Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. M. Delort
G. Lebeau

Distributions I. Lagrangiennes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1984-1985), exp. n° 17, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1984-1985____A17_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE BONY-SJÖSTRAND-MEYER 1984-1985

DISTRIBUTIONS I. LAGRANGIENNES

par J.M. DELORT et G. LEBEAU

Exposé n°XVII

23 Avril 1985

I. ENONCE DU RESULTAT.

Soit F un fermé sous analytique de $\mathbb{C}^n$, contenant $\mathbb{R}^n$ et f une fonction continue sur F à valeurs complexes, telle que pour toute sous variété sous analytique V de F, $f|_V$ est de classe C^1, $df|_V$ est continue sur $\overline{V}$ et la forme différentielle $f|_V(dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_r)|_V$ est fermée.

On pose $u = f|_{\mathbb{R}^n}$; (u est C^1) le résultat suivant donne une estimation du spectre analytique de Sato de u

1) Théorème $\quad SS(u) \subset (T^*_F)^a \cap T^*\mathbb{R}^n$

Ici, $T^*_F = SS(\underline{\mathbb{C}}_F)$ est le micro support de Kashiwara Schapira [5] du faisceau constant concentré sur F ; T^*_F est alors un fermé sous analytique Lagrangien dans $T^*\mathbb{R}^{2n}$. On a identifié $T^*\mathbb{R}^{2n}$ et $T^*\mathbb{C}^n$ par : à la forme $\mathbb{C}$-linéaire $\zeta \in T^*_x\mathbb{C}^n$, on associe la forme $\mathbb{R}$-linéaire ξ de $T^*_x\mathbb{R}^{2n}$ $\xi(u) = -\operatorname{Im}\zeta(u)$.

Rappelons que lorsque F est une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^{2n}$, T^*_F est le fibré conormal usuel de F ; lorsque F est un demi-espace défini localement près de x_o par $\varphi(x) \leqslant 0$, $\varphi(x_o) = 0$ $d\varphi(x_o) \neq 0$, on a

$$T^*_{F,x_o} = \{(x_o,\xi) \ , \ \xi = -\lambda\, d\varphi(x_o), \ \lambda \in \mathbb{R}_+\}$$

Plus généralement, lorsque F est défini localement près de x_o par des inéquations portant sur des fonctions analytiques φ_j, $j = 1,\ldots,N$, $\varphi_j(x_o) = 0$:

$$F = \{x, \ \forall_j \ \varphi_j(x) \leqslant 0\}$$

on a une estimation :

2) $T^*_{F,x_o} \subset \{(x_o,\xi)$, il existe une partie J de $\{1,\ldots,N\}$ et des suites $x_n \to x_o$, $a^j_n \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{j\in J} a^j_n\, d\varphi_j(x_n) \to -\xi$ $\varphi_j(x_n) = \varphi_{j'}(x_n)$ pour $j,j' \in J$ et $a^j_n\varphi_j(x_n) \to 0\}$.

Exemples : (1) $F = \mathbb{R}^n + i\overline{\Gamma}$ où Γ est un cône convexe saillant, alors on obtient le résultat classique $SS(u) \subset \{(x,\xi), \ \xi \in \Gamma^\circ\}$ Γ° = polaire de Γ

(2) $F = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$, $\operatorname{Im} x_1 = \dots = \operatorname{Im} x_p = 0\}$. On obtient $SS(u) \subset \{(x,\xi)\ \ \xi_{p+1} = \cdot = \xi_n = 0\}$

(3) Soit $f_j(x)$ N fonctions analytiques définies près de $x_o \in \mathbb{R}^n$, $f_j(x_o) = 0$, et $\operatorname{Im} f_j(x) \geqslant 0$ pour x réel. Soit f l'application de $\mathbb{R}^n_x$ dans $\mathbb{R}^N_t$, $t_j = f_j(x)$ et $v(t)$ une fonction holomorphe dans $\operatorname{Im} t_j \geqslant 0$, C^1 jusqu'au bord ; En appliquant le théorème au fermé $F = \{\operatorname{Im} f_j \geqslant 0\}$, et en utilisant (2) avec $\varphi_j = -\operatorname{Im} f_j$, on obtient une majoration de $SS(f^*(v|_{\mathbb{R}^N_t}))$.

Lorsque $v(t) = \prod_{j=1}^{N} (t_j+i0)^{\lambda_j}$, $\operatorname{Re}\lambda_j > 1$. On retrouve ainsi un résultat de Kashiwara-Schapira [5] sur le spectre de $\prod_{j=1}^{N} (f_j + i0)^{\lambda_j}$, qui étend des résultats de [4] .

2. IDEE DE LA PREUVE.

On fixe $x_o \in \mathbb{R}^n$, et pour $0 < r < R$ on pose

$$K = \{z \in F,\ |z-x_o| \leqslant R\} \tag{3}$$

$$(Tu)(z,\lambda) = \int_{\Sigma_o} e^{-\frac{\lambda}{2}(z-x)^2} u(x)dx \qquad \Sigma_o = \{|x-x_o| \leqslant r,\ x \in \mathbb{R}^n\} \tag{4}$$

Alors T est la transformation F.B.I. usuelle, associée à la transformation canonique complexe χ de $T^*\mathbb{C}^n$

$$(x,\xi) \xrightarrow{\chi} (z,\zeta)\ \ z = x-i\xi \quad \zeta = \xi \tag{5}$$

elle envoie $\mathcal{E}'(|x-x_o|< r)$ dans l'espace de Sjöstrand [8] H_{φ_o} , avec $\varphi_o(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{Im} z)^2$, on a

$$\chi(T^*\mathbb{R}^n) = \Lambda_{\varphi_o} = \{(z, \frac{2}{i}\ \frac{\partial\varphi_o}{\partial z}(z))\} \tag{6}$$

et le spectre analytique de u en x_o est caractérisé par

(7) $(x_o,\xi^\circ) \notin SS(u) \Leftrightarrow \exists\ C_o > 0$ tel que pour z près de $z_o = x_o - i\xi_o$, $\lambda \geqslant 1$, on ait $|T(u)(z,\lambda)| \leqslant \frac{1}{c_o}\ e^{\lambda[\varphi_o(z)-C_o]}$.

On définit alors une fonction ψ sur $\mathbb{C}^n$ en posant

$$(8) \qquad \psi(z) = \inf_{\substack{\Sigma \subset K \\ \partial\Sigma = \partial\Sigma_o}} \sup_{x \in \mathrm{supp}(\Sigma)} - \frac{1}{2} \mathrm{Re}(z-x)^2$$

l'infimum étant pris sur les n-chaînes sous-analytiques Σ à coefficient dans $\mathbb{C}$ [6] . On a évidemment $\psi \leqslant \varphi_o$. Le théorème (1) résulte alors essentiellement des deux propositions suivantes :

(9) Proposition 1 : $\psi(z)$ est localement lipschitzienne, sous-analytique et sur un ouvert Ω sous-analytique dense de $\mathbb{C}^n$ on a :

$$(z \ , \ \frac{2}{i} \ \frac{\partial \psi}{\partial z}) \ \in \chi((T^*_K \cup T^*_{\partial\Sigma_o})^a) \text{ pour } z \in \Omega$$

(10) Proposition 2 : Pour tout compact $W \subset\subset \mathbb{C}^n$, il existe C_W tel que pour $z \in W$, $\lambda \geqslant 1$ $|Tu(z,\lambda)| \leqslant C_W \, e^{\lambda\psi(z)}$

En effet, soit alors $z_o = x_o - i\xi^\circ \in \mathbb{C}^n$ tel que $\psi(z_o) = \varphi_o(z_o)$, par le principe du maximum et la caractérisation (7) du spectre analytique, on montre que si $(x_o,\xi^\circ) \in SS(u)$ alors ψ est nécessairement dérivable en x_o et $d\psi(z_o) = d\varphi_o(z_o)$. On achève la preuve en montrant qu'il existe une suite $z_n \in \Omega$ $z_n \to z_o$, telle que : $d\psi(z_n) \to d\psi(z_o)$.

3. MINI MAX DES FONCTIONS LIPSCHITZIENNES SOUS ANALYTIQUES

Soit M une variété analytique réelle et φ une fonction réelle continue sur M ; par définition φ est sous-analytique ([3]) ssi le sur-graphe $G^+(\varphi)$

$$(11) \qquad G^+(\varphi) = \{(x,t) \in M \times \mathbb{R} \ , \ t \geqslant \varphi(x)\}$$

est sous-analytique. On définit alors la différentielle de φ par :

$$(12) \qquad \Lambda_\varphi = \{(x,-\xi) \in T^*M \ (x,t = \varphi(x) \ ; \ \xi \ , \ \tau = 1) \in T^*_{G^+(\varphi)} \}$$

Une fonction sous-analytique est analytique sur un ouvert sous-analytique dense de M . Un point au voisinage duquel φ est analytique est dit générique ; en un tel point x , la fibre $\Lambda_{\varphi,x}$ de Λ_φ est égale à $\{d\varphi(x)\}$.

D'après les résultats de [5] , Λ_φ est un fermé sous-analytique de T^*M et on montre que φ est localement Lipschitzienne ssi la projection π : $\Lambda_\varphi \to M$ est propre, ce qu'on suppose dans la suite. Soit $N \hookrightarrow M$ une sous-variété et $p : T^*M \times_M N \to T^*N$ la projection canonique ; on a alors

(13) Propositon 3 : 1) $\Lambda_{\varphi|N} \subset p(\Lambda_\varphi)$

2) il existe un sous analytique ferme Z de N , codim $Z \geqslant 1$ tel que pour $x \notin Z$ $\Lambda_{\varphi|N,x} = p(\Lambda_\varphi, x)$.

Soit $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_m\}$ une famille finie de compacts sous analytiques de M

(14) Définition : 1) $x \in M$ est un point $\mathcal{K}$-critique de φ ssi il existe ξ tel que $(x,\xi) \in \Lambda_\varphi \cap (\bigcup_j T^*_{K_j})$

2) $c \in \mathbb{R}$ est valeur $\mathcal{K}$-critique de φ ssi $c = \varphi(x)$ avec x point $\mathcal{K}$-critique de φ .

On remarquera qu'il s'agit d'une notion orientée : par exemple avec $M = \mathbb{R}^n$, $\varphi = x_n$, $\mathcal{K} = \{|x| \leqslant 1\}$ -1 est valeur critique, mais pas $+1$.

La proposition 3 entraîne que si $t \to x(t)$ est une courbe contenue dans les points critiques, $\varphi(x(t))$ est constante. Il en résulte

(15) Proposition 4 : L'ensemble des valeurs $\mathcal{K}$-critique est fini.

Le résultat géométrique suivant résulte essentiellement de la théorie du micro-support de Kashiwara-Schapira. Il permet de déformer le contour d'intégration dans la transformation de F.B.I. (4).

(16) Proposition 5 : Soit φ $M \to \mathbb{R}$ lipschitzienne, sous analytique K un compact de M , $K_c = \{x \in K , \varphi(x) \leqslant c\}$. Soient c_1 , c_2 tels que $]c_1 , c_2]$ ne contienne pas de valeur K critique ; alors pour $c_1 \leqslant c \leqslant c' \leqslant c_2$, on a un isomorphisme $H_*(K_c) \xrightarrow{\sim} H_*(K_{c'})$ (H_* désignant l'homologie singulière à coefficient dans $\mathbb{C}$).

Soit à présent $x \in M$, $y \in N$, K un compact de N , Σ_o une p-chaîne sous analytique de M contenue dans K , et $\varphi : N \times M \to \mathbb{R}$ Lipschitzienne et sous analytique. Posons

(17) $$\psi_K(x) = \inf_{\substack{\Sigma \subset K \\ \partial\Sigma = \partial\Sigma_o}} \sup_{y \in \Sigma} \varphi(x,y)$$

où l'infimum est pris sur les chaînes singulières Σ à coefficients dans $\mathbb{C}$ (ou sur les chaînes sous-analytiques, ce qui donne la même fonction ψ_K) . Alors il résulte de la proposition 5 que $\psi_K(x)$ est valeur $(K,\partial\Sigma_o)$ critique de $y \to \varphi(x,y)$; comme ψ_K est lipschitzienne, la proposition 4 entraîne alors la sous-analyticité de ψ_K ; on montre alors qu'en un point générique x de ψ_K , avec $\xi = d\psi_K(x)$, il existe $(y,\eta) \in T^*_K \cup T^*_{\partial\Sigma_o}$ tel que $(x,\xi,y,\eta) \in \Lambda_\varphi$, ce qui termine la preuve de la proposition 1.

Comme l'homologie singulière d'un compact sous-analytique se calcule à l'aide des chaînes sous-analytiques, il en résulte que pour tout $x \in M$, il existe une p-chaîne Σ_x sous-analytique telle que $\partial\Sigma_x = \partial\Sigma_o$, support $(\Sigma_x) \subset \{y \in K, \varphi(x,y) \leqslant \psi_K(x)\}$ (i.e. dans (17) l'inf est atteint par une chaîne sous-analytique). En utilisant le résultat de [1] on sait qu'on peut alors supposer le p-volume de Σ_x localement borné en x .
On achève la preuve de la proposition 2 en démontrant la formule de Stokes pour f , et en remarquant que pour R assez petit, K se rétracte sur x_o (F est triangulable) [2] donc n'a pas d'homologie.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] J.M. Delort : Résolution d'un bord sous-analytique d'un fermé sous-analytique par une chaîne de mesure uniformément bornée par rapport au paramètre. Note C.R.A.S.

[2] Hardt : Triangulation of subanalytic sets and proper light subanalytic maps. Invent. Math. 38 (1977).

[3] Hironaka : Introduction to real analytic sets and real analytic maps. Instituto Conelli Pisa 1973.

[4] M. Kashiwara,T. Kawai : On holonomic systems for $\pi(f_j+io)^{\lambda_j}$. Publication R.I.M.S. 1979.

[5] M. Kashiwara,P.Schapira : Microlocal Study of Sheaves. A Paraître à Astérisque.

[6] Poly : Formule des résidus et intersection des chaînes sous-analytiques. Thèse Poitiers 1974.

[7] P. Schapira : Application of the microlocal theory of Sheaves to the Study of $\mathcal{O}_X$. Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer 84/85 Exposé n°IV .

[8] J. Sjöstrand : Singularités analytiques microlocales. Astérisque n°95.

***