

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. GÉRARD

Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. n° 3, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988__A3_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PROLONGEMENT MEROMORPHE DE LA MATRICE DE SCATTERING POUR DES PROBLEMES A DEUX CORPS A LONGUE PORTEE

C. GERARD

en collaboration avec A. MARTINEZ

0. Introduction

On s'intéresse dans ce travail aux propriétés analytiques de la matrice de scattering $S(\lambda)$ associé à un opérateur de Schrödinger sur $\mathbf{R}^n$ $H = -h^2\Delta + V$, où V est un potentiel réel à longue portée. On cherche en particulier à établir rigoureusement la relation entre les particules de durée de vie finie appelées résonances par les physiciens, et des pôles pour des énergies complexes de la matrice de scattering $S(\lambda)$.

Les résonances physiques sont observées sous forme de pics (pics de Breit-Wigner) sur la section efficace de diffusion d'une réaction. La forme caractéristique de la plupart de ces pics (en $\frac{\Gamma}{(\lambda - \lambda_0^2 + \Gamma^2)}$) fait penser qu'ils proviennent de pôles de la section de diffusion placés dans le complexe au point $\lambda_0 - i\Gamma$. Cette idée est justifiée dans le cas du scattering par un potentiel radial (voir par exemple [La.Li]) par l'existence d'un prolongement méromorphe en λ des amplitudes partielles de diffusion. Mathématiquement il n'y a pas de définition intrinsèque des pôles de la matrice S , sauf pour un potentiel à support compact grâce à la théorie de Lax-Phillips.

Par contre depuis les travaux de Aguilar-Combes [Ag-Co] et Balslev-Combes [Ba-Co], étendus ensuite par beaucoup d'auteurs (voir par exemple [Si 1],[Hu],[Cy],[He-Sj]), on sait prolonger de façon méromorphe en λ la résolvante $(H - \lambda)^{-1}$ dans $\text{Im } \lambda \leq 0$. On a besoin pour cela de conditions assez fortes sur le potentiel, qui sont essentiellement de deux types :

- décroissance exponentielle à l'infini, ou prolongement holomorphe à l'infini dans un voisinage conique de $\mathbf{R}^n$.

Le problème naturel qui se pose alors (énoncé par Simon dans [Si 2]) est double :

- montrer l'existence (en un sens à définir) d'un prolongement méromorphe de $S(\lambda)$ (problème du prolongement)
- montrer que les pôles de $S(\lambda)$ coïncident exactement (avec leur multiplicité algébrique) avec ceux de $(H - \lambda)^{-1}$ (problème de l'identification).

Ces deux problèmes ont été résolus par différents auteurs pour des classes de plus en plus grandes de potentiels (voir par exemple [S.T],[Si 2],[B1],[B2],[Je],[Ag-Kl]), qui sont cependant toujours à courte portée i.e. décroissant à l'infini comme $\|x\|^{-\rho}$ pour $\rho > 1$.

Enfin ces problèmes ont été abordés dans le cas de systèmes à N corps, où on n'a que des résultats très partiels, à cause de la grande complication des équations de résolvante du type Faddeev ou Weinberg-Van Winter. (voir par exemple Dereziński [De]).

1. Rappels de théorie de la diffusion et résultats

Dans la théorie du scattering quantique, on cherche à comparer l'évolution du système d'Hamiltonien H donnée par l'opérateur unitaire e^{-itH} avec l'évolution libre e^{-itH_0} où $H_0 = -h^2\Delta$.

Pour cela on introduit les opérateurs d'onde :

$$(1.1) \quad W^\pm = s. \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-itH} e^{itH_0}$$

$W^\pm$ existent et sont complets (i.e. $\text{Im} W^\pm = \mathcal{H}_{ac}$, où $\mathcal{H}_{ac}$ est le sous-espace spectral absolument continu de H), pour une large classe de potentiels à courte portée. Dans le cas d'un potentiel à longue portée i.e. décroissant à l'infini comme $\|x\|^{-\rho}$ pour $0 < \rho \leq 1$, l'influence du potentiel se fait sentir jusqu'à l'infini et il faut modifier les opérateurs d'onde, i.e. comparer e^{-itH} à une autre dynamique que e^{-itH_0} .

L'approche la plus utilisée est de prendre comme dynamique libre $e^{-iW(t)}$ où $W(t)$ est un opérateur pseudodifférentiel de symbole $W(\xi, t)$ solution de l'équation de Hamilton-Jacobi : $\frac{\partial W}{\partial t} = \|\xi\|^2 + V(\frac{\partial W}{\partial \xi})$, dans certaines régions de l'espace des phases. (Voir par exemple [Hö]).

Récemment Isozaki et Kitada [I.K1],[I.K2] ont introduit des modificateurs indépendants du temps : on considère les opérateurs d'onde modifiés :

$$(1.2) \quad W_J^\pm = s. \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-itH} J e^{itH_0}$$

où J est un opérateur intégral de Fourier qui entrelace H et H_0 dans de grandes régions de l'espace des phases.

On définit alors l'opérateur de scattering

$$S = W_J^{-*} W_J^+$$

qui est unitaire sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. Comme S commute avec H_0 , S se décompose sur la décomposition spectrale du laplacien comme $S = \int_{\mathbf{R}^+} S(\lambda) dE_{0\lambda}$, où $S(\lambda)$ est la matrice de scattering à l'énergie λ définie de $L^2(S^{n-1})$ dans $L^2(S^{n-1})$.

Donnons maintenant le résultat :

On considère $H = -h^2\Delta + V$ où $h \in]0, 1]$ est un paramètre et V est un potentiel réel qui s'écrit sous la forme suivante :

$$V(x) = V_L(x) + V_s(x)$$

avec :

(1.2) $V_L \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ et $\exists \rho \in]0, 1], \varepsilon_0 > 0, R_0 > 0$ tels que V_L se prolonge holomorphiquement dans $D = \{x \in \mathbf{C}^n | \langle \text{Re } x \rangle \geq R_0, |\text{Im } x| \leq \varepsilon_0 \langle \text{Re } x \rangle\}$ et y vérifie : $|V(x)| = O(\langle x \rangle^{-\rho})$.

(1.3) $V_s(x)$ est un potentiel à support compact tel que $V_s(\Delta + i)^{-1}$ est compact.

Théorème 1.1.— Sous les hypothèses (1.2),(1.3), il existe un voisinage complexe U de $\mathbf{R}_-^+$ indépendant de h tel que :

- si $\rho < 1$, $S(\lambda)$ se prolonge méromorphiquement en λ dans U comme opérateur de $G^s(S^{n-1})$ dans $G^s(S^{n-1})$ et de $G^s(S^{n-1})'$ dans $G^s(S^{n-1})'$ pour tout $s \in]1, (1-\rho)^{-1}[$.
- si $\rho = 1$, $S(\lambda)$ se prolonge méromorphiquement en λ dans U comme opérateur de $C^\infty(S^{n-1})$ dans $C^\infty(S^{n-1})$ et de $D'(S^{n-1})$ dans $D'(S^{n-1})$.
- les résidus de $S(\lambda)$ en un pôle λ_0 sont de rang fini et ont des noyaux analytiques sur $S^{n-1} \times S^{n-1}$.
- le noyau de $S(\lambda)$ est analytique pour $(\omega, \omega') \in S^{n-1} \times S^{n-1}, \omega \neq \omega'$.

Corollaire 1.2.— Les pôles de $S(\lambda)$ sont parmi les résonances de H .

Remarque :

- Agmon et Klein ont étudié ce problème pour un potentiel V à symétrie sphérique. Dans ce cas $S(\lambda)$ se diagonalise sur la base des harmoniques sphériques Y_ℓ^m et la croissance des valeurs propres de $S(\lambda)$ est en $\exp(\ell^{1-\rho})$, ce qui correspond exactement à l'indice critique $s = \frac{1}{1-\rho}$ dans le théorème 1.1.
- La notion de résonances utilisée est celle obtenue par la méthode des distortions analytiques de Hunziker [Hu]. D'après Helffer-Martinez [He-Ma] ces résonances sont les mêmes que celles définies par Helffer et Sjöstrand dans le cas semi-classique. (voir [He-Sj]).

Exemple : Considérons le hamiltonien d'un électron dans une molécule avec des noyaux fixes (i.e. de masse très grande par rapport à celle de l'électron). $H = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + \sum_1^N a_i(x - r_i)^{-1}$. Notre théorème s'applique à ce hamiltonien.

Idée de la démonstration :

On utilise la formule de représentation démontrée par Isozaki-Kitada dans [I-K2] pour $\lambda \in \mathbf{R}_*^+$:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} S(\omega, \omega', \lambda, h) = & \delta(\omega - \omega') - 2i\pi\lambda^{n/2-1}(2\pi h)^n \times \\ & \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(\varphi_2(x, \sqrt{\lambda}\omega') - \varphi_1(x, \sqrt{\lambda}\omega)) / h} t_2(x, \sqrt{\lambda}\omega', h) \bar{a}_1(x, \sqrt{\lambda}\omega, h) dx \\ & + 2i\pi\lambda^{n/2-1}(2\pi h)^{-n} \times \\ & \int_{\mathbf{R}^n} R(\lambda + i0) (e^{i\varphi_2(., \sqrt{\lambda}\omega') / h} t_2(., \sqrt{\lambda}\omega', h)) e^{-i\varphi_1(x, \sqrt{\lambda}\omega) / h} \bar{t}_1(x, \sqrt{\lambda}\omega, h) dx. \end{aligned}$$

Ici - $\varphi_1(x, \xi)$ et $\varphi_2(x, \xi)$ sont des solutions de l'équation eikonale $(\frac{\partial \varphi}{\partial x})^2 + V_L(x) = \xi^2$ dans des régions entrantes et sortantes de l'espace des phases du type $\Gamma = \{(x, \xi) \in T^*(\mathbf{R}^n) \mid |x| \geq R, |\xi| \geq d, x \cdot \xi \leq \sigma_i^- |x| |\xi| \text{ ou } x \cdot \xi \geq \sigma_i^+ |x| |\xi|\}$. De plus $\varphi_i(x, \xi)$ est asymptotique à $x \cdot \xi$ à l'infini, au sens que :

$$|D_x^\alpha(\varphi_i(x, \xi) - x \cdot \xi)| \leq C_\alpha < x >^{1-\rho-|\alpha|}.$$

- $a_1(x, \xi, h)$ est un symbole solution des équations de transport $2\nabla_x \varphi \cdot \nabla_x a_1 + \Delta_x \varphi_1 a_1 + ih \Delta_x a_1 = 0$ dans des régions du type de Γ . Ces phases et amplitudes sont utilisées par

Isozaki-Kitada pour construire des modificateurs J_i sous la forme :

$$J_i u(x, h) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(\varphi_i(x, \xi) - y \cdot \xi)/h} a_i(x, \xi, h) u(y) dy d\xi.$$

J_i vérifie $HJ_i - J_i H_0 = T_i$ avec :

$$T_i u(x, h) = (2\pi h)^{-n} \int e^{i(\varphi_i(x, \xi) - y \cdot \xi)/h} t_i(x, \xi, h) u(y) dy d\xi.$$

De plus le support essentiel de t_1 (resp. t_2) est inclus dans une région $\{x \cdot \xi \leq \sigma_1^- |x| \cdot |\xi|\}$ avec $\sigma_1^- < 0$ (resp. $\{x \cdot \xi \geq \sigma_2^+ |x| \cdot |\xi|\}$ avec $\sigma_2^+ > 0$).

- Enfin $R(\lambda + i0)$ désigne la valeur au bord de la résolvante $R(\lambda) = (H - \lambda)^{-1}$ à partir du $1/2$ plan supérieur.

Ecrivons $S(\omega, \omega', \lambda, h) = \delta(\omega - \omega') + f(\omega, \omega', \lambda, h) + g(\omega, \omega', \lambda, h)$ où g est le terme de (2.1) où figure $R(\lambda + i0)$.

La démonstration se décompose en plusieurs étapes :

(On renvoie à [Ge-Ma2] pour les détails).

Etape 1 : On va supposer pour simplifier les notations que $V_s = 0$. Sous l'hypothèse (1.2), on montre que on peut construire les phases φ_i et les symboles a_i dans des voisinages complexes de Γ de la forme

$$\Gamma^C = \left\{ (x, \xi) \in T^* \mathbb{C}^n \mid |Re x| \geq R, Re x \cdot Re \xi \leq \sigma_1^- |Re x| |Re \xi| \right. \\ \left. \text{ou } Re x \cdot Re \xi \geq \sigma_1^+ |Re x| |Re \xi|, \quad |Im \xi| \leq \varepsilon_0, \quad |Im x| \leq \varepsilon_0 \langle Re x \rangle \right\}.$$

Un point essentiel est de montrer que $a(x, \xi, h) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x, \xi) h^k$ peut être construit comme un symbole analytique i.e. vérifiant $|a_k(x, \xi)| \leq C^{k+1} k^k \langle x \rangle^{-k}$ sur Γ^C . En prenant une réalisation holomorphe de a_i on voit que $t_i(x, \xi, h)$ est $O(e^{-\varepsilon_0 \langle x \rangle / h})$ dans $\{Re x \cdot Re \xi \geq \sigma_1^- |Re x| |Re \xi|\}$ pour $i = 1$ et dans $\{Re x \cdot Re \xi \leq \sigma_2^+ |Re x| |Re \xi|\}$ pour $i = 2$, avec $\sigma_1^- < 0$, $\sigma_2^+ > 0$.

Dans la construction des a_i et t_i interviennent certaines troncatures homogènes de degré 0 que l'on prendra dans $\cap_s G^s(S^{n-1})$.

Etape 2 : prolongement de $g(\omega, \omega', \lambda, h)$

Pour prolonger λ on va employer une méthode due à Hunziker [Hu], la méthode des distortions analytiques :

pour μ réel $|\mu|$ assez petit, on pose : $U_\mu \varphi(x) = j_\mu(x)^{1/2} \varphi(x + \mu v(x))$, où $v(x) = x\chi(|x|)$, $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, $\chi = 0$ pour $|x| \leq R$, $\chi = 1$ pour $|x| \geq 2R$, où R est choisi assez grand, et $j_\mu(x)$ est le Jacobien de $x \mapsto x + \mu v(x)$.

U_μ est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ et $U_\mu H U_\mu^{-1}$ se prolonge analytiquement en μ comme opérateur sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ de domaine $H^2(\mathbf{R}^n)$ pour μ complexe $|\mu|$ assez petit.

On note $R_\mu(\lambda) = (U_\mu H U_\mu^{-1} - \lambda)^{-1}$ sa résolvante, qui est définie et méromorphe pour λ complexe $|Im \lambda| \ll |Im \mu|$. les pôles de $R_\mu(\lambda)$ sont précisément les résonances de H .

Dans (2.1), on écrit alors pour μ réel :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \langle R(\lambda + i0) e^{i\varphi_2} t_2, e^{i\varphi_1} t_1 \rangle = \\ & \langle U_\mu^{-1} R_\mu(\lambda + i0) U_\mu e^{i\varphi_2} t_2, e^{i\varphi_1} t_1 \rangle = \langle R_\mu(\lambda + i0) U_\mu e^{i\varphi_2} t_2, U_\mu e^{i\varphi_1} t_1 \rangle. \end{aligned}$$

Pour donner un sens à $U_\mu(e^{i\varphi_2} t_2)$ et $U_\mu(e^{i\varphi_1} t_1)$ pour μ complexe on utilise le fait que φ_i et a_i sont holomorphes en $|x|$ et $|\xi|$ dans une région $\{Re|x| \geq R/2, Im|x| \leq \varepsilon Re|x|\}$.

De plus comme t_2 est essentiellement supporté dans $Re x, Re \xi \geq \sigma_2^+ |Re x| |Re \xi|$ et que $\varphi_2 = x \cdot \xi + 0(< x >^{1-\rho})$ on voit que $U_\mu(e^{i\varphi_2(x, \sqrt{\lambda}\omega)/h} t_2(x, \sqrt{\lambda}\omega, h)) = 0(e^{-\varepsilon < x > / h})$ uniformément pour $\omega \in S^{n-1}$ et pour $|Im \lambda| \ll Im \mu$.

On a le même résultat pour $U_\mu(e^{i\varphi_1} t_1)$ ce qui donne un sens à (2.2) pour λ complexe.

En suivant une suggestion de Bony, on peut remplacer les fonctions troncatures intervenant dans t_1 et t_2 par des fonctions à support compact dans une classe non quasi-analytique arbitraire, ce qui montre que les résidus de $g(\omega, \omega', \lambda, h)$ en un pôle λ_0 sont des fonctions analytiques sur $S^{n-1} \times S^{n-1}$.

Etape 3 : Prolongement de $f(\omega, \omega', \lambda, h)$

L'existence d'un prolongement pour $f(\omega, \omega', \lambda, h)$ comme opérateur de $G^s(S^{n-1})$ dans $G^s(S^{n-1})$ et de $G^s(S^{n-1})'$ dans $G^s(S^{n-1})'$ provient facilement des résultats de continuité dans les classes de Gevrey des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre infini.

Pour $\lambda \in \mathbf{R}_*^+$, on écrit :

$$f(\omega, \omega', \lambda, h) = \int e^{i(\sqrt{\lambda}(\omega' - \omega)x + 0(< x >^{1-\rho})/h)} \bar{a}_1(x, \sqrt{\lambda}\omega, h) t_2(x, \sqrt{\lambda}\omega', h) dx.$$

En négligeant les termes qui viennent du fait que a_1 et t_2 sont nuls pour x près de 0, on se ramène par un changement de variable à :

$$f = \int e^{i(\omega' - \omega)y/h} e^{0(< y >^{1-\rho})/h} \bar{a}_1(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\omega, h) t_2(\lambda^{-1/2}y, \lambda^{1/2}\omega', h) dy.$$

où le $0(< y >^{1-\rho})$ reste imaginaire pur. Pour λ complexe le $0(< y >^{1-\rho})$ a une partie réelle non nulle. Il suffit maintenant de le considérer comme une amplitude et d'utiliser par exemple les résultats de Cattabriga-Zanghirati [Ca-Za] pour vérifier que f est continu de $G^s(S^{n-1}) \rightarrow G^s(S^{n-1})$ et de $G^s(S^{n-1})' \rightarrow G^s(S^{n-1})'$ pour $0 < s < (1 - \rho)^{-1}$.

Problèmes ouverts :

- En utilisant ce résultat, un problème intéressant est de démontrer rigoureusement la validité des formules de Breit-Wigner sur la section totale de diffusion par exemple dans le cas des résonances de forme. Dans [Ge-Ma1], nous avons montré la validité de ces formules en ce qui concerne la fonction spectrale de H .
- Un autre problème intéressant (et certainement difficile) est d'étudier les propriétés analytiques des matrices de scattering pour des systèmes à N -corps. Le cas des potentiels à longue portée et celui des énergies assez élevées pour permettre des décompositions en plus de deux corps est pratiquement ouvert.

Bibliographie

- [Ag-Co] J. Aguilar, J.M. Combes. A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger hamiltonians, *Comm. Math. Phys.* 22 (1971) p.269- 279.
- [Ag-Kl] S. Agmon, M. Klein. Communication personnelle.
- [B1] E. Balslev. Analytic scattering theory for two-body Schrödinger operators, *J. Functional Anal.* 29 (1978), 375-396.
- [B2] E. Balslev. Local spectral deformation techniques for Schrödinger operators *J. Functional Anal.* 58 (1984), 79-105.
- [Ba-Co] E. Balslev, J.M. Combes. Spectral theory of many-body Schrödinger operators with dilation-analytic interactions, *Comm. Math. Phys.* 22 (1971) 280-294.
- [Ca-Za] L. Cattabriga, L. Zanyhirati. Fourier integral operators of infinite order on Gevrey spaces. Applications to the Cauchy problem for hyperbolic operators in *Advances in Microlocal Analysis Série C. Vol. 168. Nato ASI Series.*
- [Cy] H.L. Cycon. Resonances defined by modified dilations, *Helv. Phys. Acta* 58 (1985) p.969-981.
- [De] J. Dereziński. Existence and analyticity of many-body scattering amplitudes at low energies, *J. Math. Phys.* 28 (1984) p.1080-1088.
- [Ge-Ma1] C. Gérard, A. Martinez. Semiclassical asymptotics for the spectral function of long range Schrödinger operators, soumis à *J. Functional Anal.*
- [Ge-Ma2] C. Gérard, A. Martinez. Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée. Manuscrit.
- [He-Ma] B. Helffer, A. Martinez. Comparaison entre les diverses notions de résonances, à paraître dans *Helv. Phys. Acta.*
- [He-Sj] B. Helffer, J. Sjöstrand. Résonances en limite semiclassique, *Bull. de la S.M.F.* mémoire n°24/25 114 (1986).
- [Ho] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators IV* Springer Verlag (1984).
- [Hu] W. Hunziker. Distortion analyticity and molecular resonances curves, *Ann. I.H.P. section A* (1986).
- [I.K1] H. Isozaki, H. Kitada. Modified wave operators with time independent modifiers, *J. Fac. Sci. Tokyo Univ. Sect.IA* 32 (1985) p.77-104.
- [I.K2] H. Isozaki, H. Kitada. Scattering matrices for two-body Schrödinger operators, *Scientific Papers of the College of Arts and Sciences, Tokyo Univ.* 35 (1985) p.85-107.

- [Je] A. Jensen. Local distortion technique, resonances and poles of the S-matrix, J. Math. Anal. Appl. 59 (1977) p.505-513.
- [La-Li] L. Landau, E. Lifchitz. Mécanique quantique Editions Mir (1967).
- [S.T] N. Shenk, D. Thoe. Resonant states and poles of the scattering matrix for perturbations of $-\Delta$, J. Math. Anal. Appl. 37 (1972) p.467-491.
- [Si1] B. Simon. The definition of molecular resonance curves by the method of exterior complex scaling, Phys. Lett. 71 A (1979) p.211-214.
- [Si2] B. Simon. Resonances in N-body quantum systems with dilation analytic potentials and the foundation of time dependent perturbation theory, Ann. Math. 97 (1973) p.247-272.

Ch. GERARD
 Centre de Mathématiques
 Ecole Polytechnique
 91128 PALAISEAU CEDEX