Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

C. Zuily

Régularité et non régularité des solutions non strictement convexes de l'équation de Monge-Ampère

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. n° 18, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A18_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE BONY-SJÖSTRAND-MEYER 1984-1985

REGULARITE ET NON REGULARITE DES SOLUTIONS NON STRICTEMENT CONVEXES DE L'EQUATION DE MONGE-AMPERE

Par C. ZUILY

Exposé n°XVIII

21 Mai 1985

I. INTRODUCTION.

Le but de cet exposé est de présenter quelques résultats de régularité et de non régularité locale des solutions de l'équation

$$\det(u_{ij}) = \psi(x) \tag{1}$$

où u est une fonction réelle de classe C^2, convexe, définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, (u_{ij}) est la matrice des dérivées secondes de u et ψ une fonction positive ou nulle dans Ω.

Sur de telles solutions, le linéarisé de l'équation (1) a un symbole principal $p(x,\xi)$ positif ou nul dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Au voisinage des points de Ω où u est strictement convexe (ie. la matrice (u_{ij}) est définie positive ce symbole est elliptique : il est alors classique que toute solution C^2 est en fait C^∞.(*)

Le point de départ de notre étude est le récent travail de C.J.Xu [4] qui, utilisant la théorie des opérateurs para-différentiels de J.M. Bony [2] et les techniques de régularité dans les équations linéaires à forme caractéristique non négative, (L. Hörmander, O.A. Oleinik-E.V. Radkevitch) a démontré un résultat qui contient l'énoncé qui suit.

Soit $u \in C^2(\Omega)$ une solution d'une équation aux dérivées partielles :

$$F(x,u,Du,D^2u) = 0 \text{ dans } \Omega \tag{2}$$

où $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$. Notons $L^\circ(x,\xi)$ le symbole principal du linéarisé en u de l'équation (2) i.e. $L^\circ(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}(x,u,Du,D^2u)\xi_i\xi_j$ et

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}} \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

Théorème 1.1 : (C.J.X [4])

Soit r un entier positif ou nul et $\rho_o = \text{Max}(4, r+2)$. Soit $u \in C^\rho_{loc}(\Omega)$ où $\rho > \rho_o$. Supposons que :

(*) Pour les résultats d'existence et de régularité concernant le cas elliptique nous renvoyons au récent article de Cafarelli-Nirenberg-Spreeck : C.P.A.M. Vol. XXXVII 369-402 (1984)

a) $L^\circ(x,\xi) \geqslant 0 \quad \forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$

b) Parmi les crochets d'ordre $\leqslant r$ des X_α , $\alpha = 1,\ldots,n$, en tout point de Ω il y en a n qui sont linéairement indépendants.

Alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

Notons que si l'équation (2) est quasi-linéaire (resp. semi-linéaire) on a $\rho_o = \mathrm{Max}(3, r + 2)$ (resp. $\rho_o = \mathrm{Max}(2, r + 2)$).

Avant de passer à l'étude de l'équation (1) notons que l'on peut prouver une version, consacrée au problème aux limites, du théorème 1. Plus précisément :

Théorème 1.2.

Supposons que Ω soit un ouvert régulier. Soit $\rho_o = \mathrm{Max}(5, r + 2)$ où $r \in \mathbb{N}$. Soit $u \in C^\rho(\bar{\Omega})$ $\rho > \rho_o$ une solution du problème

$$(3) \qquad \begin{cases} F(x,u,Du,D^2u) = 0 & \text{dans } \bar{\Omega} \\ u_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

où $F \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$. Supposons que

a) $L^\circ(x,\xi) \geqslant 0 \quad \forall (x,\xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n$

b) Parmi les crochets d'ordre $\leqslant r$ des X_α , $\alpha = 1,\ldots,n$, en tout point de $\bar{\Omega}$ il y en a n qui sont linéairement indépendants.

c) $\partial\Omega$ est non caractéristique pour L° .

Alors $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

La régularité à l'intérieur résultant du théorème 1.1, il faut, pour prouver la régularité au bord de la solution, outre les résultats de J.M. Bony, utiliser ceux de M. Sablé-Tougeron [3] sur les opérateurs para-différentiels "tangentiels" ainsi que le récent travail de S. Alinhac [1] sur la paracomposition.

II. REGULARITE A L'INTERIEUR DES SOLUTIONS DE L'EQUATION (1).

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 2.1

Soit ψ une fonction C^∞ dans Ω , réelle, $\psi \geqslant 0$. Soit $\rho > 4$ et $u \in C^\rho_{loc}(\Omega)$ une solution réelle et convexe de l'équation (1). Supposons l'une des conditions

équivalentes suivantes satisfaite :

a) $\forall x \in \psi^{-1}(0)$, $\exists\ \alpha \in \{1,2,\ldots,n\}$ t.q. $< d^2\psi(x)\ell_\alpha\ ,\ \ell_\alpha > \neq 0$ où

$\ell_\alpha = (\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}})\ j=1,\ldots,n$.

b) $\forall x \in \psi^{-1}(0), L\psi(x) \neq 0$, où L est le linéarisé en u de l'équation (1).

Alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

Remarques :

1. Si $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\psi \geqslant 0$ et $\psi > 0$ sur $\partial\Omega$ on obtient, par le théorème 1.2., un résultat de régularité sur $\bar{\Omega}$ pour les solutions du problème de Dirichlet associé à l'équation (1) sous l'hypothèse a) ou b) ci-dessus.

2. Si $u \in C^4(\Omega)$ et si $d^2\psi(x)$ est définie positive en tout point de $\psi^{-1}(0)$, la condition a) est satisfaite. Par contre, bien que la condition a) ne fasse intervenir que les dérivées secondes de u , si u est seulement C^2 et si $d^2\psi(x)$ est définie positive sur $\psi^{-1}(0)$ la condition a) n'est pas toujours vérifiée et en fait les solutions C^2 peuvent ne pas être C^∞ comme le prouve la :

Proposition 2.2.

Il existe ψ , de classe C^∞ dans la boule B(0,1) dans $\mathbf{R}^n$, $\psi \geqslant 0$, $\psi > 0$ sur ∂B telle que $d^2\psi(x)$ soit définie positive en tout point de $\psi^{-1}(0)$ et telle que le problème $\begin{cases} \det(u_{ij}) = \psi \text{ dans } B \\ u_{|\partial B} \in C^\infty(\partial B) \end{cases}$ possède une solution $u \in C^{2+\varepsilon_o}(\bar{B})$ mais $u \notin C^3(\bar{B})$, (où $\varepsilon_o > 0$).

3. Considérons dans $\mathbf{R}^2$ l'équation $u_{11}\,u_{22} - u_{12}^2 = x_1^2$. La condition a) du théorème se traduit par $u_{22}(0,x_2) \neq 0\ \forall x_2$. De telles solutions existent, par exemple $u(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\,x_2^2 + \frac{1}{12}\,x_1^4$.

4. Lorsque $\psi^{-1}(0)$ est une hypersurface, la condition a) exprime que les champs $X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}}\ \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\alpha = 1,\ldots,n$ ne sont jamais tous tangents à cette hypersurface.

La preuve du théorème 2.1. est basée sur le calcul des crochets d'ordre $\leqslant 2$. Le point important est résumé dans le lemme suivant dont nous ne détaillerons pas la preuve.

Lemme 2.3

Pour $1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant n$ on a

$$(4) \qquad \psi[X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = (X_\gamma X_\alpha \psi)X_\beta - (X_\gamma X_\beta \psi)X_\alpha$$

Preuve du théorème 2.1

Puisque $(\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}})$ est la matrice des cofacteurs on a

$$(5) \qquad X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_n = \psi^{n-1}\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

Soit $\alpha \in \{1,2,\ldots,n\}$, posons

$$\Delta_\alpha = X_\alpha \wedge \psi[X_\alpha,[X_\alpha,X_1]] \wedge \ldots \wedge \psi[X_\alpha,[X_\alpha, X_n]]$$

où, dans le membre de droite le terme nul $\psi[X_\alpha,[X_\alpha, X_\alpha]]$ a été omis.
D'après (5) et le lemme 2.3 on peut écrire

$$\Delta_\alpha = \varepsilon(X_\alpha^2\psi)^{n-1}\ \psi^{n-1}\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \quad , \ \varepsilon = \mp 1 \ .$$

D'autre part

$$\Delta_\alpha = \psi^{n-1} \det(X_\alpha,[X_\alpha,[X_\alpha,X_j]]_{j=1,\ldots,n\ ;\ j\neq\alpha})\ e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

d'où

$$\det(X_\alpha,[X_\alpha,[X_\alpha,X_j]]\ j\neq\alpha) = \varepsilon(X_\alpha^2\psi)^{n-1} \quad , \ \varepsilon = \mp 1$$

Ensuite si $\ell_\alpha = (\frac{\partial F}{\partial u_{\alpha j}})_j$, on a, en tout point de $\psi^{-1}(0)$

$$X_\alpha^2\psi(x) = < d^2\psi(x)\ell_\alpha, \ell_\alpha >$$

La condition a) implique donc que l'on peut appliquer le th.1.1. avec r = 2. Notons qu'il est facile de voir que la condition a) est nécessaire et suffisante pour que les crochets d'ordre $\leqslant 2$ engendrent $T_x\Omega$.

Preuve de la proposition 2.2 :

Considérons dans B(0,1) la fonction $u = |x|^{2+\alpha}$ où $\alpha = \frac{2}{n}$. On montre facilement que $\det(u_{ij}) = c_\alpha |x|^2 = \psi$ où c_α est une constante.

III. RESULTATS DE NON REGULARITE.

On commence par un résultat en deux dimensions.

Théorème 3.1.
Soit Σ un hyperplan dans $\mathbb{R}^2$ et $x_o \in \Sigma$. Soit ψ une fonction analytique près de x_o , $\psi \geqslant 0$, avec $\Sigma = \psi^{-1}(0)$. Soit k un entier, $k \geqslant 2$. Il existe alors, au voisinage de x_o , une fonction u , convexe, de classe C^k mais non C^{k+1} , solution de l'équation (1) au voisinage de x_o .

Dans $\mathbb{R}^n$ on a un résultat un peu moins précis.

Proposition 3.2 :
Soit dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, un plan Σ de codimension p , $1 \leqslant p \leqslant n-1$ et $x_o \in \Sigma$. Il existe des fonctions $\psi \geqslant 0$, analytiques au voisinage de x_o , avec $\psi^{-1}(0) = \Sigma$ et telles que l'équation (1) possède des solutions u , convexes, de classe C^2 mais non C^3 au voisinage de x_o .

Esquisse de la preuve du théorème 3.1.
On peut supposer $\Sigma = \{x_1=0\}$ et $x_o = 0$. La preuve consistera à obtenir une solution formelle par superposition de solutions puis à prouver la convergence. Le premier lemme traduit l'homogénéité de degré 2 de l'équation (1). On notera ici $F(u) = \det(u_{ij})$ et L_u le linéarisé en u de l'équation (1).

Lemme 3.3.
$$F\Big(\sum_{j=o}^{N} u^j\Big) = \sum_{j=o}^{N} F(u^j) + \sum_{k=o}^{N-1} \sum_{j=k+1}^{N} L_{u^k}(u^j) \tag{6}$$

A. Construction d'une solution formelle :
Pour $j \geqslant 0$ on pose

$$\begin{cases} u^{2j} = x_1^{2+j}\, h_{2j}(x_2) \\ u^{2j+1} = x_1^{2+j} |x_1| h_{2j+1}(x_2) \end{cases} \tag{7}$$

où les h_k sont à déterminer. On pose $u = \sum_{j\geqslant 0} u^j$.

Grace au lemme 3.3. on calcule $F(u)$. On trouve

$$F(u) = x_1^2 \sum_{\ell\geqslant 0} x_1^\ell H_\ell^{(o)}(x_2) + x_1^2|x_1| \sum_{\ell\geqslant 0} x_1^\ell H_\ell^{(1)}(x_2) \tag{8}$$

avec

$$\begin{cases} H_o^{(o)} = 2(h_o h_o'' - 2h_o'^2) \\ H_\ell^{(o)} = 2\, h_o h_{2\ell}'' - 4(2+\ell)\, h_o' h_{2\ell}' + (1+\ell)(2+\ell) h_o'' h_{2\ell} + \end{cases} \tag{9}$$

$$+\sum_{p=1}^{\left[\frac{\ell-1}{2}\right]}\sum_{p+q=\ell}\{(1+p)(2+p)h_{2p}h''_{2q} - 2(2+p)(2+q)h'_{2p}h'_{2q} + (1+q)(2+q)h_{2q}h''_{2p}\} +$$

$$+\sum_{p=o}^{\left[\frac{\ell-3}{2}\right]}\sum_{p+q=\ell-2}\{(3+q)(2+q)h_{2q+1}h''_{2p+1} - 2(3+p)(3+q)h'_{2q+1}h'_{2p+1} + (3+p)(2+p)\cdot$$

$$h''_{2q+1}h_{2p+1}\} + \delta(\ell-2k)\{(k+1)(k+2)h_{2k}h''_{2k} - (2+k)^2h'^2_{2k} + (k+1)(k+2)h_{2k-1}h''_{2k-1} -$$

$$-(2+k)^2h'^2_{2k-1}\}$$

où $\delta(\ell-2k) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } \ell = 2k \end{cases}$ et [a] désigne la partie entière de a .

On a aussi

$$(10)\quad \begin{cases} H_o^{(1)} = 2\{h_o h''_1 - 6h'_o h'_1 + 3h''_o h_1\} \\ H_\ell^{(1)} = 2\,h_o h''_{2\ell+1} - 4(3+\ell)h'_o h'_{2\ell+1} + (2+\ell)(3+\ell)h''_o h_{2\ell+1} + \text{des sommes} \end{cases}$$

analogues à (9).

Soit $\psi \geqslant 0$ analytique avec $\psi^{-1}(0) = \{x_1 = 0\}$. On peut écrire $\psi = x_1^2 \sum_{\ell \geqslant o} x_1^\ell \psi_\ell(x_2)$. Compte tenu de (8), (9) et (10), résoudre l'équation $F(u) = \psi$ revient à résoudre

$$(11)\quad \begin{cases} H_\ell^{(o)} = \psi_\ell & \ell \geqq 0 \\ H_\ell^{(1)} = 0 & \ell \geqq 0 \end{cases}$$

Pour $\ell = 0$, d'après le théorème de Cauchy-Kovalewski, il existe une fonction h_o , analytique dans un voisinage V de l'origine, solution du problème :

$$(12)\quad \begin{cases} 2(h_o h''_o - 2h'^2_o) = \psi_o \\ h_o(0) = 1 \quad h'_o(0) = 0 \end{cases}$$

On fixe un voisinage V_o de l'origine où $h_o > 0$. Pour $\ell \geqslant 0$ les équations (11) sont des équations linéaires à coefficients analytiques que l'on peut résoudre par récurrence grâce à Cauchy-Kovalewski. On obtient ainsi une solution formelle de $F(u) = \psi$.

B. Construction d'une vraie solution.

Pour montrer que le processus décrit ci-dessus conduit à une vraie solution,

il nous faut montrer que les fonctions analytiques h_ℓ ainsi déterminées existent dans un même voisinage de l'origine et déterminent une fonction u . Le point crucial de la preuve est résumé dans le

Lemme 3.4. :
Il existe des constantes $\varepsilon > 0$, $A > 0$, $B > 0$ telles que $\forall j \geqslant 0$, $\forall \alpha \geqslant 0$

$$(13) \qquad |h_j^{(\alpha)}(0)| \leq \varepsilon A^j B^\alpha \frac{(\alpha+j)!}{(j+2)!(\alpha+j+1)^3}$$

Ce lemme se démontre par récurrence sur j et à j fixé par récurrence sur α en utilisant les équations (11).

BIBLIOGRAPHIE :

[1] S. Alinhac : Paracomposition et applications aux équations non linéaires. Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer exposé n°11 (1985).

[2] J.M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités... Ann. Scient. de l'Ecole Norm. Sup. 14 (1981), 209-246.

[3] M. Sablé-Tougeron : Régularité microlocale pour les problèmes aux limites non linéaires.Ann. Inst. Fourier (à paraître).

[4] C.J. Xu : Régularité des solutions des e.d.p. non linéaires . C.R. Acad. Sciences t.300 (1985) p.267-270.

***