces résultats. A l'aide des résultats de la section II, on obtient aisément le

Théorème 4.—

1) *Il existe une solution renormalisée ω de (18) et u est une solution faible de (17). En particulier, $\omega \in C([0,\infty);L^p)$ et*

$$(20) \qquad \int_\Omega \beta(\omega(t,x))dx = \int_\Omega \beta(\omega^0)dx, \forall t \geq 0, \forall \beta \in C(\mathbf{R};[0,\infty)).$$

2) De plus, toute solution renormalisée ω de (18) est une solution faible si $p \geq 4/3$ et toute solution faible de (18) est une solution renormalisée si $p \geq 2$. Enfin, si $p \geq 2$ et si u est une solution faible de (17), alors $\omega = \mathrm{rot}u$ est une solution renormalisée de (18).

Remarques :

1) La partie 1) du Théorème 4 peut être étendue au cas où $\omega^0 |\log \omega^0| \in L^1$ (on a alors $\omega \in C([0,\infty);L^1), u \in C([0,\infty);W^{1,1})$).

2) De plus, on sait qu'il existe pour chaque solution (ω,u) un unique flot Lagrangien et que ω est constante le long de ce flot.

3) Dans le cas où, par exemple, Ω est borné et on impose des conditions aux limites de Dirichlet, on peut obtenir une solution faible dans $C([0,\infty);L^2)$ en supposant que $\int_0^{\lambda(\Omega)} (\int_0^t \omega^* ds) L^2 \frac{dt}{t} < \infty$, où ω^* désigne le réarrangement décroissant de $|\omega^0|$. Cette condition est légèrement moins restrictive que $\omega^0 |\log \omega^0| \in L^1$.

4) Si $\Omega = \mathbf{R}^2$ ou si on considère le cas périodique, dans la limite où la viscosité ν tend vers 0, la vorticité ω_ν converge (à une sous-suite près) vers la vorticité ω solution renormalisée de (18) dans $C([0,\infty)L^p)$.

Enfin, nous concluons avec une brève remarque sur les équations d'Euler dans le cas incompressible en dimension 3. La persistence de solutions classiques est un problème classique (voir A. Majda [19] pour une description détaillée des phénomènes en jeu, et notamment pour une condition de non explosion, condition due à T. Beale, T. Kato and A. Majda [3]). Nous voulons ici simplement mettre en lumière l'impossibilité de trouver des estimations a priori dans $W^{s,p}(0 < s \leq 1, 1 \leq p < \infty)$ pour les solutions C^∞. La construction de tels exemples est très simple dans le cas de conditions aux limites périodiques sur le cube ($= \Omega$) par exemple. On considère alors des flots de dimension $2,5(!)$ à savoir $u = u(x_1, x_2, t)$ (périodique en x_1, x_2 de période 1 par exemple). Alors, $\bar{u} = (u^1, u^2)$ est solution de l'équation d'Euler bidimensionnelle et u^3 vérifie

$$\frac{\partial u^3}{\partial t} + \text{div}\,(\bar{u}u^3) = 0 \quad \text{dans} \quad (0,\infty) \times C \tag{21}$$

où C désigne le carré unité. L'utilité de nos résultats pour ces flots de dimension $2,5$ nous a été signalée par A. Majda. D'après les résultats de la section II (et le théorème 4), pour toute solution faible $\bar{u}(\in C([0,\infty); W^{1,p}))$ de (17), limite de solutions régulières et si $u_0^3 \in L^2(C)$, il existe une unique solution renormalisée de (21) $u^3 \in C([0,\infty); L^2)$ qui est limite de solutions régulières correspondant à une régularisation de $\bar{u}$ d'une part et de u_0^3 d'autre part et qui est donnée par : $u^3(t,x) = u_0^3(X(t)^{-1}(x))$ p.p. $x \in C$ où X est le flot Lagrangien (unique) correspondant à $\bar{u}$. On peut alors vérifier que si $X(t_0)^{-1}(\cdot)$ n'est pas Lipschitzien pour un temps $t_0 > 0$, alors il existe $u_0^3 \in W^{1,p} \cap L^2$ (par exemple) de norme arbitrairement petite tel que $\|u^3(t)\|_{W^{1,p}}$ explose pour un temps $t \in [0,t_0]$ i.e. $\overline{\lim}_{s\downarrow t}\|u^3(t)\|_{W^{1,p}} = +\infty$ avec $t \in [0,t_0]$. Par approximation, on a ainsi construit une solution régulière vérifiant : $\|u(0)\|_{W^{1,p}\cap L^2} \leq \varepsilon$, $\sup\limits_{t\in[0,t_0]} \|u(t)\|_{W^{1,p}} \geq 1/\varepsilon$ où $\varepsilon > 0, t_0 > 0, p \in [1,\infty)$ sont arbitraires. Le cas $W^{s,p}$ s'obtient de la même façon. Des exemples presque totalement explicites sont possibles même s'ils peuvent cacher la généralité du phénomène : il suffit pour cela de considérer $\bar{u} = (0, u_0^2(x_1))$ de sorte que $u^3 = u_0^3(x_1, x_2 - tu_0^2(x_1))$ et on choisit alors u_0^3 et u_0^2 de manière convenable. Les quelques résultats et remarques qui précèdent concernant l'équation d'Euler bi et tridimensionnelle seront détaillés dans [6].

References

[1] Antonzev et Kajikov : Mathematical study of flows of nonhomogeneous fluids. Novosibirsk Lectures, 1973.

[2] V. Arnold : **Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique**, Editions Mir, Moscou, 1976.

[3] T. Beale, T. Kato et A. Majda : Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3D Euler equations. Comm. Math. Phys., **94** (1984), p.61-66.

[4] R.J. DiPerna et P.L. Lions : Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. A paraître dans Inventiones.

[5] R.J. DiPerna et P.L. Lions : Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson. Comptes-Rendus Acad. Sci. Paris, **397** (1988), p. 655-658, et article détaillé en préparation.

[6] R.J. DiPerna et P.L. Lions : Remarks on incompressible Fluid Mechanics models, en préparation.

[7] R.J. DiPerna et P.L. Lions : Propagation of chaos in Vlasov Kinatic models, en préparation.

[8] R.J. DiPerna et P.L. Lions : On the global existence for Boltzmann equations : global existence and weak stability, à paraître aux Ann. Math.

[9] R.J. DiPerna et A. Majda : Concentrations in regularizations for 2.D incompressible flow. Comm. Pure Appl. Math.

[10] R.J. DiPerna et A. Majda : Reduced Haussdorff dimension and concentration cancellation for 2.D incompressible flow. J. Amer. Math. Soc.

[11] D. Ebin et J. Marsden : Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. Ann. Math., **92** (1970), p.102-163.

[12] C. Foias, C. Guillopé et R. Téman : Lagrangian representation of a flow. J. Diff. Eq., **57** (1985), p.440-449.

[13] E. Hopf : Uber die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichangen. Math. Nacht., **4** (1951), p.213-231.

[14] Kajikov : Resolution of boundary value problems for nonhomogeneous viscous fluids. Dokl. Akad. Nauk., **216** (1974), p.1008-1010 (en Russe).

[15] J. Leray : Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. J. Math. Pures Appl., **12** (1933), p.1-82.

[16] J. Leray : Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois. J. Maths Pures Appl., **13** (1934), p. 331-418.

[17] J. Leray : Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. Acta Math., **63** (1934), p.193-248.

[18] A. Majda : Mathematical Foundations of Incompressible Fluid Flow, Lecture Notes, Princeton Math. Dept., 1985.

[19] A. Majda : Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow. Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986), p.187-220.

[20] G. Ponce : Remarks on a paper by J.T. Beale, T. Kato and A. Majda. Comm. Math. Phys., **98** (1985), p.349-353.

[21] V.I. Yudovich : Non-stationary flow of an ideal incompressible liquid. Zh. Vych. Mat., **3** (1963), p.1032-1066 (en Russe).