Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Métivier

Interaction de chocs

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. n° 6, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A6_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE BONY-SJÖSTRAND-MEYER 1984-1985

INTERACTION DE CHOCS

par G. METIVIER

Exposé n°VI

18 Décembre 1984

Introduction.

Ce travail a été inspiré par la lecture des articles [4] et [5] où A. Majda a construit et étudié la stabilité des chocs, pour des systèmes de lois de conservation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(u) = 0 \tag{1.1}$$

en dimension d'espace $n \geq 2$. L'idée de Majda est de résoudre le problème de Cauchy pour (1.1) avec une donnée initiale discontinue à travers une hypersurface. Bien entendu, il doit imposer des conditions de compatibilité très fortes sur les données initiales, pour obtenir une solution qui ne présente qu'un seul choc : en général on s'attend à ce que la solution d'un tel problème de Cauchy présente N singularités, ondes de choc ou ondes de rarefaction. (N étant la dimension du système).

Dans le travail présenté ici, on a d'abord voulu mener au bout de la résolution de ce problème de Cauchy avec donnée initiale discontinue à travers une surface, dans le cas où la solution ne présente que des chocs. Pour simplifier les calculs on se placera en dimensions $n = N = 2$, mais la méthode s'applique pour les dimensions supérieures, avec $n \leq N$, (cf. remarque 2.2). Ensuite, on a étudié un problème essentiellement voisin : celui de l'interaction (ou du croisement) de deux chocs, la donnée de Cauchy n'étant plus sur $t = 0$, mais sur une hypersurface qui contient l'intersection des deux surfaces de chocs incidentes.

Le plan de cet exposé est en gros le suivant : dans une première partie, nous allons préciser le problème et les résultats, et ramener l'étude à la résolution d'un problème de Goursat à frontières libres (les surfaces de choc). Comme d'habitude, par changement de variables, on rigidifie les frontières, mais la contrepartie est que les conditions aux limites deviennent essentiellement pseudodifférentielles.

La seconde partie de l'exposé consistera à esquisser un plan d'étude pour ce problème de Goursat.

La démarche suivie est donc tout à fait parallèle à celle de A. Majda qui ramène l'étude d'un choc à l'étude d'un problème mixte hyperbolique.

2. Chocs - Stabilité des chocs

Considérons un système (1.1) qui, dans toute la suite sera supposé strictement hyperbolique, ou au moins symétrisable. Pour être clair, précisons d'abord ce que nous appellerons choc pour une solution (faible) de (1.1) : il s'agit d'une discontinuité de première espèce à travers une surface S ; sur un voisinage Ω de $(t_o,x_o) \in S$, l'espace est partagé en deux composantes, Ω_+ et Ω_- , et les restrictions $u^{\pm}$ de u à $\Omega_{\pm}$ sont solutions régulières de (1.1) ; dire que u est solution au sens distribution de (1.1) revient à satisfaire la condition de saut :

$$(2.1) \qquad \nu_o[u^+ - u^-] + \sum_{j=1}^{n} \nu_j[f_j(u^+) - f_j(u^-)] = 0 \quad \text{sur} \quad S$$

où $(\nu_o, \nu_1,\dots,\nu_n)$ est la normale à S .

En outre, on demande à u de satisfaire certaines conditions, dites conditions d'entropie. Ici, nous demanderons à la discontinuité d'être uniformément stable au sens de A. Majda [4] .

Rappelons brièvement la signification de ce terme : considérons d'abord le cas d'un choc plan, c'est à dire le cas où S est un hyperplan (disons d'équation $x_n = \rho t$), et où $u^{\pm} = \underline{u}^{\pm}$ sont des constantes. L'idée de Majda, est de décrire la stabilité de cette solution $\underline{u}$, vis à vis des perturbations $u_\varepsilon^{\pm} = \underline{u}^{\pm} + \varepsilon\, v^{\pm}$ des fonctions $\underline{u}^{\pm}$, mais aussi de la surface S , devenant de la forme S_ε d'équation $x_n = \rho t + \varepsilon\phi(t,x')$. Par linéarisation de (1.1) et (2.1), cela conduit à un système du type :

$$(2.2) \qquad \begin{cases} L(\underline{u}^{\pm})\, v^{\pm} = f^{\pm} & \text{dans } \pm (x_n - \rho t) > 0 \\ F(\underline{u},\rho)\, (d\phi, v) = g & \text{sur } \quad x_n = \rho t \end{cases}$$

où $L(\underline{u}^{\pm})$ est un système différentiel du premier ordre à coefficients constants, et $F(\underline{u},\rho)$ un système de N équations linéaires à coefficients constants, en $d\phi$, et $v^{\pm}$.

Un changement de variables $\tilde{x}_n = x_n - \rho t$ et une symétrie par rapport à $\tilde{x}_n$ pour v^- , ramènent le système (2.2) en un système de la forme :

$$(2.3) \qquad \begin{cases} L(\underline{u},\rho)\ v^{\pm} = f^{\pm} & \text{dans } \tilde{x}_n > 0 \\ F(\underline{u},\rho)(d\phi,v) = g & \text{sur } \tilde{x}_n = 0 \end{cases}$$

Par définition, le choc plan est uniformément stable (A. Majda [4]) si le système(2.3) vérifie une condition de Lopatinski uniforme, condition que l'on peut expliciter algébriquement (du moins en théorie).

Plusieurs remarques s'imposent :

Remarque 2.1 : cette condition d'uniforme stabilité est toujours plus forte que les habituelles conditions de choc de P.D. Lax [2] , que l'on peut écrire de la manière suivante : notons $\lambda_j(u)$ les valeurs propres (réelles par hyperbolicité) de $f_n'(u)$, ordonnées de façon croissantes ; alors il existe un entier k tel que

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \lambda_{k-1}(\underline{u}^-) < \rho < \lambda_k(\underline{u}^-) \\ \lambda_k(\underline{u}^+) < \rho < \lambda_{k+1}(\underline{u}^+) \end{cases}$$

On dit alors qu'il s'agit d'un k-choc.

Rappelons qu'un choc est dit faible si $u^+ - u^-$ est très petit, et qu'il est vraiment non linéaire (dans la direction x_n) si on a :

$$(2.5) \qquad \Gamma_k(u).\mathrm{grad}_u\, \lambda_k(u) \neq 0 .$$

où Γ_k est un vecteur propre de $f_n'(u)$ pour la valeur propre λ_k (supposée simple).

Alors,toujours selon Majda, pour un choc faible vraiment non linéaire, en dimension n = 1 , les conditions de choc de Lax (2.4), sont équivalentes à l'uniforme stabilité (et d'ailleurs à toute condition d'entropie raisonnable, Lax [3]).

Remarque 2.2. : un calcul explicite montre que pour n = N = 2, et pour un choc faible vraiment non linéaire dans un système strictement hyperbolique

les conditions de choc (2.4) sont encore équivalentes à la stabilité uniforme.

Remarque 2.3 : comme l'a remarqué Majda, la stabilité uniforme ne peut avoir lieu que si $n \leqslant N$. En effet une des conditions requises est que le système $F(\underline{u},\rho)$ soit elliptique en $d\phi$.

Revenons maintenant à une solution faible u de (1.1) ayant une discontinuité à travers une surface S (disons d'équation $x_n = \varphi(t,x')$.) On peut répéter l'opération de linéarisation de (1.1), (2.1), et après changement de variables cela conduit à un système du type :

$$(2.6) \qquad \begin{cases} L(u^{\pm},\varphi)v^{\pm} = f^{\pm} & \text{dans } \tilde{x}_n > 0 \\ F(u,\varphi)(d\phi,v) = g & \text{sur } \tilde{x}_n = 0 \end{cases}$$

On dit que le choc est uniformément stable si ce système vérifie la condition de Lopatinski uniforme ; cela revient à dire que pour tout $(t_o,x_o) \in S$ le choc plan obtenu en remplaçant S_o par son plan tangent, et $u^{\pm}$ par les valeurs $\underline{u}^{\pm} = u^{\pm}(t_o,x_o)$, est uniformément stable.

L'objet du travail [4] de Majda, est de montrer que cette condition de stabilité implique que le problème mixte (2.6), avec f, g, v, ϕ nuls pour $t < 0$, est bien posé.

Dans toute la suite de l'exposé, les chocs seront toujours supposés uniformément stables, en particulier grace à la remarque 2.2.

3. Problème de Cauchy.

Considérons un système de deux lois de conservation

$$(3.1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) + \frac{\partial}{\partial y} g(u) = 0$$

où l'inconnue u est une fonction des variables $(t,x,y) \in \mathbb{R}^3$. Nous supposerons ce système strictement hyperbolique :

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \text{pour tout } u \in \mathbb{R}^2 \text{ , tout } (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0 \text{ la matrice} \\ \xi f'(u) + \eta g'(u) \text{ a deux valeurs propres réelles distinctes.} \end{cases}$$

On se donne $u_o(x,y)$ discontinue à travers une courbe C^{∞} S_o . On supposera, que sur un voisinage ω de l'origine, S_o est d'équation

$x = \varphi_o(y)$, et on notera $u_o^{\pm}$ la restriction de u_o à $\omega^{\pm} = \omega \cap \{\pm(x - \varphi_o(y)) > 0\}$. On supposera que $\varphi_o'(0) = 0$, et que $u_o^{\pm} \in C^{\infty}(\bar{\omega}^{\pm})$.

Pour résoudre le problème de Cauchy avec donnée initiale

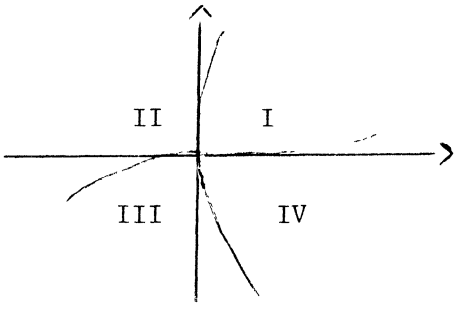
$$u_{|t=o} = u_o \tag{3.3}$$

il est naturel de regarder le problème modèle obtenu en remplaçant S_o par sa tangente, et $u_o^{\pm}$ par leurs valeurs à l'origine :

$$\underline{u}_o(x,y) = \begin{cases} u_o^+(0,0) = \underline{u}^+ & \text{si } x > 0 \\ u_o^-(0,0) = \underline{u}^- & \text{si } x < 0 \ . \end{cases} \tag{3.4}$$

Pour le problème (3.1) avec donnée initiale $\underline{u}_o$, il est naturel de chercher une solution indépendante de y ; on est alors ramené à un problème en dimension n = 1 , entièrement résolu par Lax [2] dans le cas d'une discontinuité faible. Dans ce cas, et lorsque les valeurs propres de f'(u) sont vraiment non linéaires, la solution (d'entropie) présente en général deux singularités, ondes de choc ou onde de rarefaction. On peut schématiser la situation de la manière suivante : considérant $\underline{u}^-$ comme fixé, le plan des $\underline{u}^+ - \underline{u}^-$ est coupé en quatre zones

(3.5)

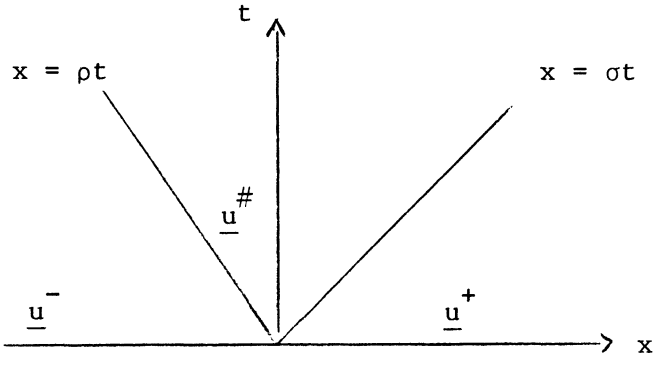


et pour $\underline{u}^+ - u^-$ dans la zone I , la solution présente deux ondes de choc, dans les zones II et IV, 1 onde de choc 1 onde de rarefaction et dans la zone II, deux ondes de raréfaction.

Chaque singularité est associée à une valeur propre de f'(u), et les courbes séparant les zones, correspondent à la disparition d'une singularité, ou à sa mutation d'un type en un autre.

Par exemple, si $\underline{u}^+ - \underline{u}^-$ est dans la zone I, la solution se présente sous la forme :

$$(3.6)\quad u(t,x,y) = \begin{cases} \underline{u}^{+} & \text{pour} \quad x > \sigma t \\ \underline{u}^{+} & \text{pour} \quad \sigma t > x > \rho t \\ \underline{u}^{-} & \text{pour} \quad x < \rho t \end{cases}$$



avec $\rho < \sigma$, les conditions de choc de Lax, s'écrivant :

$$(3.7)\quad \begin{cases} \lambda_1(\underline{u}^{\#}) < \rho < \lambda_1(\underline{u}^{-}) \;\; ; \;\; \rho < \lambda_2(\underline{u}^{\#}) \\ \lambda_2(\underline{u}^{+}) < \sigma < \lambda_2(\underline{u}^{\#}) \;\; ; \;\; \sigma > \lambda_1(\underline{u}^{\#}) \end{cases}$$

où l'on a noté $\lambda_1(u) < \lambda_2(u)$ les valeurs propres de $f'(u)$

Revenant au problème (3.1) (3.3), il est alors naturel de chercher une solution "perturbée" présentant deux chocs issus de la courbe S_o . Plus précisément, on cherche des fonctions $\varphi(t,y)$ et $\psi(t,y)$ telles que

$$(3.8)\quad \begin{cases} \varphi(t,y) < \psi(t,y) & \text{pour } t > 0 \\ \varphi(o,y) = \psi(o,y) = \varphi_o(y) \end{cases}$$

et des fonctions u^{+} , u^{-} et $u^{\#}$, régulières, telles que la fonction u suivante soit solution faible de (3.1) (3.3) :

$$(3.9)\quad u(t,x,y) = \begin{cases} u^{+}(t,x,y) & \text{pour } x > \psi(t,y) \\ u^{\#}(t,x,y) & \text{pour } \psi(t,y) > x > \varphi(t,y) \\ u^{-}(t,x,y) & \text{pour } \varphi(t,y) > x \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème nous faisons les hypothèses suivantes :

(H.1) Posant $\underline{u}^{\pm} = \underline{u}_o^{\pm}(0,0)$, il existe $\underline{u}^{\#}$, ρ et σ tels que la fonction $\underline{u}$, (3.6) soit solution faible de (3.1), les conditions de choc (3.7) étant satisfaites.

(H.2) Les chocs plans de $\underline{u}$ sont uniformément stables.

(H.3) Si l'on note $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ les composantes des vecteurs $[f'(\underline{u}^{\#}) - \rho]^{-1} (\underline{u}^{\#} - \underline{u}^{-})$ et $[f'(\underline{u}^{\#}) - \sigma]^{-1} (\underline{u}^{\#} - u^{+})$ dans une base de vecteurs propres de $f'(\underline{u}^{\#})$ alors

$$|\beta\gamma| < |\alpha\delta|$$

Remarque 3.1. : dans le cas de chocs faibles, (H.3) est automatiquement satisfaite.

Théorème 3.2 : Sous les hypothèses (3.2), (H.1) (H.2) et (H.3), il existe des fonctions φ, ψ, u^{-}, $u^{\#}$ et u^{+}, définies et de classe C^1 au voisinage de l'origine, vérifiant (3.8) et telles que la fonction $u(t,x,y)$ définie pour $t > 0$ par (3.9) soit solution(faible) du problème de Cauchy (3.1) (3.3)

4 . Interaction de deux chocs.

Etudions d'abord le cas de deux chocs plans pour le système (3.1), qui se coupent au temps $t = 0$ suivant la droite $x = 0$: on se donne dans le passé une solution faible de (3.1) sous la forme :

$$(4.1) \quad \underline{u}(t,x,y) = \begin{cases} \underline{u}^{+} & \text{pour} \quad x > \rho_1 t \\ \underline{u}^{b} & \text{pour} \quad \rho_1 t > x > \sigma_1 t \\ \underline{u}^{-} & \text{pour} \quad \sigma_1 t > x \end{cases}$$

où $\underline{u}^{+}$, $\underline{u}^{b}$, et $\underline{u}^{-}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\rho_1 < \sigma_1$.
Prolonger cette situation (4.1) pour $t > 0$ revient exactement à résoudre le problème de Cauchy avec pour donnée initiale en $t = 0$ la fonction (3.4). Cependant, dans le cas de chocs faibles, d'amplitude comparable, pour un système vraiment non linéaire, on peut affirmer que la solution dans l'avenir va présenter deux chocs, et pas d'autre type de singularité. En effet, on peut, pour le passé $t < 0$, dresser un schéma analogue à (3.5), découpant le plan des $\underline{u}^{+} - \underline{u}^{-}$ en quatre nouvelles zones. Mais,

les courbes séparant les différentes zones, pour le passé et pour l'avenir, ont même tangente à l'origine. On peut donc affirmer que si $\underline{u}^+ - \underline{u}^-$ est suffisamment"à l'intérieur" de la zone I du passé, il est aussi dans la zone I de l'avenir.

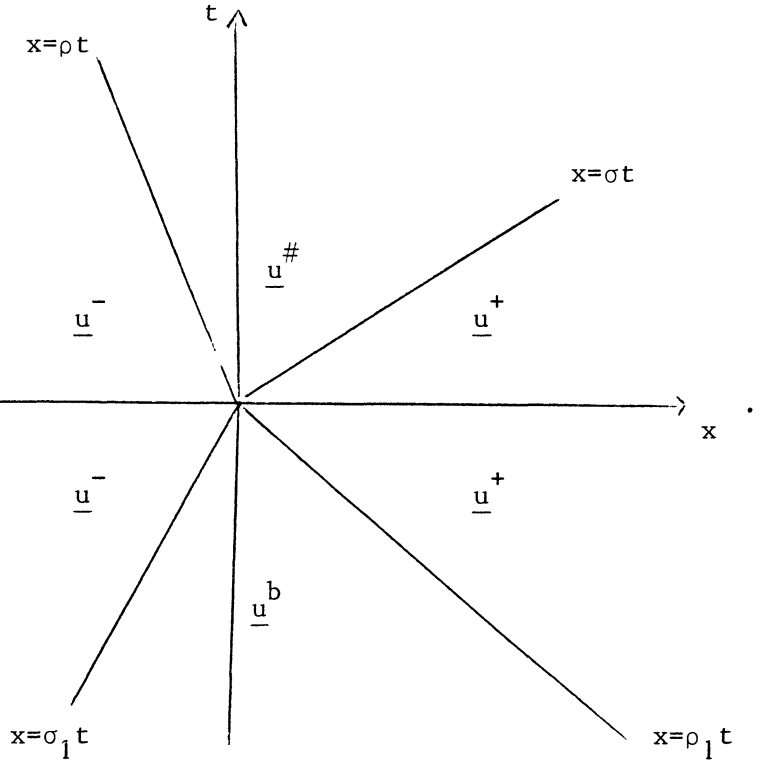
Plus correctement,on peut énoncer :

Lemme 4.1. : On suppose que les valeurs propres de $f'(u)$ sont vraiment non linéaires (cf(2.5)). Etant donné un compact K de $\mathbb{R}^2$ et une constante C , il existe $\varepsilon > 0$ tel que si les chocs de (4.1) vérifie les conditions de Lax et

$$\frac{1}{C}\,|\underline{u}^+ - \underline{u}^b| \leqslant |\underline{u}^b - \underline{u}^-| \leqslant C|\underline{u}^+ - \underline{u}^b| \quad < \varepsilon$$

alors il existe $\underline{u}^\#$, ρ et σ satisfaisant à (3.7) tels que la fonction (3.6) soit solution faible de (3.1)

(4.2)



Nous perturbons maintenant ce schéma, en nous donnant dans le passé $t < 0$ une solution faible u , de (3.1) présentant deux chocs R_1 et S_1 , d'équations $x = \varphi_1(t,y)$ et $x = \psi_1(t,y)$ avec $\psi_1 < \varphi_1$, de la forme suivante :

$$(4.3)\quad u(t,x,y) = \begin{cases} u^-(t,x,y) & \text{pour } x < \psi_1(t,y) \\ u^b(t,x,y) & \text{pour } \psi_1(t,y) < x < \varphi_1(t,y) \\ u^+(t,x,y) & \text{pour } \varphi_1(t,y) < x \ . \end{cases}$$

On suppose que les fonctions sont régulières jusqu'en $t = 0$ (au voisinage de l'origine) et que les surfaces R_1 et S_1 se coupent transversalement à l'origine ; on peut supposer que $\psi_1 = \varphi_1 = \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y} = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0$ à l'origine ; posant $\rho_1 = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}(0,0)$ $\sigma_1 = \dfrac{\partial \psi_1}{\partial t}(0,0)$, on a alors $\rho_1 < \sigma_1$. Par ailleurs, notons $\underline{u}^+$, $\underline{u}^b$ et $\underline{u}^-$ les valeurs à l'origine des fonctions correspondantes ; alors la fonction $\underline{u}$ (2.2.1) est elle aussi solution faible de (2.2.1). Guidés par le lemme 2.2.1 nous sommes amenés à faire l'hypothèse suivante :

(H_1') $\begin{cases} \text{i) Les chocs de (4.1) sont uniformément stables} \\ \text{ii) il existe } \underline{u}^{\#} \text{ , } \rho > \sigma, \text{ tels que l'on ait (3.7), et que la} \\ \text{fonction } \underline{u} \text{ (3.6) soit solution faible de (3.1) pour } t > 0 \text{ .} \end{cases}$

Par ailleurs nous supposerons aussi que les hypothèses (H_2) et (H_3) sont satisfaites.

On veut alors prolonger la solution u pour $t > 0$, de la manière suivante : on prolonge d'abord les fonctions u^-, u^b, u^+, φ_1 et ψ_1 ; les surfaces R_1 et S_1 ainsi prolongées vont se couper suivant une courbe S_o que l'on peut paramétrer de la manière suivante :

$$(4.4) \qquad t = \tau(y) \; ; \; x = \varphi_1(t,y) = \psi_1(t,y)$$

On aura donc :

$$(4.5) \qquad \begin{cases} \tau(y) \geqslant 0 \\ \varphi_1(t,y) > \psi_1(t,y) \quad \text{pour } t < \tau(y) \\ \varphi_1(t,y) = \psi_1(t,y) \quad \text{pour } t = \tau(y) \end{cases}$$

Pour $t > \tau(y)$, on cherche la solution u sous la forme :

$$(4.6) \quad u(t,x,y) = \begin{cases} u^-(t,x,y) & \text{pour } x < \varphi(t,y) \\ u^{\#}(t,x,y) & \text{pour } \varphi(t,y) < x < \psi(t,y) \\ u^+(t,x,y) & \text{pour } \psi(t,y) < x \end{cases}$$

les fonctions φ et ψ vérifiant :

$$(4.7) \qquad \begin{cases} \varphi(t,y) < \psi(t,y) \quad \text{pour } t > \tau(y) \\ \varphi(t,y) = \psi(t,y) = \varphi_1(t,y) = \psi_1(t,y) \quad \text{pour } t = \tau(y) \end{cases}$$

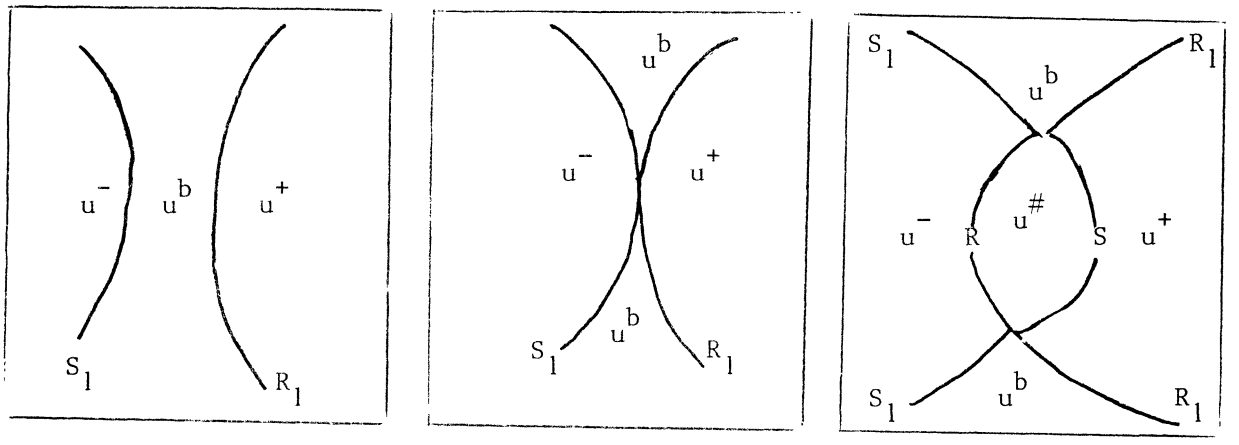
A l'origine, on aura bien sûr : $u^{\#} = \underline{u}^{\#}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho$, $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sigma$, si bien que les discontinuités de (4.6) seront bien des chocs, uniformément stables.

Théorème 4.2 : Sous les hypothèses (3.2), (H_1'), (H_2) et (H_3), il existe, au voisinage de l'origine, des prolongements réguliers de u^- , u^b , u^+ , φ_1 et ψ_1 , des fonctions $u^{\#}$, τ , φ et ψ de classe C^1 , vérifiant (4.5) (4.7), de sorte que la fonction u définie par (4.3) pour $t < \tau(y)$ et par (4.6) pour $t > \tau(y)$, soit solution faible

de (3.1).

Remarque 2.2.3 : si le système (3.1) est strictement hyperbolique et si f(u) est vraiment non linéaire, il résulte du lemme 4.1 et de la remarque 2.2 que les hypothèses (H_1') (H_2) et (H_3) sont satisfaites pour des chocs incidents d'intensité comparable, suffisamment faibles.

Terminons ce paragraphe en donnant une représentation de la solution (4.3), (4.6) à l'aide du film suivant :



5 . Un problème de Goursat non linéaire

Revenons au problème de Cauchy (3.1) (3.3). Prolongeant les fonctions $u_o^{\pm}$ sur ω , le système (3.1) étant strictement hyperbolique on résout d'abord les problèmes (3.1) avec données de Cauchy $u_o^{\pm}$, obtenant ainsi les fonctions $u^{\pm}$. Pour démontrer le théorème 3.2 il nous reste donc à construire les fonctions φ et ψ ,vérifiant (3.8) et une fonction $u^{\#}$, définie et solution de (3.1) sur $\Omega_{\#} = \{\varphi(t,y) < x < \psi(t,y)\}$ et vérifiant les conditions de saut (2.1) sur les faces $\{x = \varphi(t,y)\}$ et $\{x = \psi(t,y)\}$.

On remarquera que, grâce à (3.7) et au théorème de propagation, la restriction de u^+[resp.u^-] à $\Omega_+ = \{x > \psi(t,y)\}$ [resp.$\Omega_- = \{x < \varphi(t,y)\}$] ne dépend pas des prolongements choisis pour $u_o^{\pm}$.

La construction de $(u^{\#}, \varphi, \psi)$ est un problème à frontière libre, que nous ramènerons sur un domaine fixe $\Omega = \{(\alpha,\beta,y), \alpha > 0, \beta > 0\}$ à l'aide du changement de variables et de fonctions suivant :

$$(5.1) \qquad \begin{cases} u^{\#}(t,x,y) = \underline{u}^{\#} + u(\alpha,\beta,y) \\ \phi'(t,y) = \varphi - \varphi_o - \rho t \ , \quad \phi'' = \psi - \varphi_o - \sigma t \end{cases}$$

avec

$$(5.2) \qquad \alpha = t\,\frac{x-\varphi(t,y)}{\psi(t,y)-\varphi(t,y)} \qquad \beta = t\,\frac{\psi(t,y)-x}{\psi(t,y)-\varphi(t,y)}$$

De même, pour démontrer le théorème 4.2. on commence par prolonger u^- , u^b et u^+ en fonctions C^∞ sur un voisinage de 0 dans $\{t \leqslant 0\}$. Prenant

$$v_o(x,y) = \begin{cases} u^-(0,x,y) & \text{pour } x < \psi_1(0,y) \\ u^b(0,x,y) & \text{pour } x > \psi_1(0,y) \end{cases}$$

$$w_o(x,y) = \begin{cases} u^b(0,x,y) & \text{pour } x < \varphi_1(0,y) \\ u^+(0,x,y) & \text{pour } x > \varphi_1(0,y) \end{cases}$$

le théorème A. Majda [5] permet de résoudre le problème de Cauchy pour (3.1) avec données initiales v_o et w_o . On obtient ainsi des prolongements (u^-, v^b, ψ_1) de (u^-, u^b, ψ_1) et (w^b, u^+, φ_1) de (u^b, u^+, φ_1) .

Les surfaces $\{x = \psi_1(t,y)\}$ et $\{x = \varphi_1(t,y)\}$ se coupent alors suivant une courbe que l'on peut paramétrer par y , comme indiqué en (4.4). Notons

$$\Omega_b = \{(t,x,y) \;/\; t < \tau(y) \quad \psi_1(t,y) < x < \varphi_1(t,y)\} .$$

Par vitesse finie de propagation, on montre que $v^b = w^b$ dans Ω_b , et il ne reste plus qu'à construire $(u^\# , \varphi , \psi)$ comme précédemment. On modifie alors le changement de variables (5.2) en posant :

$$(5.3) \quad \alpha = (t-\tau(y))\,\frac{x-\varphi(t,y)}{\psi(t,y)-\varphi(t,y))} \quad ; \quad \beta = (t-\tau(y))\,\frac{\psi(t,y)-x}{\psi(t,y)-\varphi(t,y)}$$

$$(5.4) \quad \begin{cases} \phi'(t,y) = \varphi(t+\tau(y),y) - \varphi_1(\tau(y),y) - \rho t \\ \phi''(t,y) = \psi(t+\tau(y),y) - \psi_1(\tau(y),y) - \sigma t \end{cases}$$

Passons sur les calculs et décrivons le type de problème obtenu après (5.1) (5.2) ou (5.3) (5.4). Il est commode de revenir à des notations plus habituelles, et nous noterons $X = (x,y,z)$ la variable de $\mathbb{R}^3$, Ω le dièdre $\{x > 0 \;,\; y > 0\}$ et ω le demi-plan $\{(t,z) \in \mathbb{R}^2 \;,\; t > 0\}$.

Si ϕ est une fonction définie sur ω on pose :

$$\tilde{\phi}(x,y,z) = \phi(x+y,z) \tag{5.5}$$

et si u est définie sur Ω on note $\gamma u = (\gamma' u, \gamma'' u)$ ses traces :

$$\gamma' u(t,z) = u(o,t,z) \qquad \gamma'' u(t,z) = u(t,o,z) \tag{5.6}$$

Les inconnues étant u et $\phi = (\phi', \phi'')$, définies respectivement sur Ω et ω, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, nous devons résoudre un système de la forme suivante :

$$(5.7)\quad \begin{cases} L(u,\phi)u \equiv A(u,\phi)\dfrac{\partial u}{\partial x} + B(u,\phi)\dfrac{\partial u}{\partial y} + C(u,\phi)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \left.\begin{array}{l} \mathcal{F}'(t,z,\gamma' u, d\phi', \phi') = 0 \\ \mathcal{F}''(t,z,\gamma'' u, d\phi'', \phi'') = 0 \end{array}\right\} \text{sur} \quad \omega \\ \phi_{|t=0} = 0 \end{cases}$$

où $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont des fonctions C^∞ de leurs arguments à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, $A(u,\phi)$, $B(u,\phi)$ et $C(u,\phi)$ des matrices 2×2 sont les coefficients sont des fonctions C^∞ des quantités X, $u(X)$, $\hat{\phi}(X)$, $\widetilde{d\phi}(X)$, $\hat{\delta}(X)$ avec $\delta(t,z) = \dfrac{1}{t}\,\phi(t,z)$, et de $x\,\widetilde{d\delta}(X)$ et $y\,\widetilde{d\delta}(X)$.

L'hypothèse qui correspond à (H1) ou (H'1) est :

$$\mathcal{F}' \text{ et } \mathcal{F}'' \text{ s'annulent à l'origine (dans } \mathbb{R}^7) \tag{5.8}$$

Il est alors naturel de linéariser le problème (5.7) autour de $u = 0$, $\phi = 0$, et de façon analogue à (2.3), ceci conduit au système suivant :

$$(5.9)\quad \begin{cases} \underline{L}\, v = \underline{A}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \underline{B}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \underline{C}\dfrac{\partial v}{\partial z} \qquad \text{dans } \Omega \\ \left.\begin{array}{l} \underline{F}'(\gamma' v, \psi') = \underline{p}'\dfrac{\partial \psi'}{\partial t} + \underline{p}'\dfrac{\partial \psi'}{\partial z} + \underline{q}'\,\psi' + \underline{m}'\,\gamma' v \\ \underline{F}''(\gamma'' v, \psi'') = \underline{p}''\dfrac{\partial \psi''}{\partial t} + \underline{p}''\dfrac{\partial \psi''}{\partial z} + \underline{q}''\,\psi'' + \underline{m}''\,\gamma'' v \end{array}\right\} \text{sur } \omega \end{cases}$$

où $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ désignent les matrices obtenues en figeant les coefficients de A, B, C à l'origine, et où $\underline{F}'$ et $\underline{F}''$ désignent les différentielles

à l'origine de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ par rapport aux variables, $\gamma'u$, $d\phi'$, ϕ' et $\gamma''u$, $d\phi''$, ϕ'' .

Tout l'objet du travail, est de montrer que si le problème

$$(5.10) \qquad \begin{cases} \underline{L}\, v = f & \text{dans } \Omega \\ \underline{F}(\gamma v, \psi) = g & \text{dans } \omega \end{cases}$$

est suffisamment bien posé, alors le système (5.7) possède effectivement une solution. Les hypothèses porteront donc sur le système $(\underline{L},\underline{F})$; elles sont les suivantes :

(C1) $\underline{L}$ est strictement hyperbolique dans la direction (1,1,0)
C'est l'hypothèse qui correspond à (3.2).

(C2) On suppose que les deux valeurs propres réelles de $(\underline{A}+\underline{B})^{-1}\underline{A}$ vérifient $a_1 < 0 < 1 < a_2$.
Cette hypothèse correspond aux conditions de choc (3.7)

(C3) Les problèmes mixtes

$$\begin{cases} (\underline{A} + \underline{B}) \dfrac{\partial w}{\partial t} + \underline{A} \dfrac{\partial w}{\partial x} + \underline{C} \dfrac{\partial w}{\partial z} = f & \text{dans } X > 0 \\ \underline{F}'(\gamma' w,\, d\psi') = g & \text{pour } X = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\underline{A} + \underline{B}) \dfrac{\partial w}{\partial t} + \underline{B} \dfrac{\partial w}{\partial y} + \underline{C} \dfrac{\partial w}{\partial z} = f & \text{dans } y > 0 \\ \underline{F}''(\gamma'' w,\, d\psi'') = g & \text{pour } y = 0 \end{cases}$$

vérifient une condition de Lopatinski uniforme.

Cette hypothèse correspond à l'hypothèse de stabilité (H2)

(C4) Notant (r_1,r_2) une base de vecteurs propres de $(\underline{A} + \underline{B})^{-1}\underline{A}$, $b' = \underline{m}'^{-1}\underline{\ell}'$, $b'' = \underline{m}''^{-1}\underline{\ell}''$ et (α',β') et (α'',β'') les composantes de b' et b" dans la base (r_1,r_2) on a $|\alpha''\beta'| < |\alpha'\beta''|$
C'est l'hypothèse (H.3)

Théorème 5.1 : Sous les hypothèses (5.8), (C1) à (C4) il existe au voisinage de 0 , une solution (u,ϕ) de (5.7), u étant de classe C^1 , et ϕ de classe C^2 .

6 . Schéma de la démonstration.

La progression est parallèle à celle suivie par Majda [5] .

1ere étape : construction d'une solution approchée : il s'agit essentiellement de résoudre (5.7) au sens des développements de Taylor sur l'arête $x = y = 0$. On est alors essentiellement ramené à résoudre un problème de Goursat linéaire dans le quadran $\{x > 0 , y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$, z jouant le rôle de paramètre :

$$(6.1)\quad \begin{cases} Lu \equiv A \dfrac{\partial u}{\partial x} + B \dfrac{\partial u}{\partial y} + C\, u = f \text{ dans } \{x > 0 , y > 0\} \\ F'(\gamma' u, \phi') = \ell' \dfrac{d\phi'}{dt} + q' \phi' + m' \gamma' u = g' \quad \text{pour } x = 0 \\ F''(\gamma'' u, \phi'') = \ell'' \dfrac{d\phi''}{dt} + q'' \phi'' + m'' \gamma'' u = g'' \quad \text{pour } y = 0 . \end{cases}$$

On résout ce système en suivant la méthode de S. Alinhac [1], les hypothèses fondamentales pour cette étape étant (C2) et (C4).

Après la détermination de cette "solution approchée" on est amené à résoudre un système analogue à (5.7) dans un espace de fonctions sufisamment plates sur l'arête $x = y = 0$.

2ème étape : étude du problème linéarisé : on linéarise (5.7) autour de (u,ϕ), et on obtient un problème en (v,ψ) de la forme :

$$(6.2)\quad \begin{cases} L(u,\phi)\, v = f \\ F(\gamma u, \phi)\ (\gamma v, \psi) = g \end{cases}$$

On étudie ce problème en passant en coordonnées polaires :

$$t = x + y , \quad \theta = \frac{x}{x+y}$$

On fait une partition dyadique en t,en localisant dans les trapèzes $2^{-j-1} \leqslant t \leqslant 2^{-j+1}$, puis en effectuant une homothétie de rapport 2^j dans les variables $(t,2)$. On est alors essentiellement ramené à une famille de problèmes mixtes hyperbolique dans la bande $\tilde{\Omega} = \{(t,\theta,z),\ 0 \leqslant \theta \leqslant 1\}$:

$$(6.3)\quad \begin{cases} \tilde{L}_j \tilde{v} = \tilde{f} \quad \text{dans } \tilde{\Omega} \\ \tilde{F}_j(\gamma\tilde{v}, \tilde{\psi}) = \tilde{g} \quad \text{sur } \partial\tilde{\Omega} . \end{cases}$$

les fonctions étant supportées dans $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 2$.

Les hypothèses (C1) et (C3) sont conçues pour ces problèmes (6.3) ; revenant au problème initial (6.2), on en déduit des inégalités d'énergies dans des espaces de fonctions suffisamment plates.

On montre aussi l'existence (et l'unicité) de solutions pour (6.2), toujours dans des espaces de fonctions plates.

3ème étape : Schéma iteratif : partant d'une solution approchée (u_o,ϕ_o) on définit une suite (u_n,ϕ_n) par un schéma iteratif du type suivant :

$$(6.4)\qquad \begin{cases} u_n = u_o + v_n\ ,\quad \phi_n = \phi_o + \psi_n \\ L(u_n,\phi_n)v_{n+1} = -\,L(u_n,\phi_n)u_o \\ F_{(\gamma u_n,\phi_n)}(\gamma v_{n+1},\psi_{n+1}) = -\,\mathcal{J}(\gamma u_n,\phi_n) + F_{(\gamma u_n,\phi_n)}(\gamma v_n,\psi_n) \end{cases}$$

C'est la deuxième étape qui permet de construire la suite (u_n,ϕ_n). On procède ensuite en deux temps : on montre que la suite (u_n,ϕ_n) est bornée dans un espace de Sobolev H^N avec N assez grand (ici $N \geqslant 4$) ; puis, en utiliant cette estimation, on montre que la suite (u_n,ϕ_n) est de Cauchy dans un espace L^2 . On en déduit que, (u_n,ϕ_n) converge (dans L^2) vers une solution (u,ϕ) de (5.7), (u,ϕ) étant de classe H^N .

BIBLIOGRAPHIE :

[1] S. Alinhac : Le problème de Goursat hyperbolique en dimension deux ; Comm. in Partial Diff. Equ. 1. (1976) p.231-282.

[2] P.D. Lax : Hyperbolic systems of conservation laws ; comm. Pure and Appl. Math. 10 (1957), p.537-467.

[3] P.D. Lax : Shock waves and Entropy ; Contributions to Non linear Functional Analysis, (E.A. Zarantonello Ed.) Academic Press, New-York, 1971.

[4] A. Majda : The stability of multidimensional shock fronts ; Memoirs of A.M.S., vol.41, n°275 (1983)

[5] A. Majda : The existence of multidimensional shock fronts ; Memoirs of A.M.S., vol.43 n°281 (1983).