J-L. Lions

Sur le contrôle ponctuel de systèmes hyperboliques ou du type Petrowski

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. n° 20, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A20_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z   1 9 8 3 - 1 9 8 4

SUR LE CONTROLE PONCTUEL DE SYSTEMES HYPERBOLIQUES OU DU TYPE PETROWSKI

par J-L. LIONS

Exposé n° XX

28 Février 1984

INTRODUCTION

Le contrôle de structures spatiales flexibles convient à une foule de problèmes intéressants. Nous donnons ici quelques éléments sur l'un de ces problèmes.

On considère un système décrit par une équation hyperbolique ; pour simplifier l'exposé au maximum, on considère l'équation des ondes et on suppose que l'on peut agir sur ce système en un point b du domaine géométrique Ω, contenu dans $\mathbb{R}^3$. Le modèle (l'équation d'état) est alors donné par

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = v(t)\ \delta(x-b) \quad \text{dans} \quad \Omega \times \{t > 0\} \tag{1}$$

où la fonction réelle $t \to v(t)$ représente le contrôle.

L'équation (1) est complétée (dans les systèmes étudiés ici) par des conditions aux limites et des conditions initiales. On cherche alors v, dans un ensemble convenable, tel qu'une fonctionnelle (la fonction coût) soit minimum.

Si $y(x,t;v) = y(v)$ désigne la solution de (1) (dans un espace à préciser), la fonction coût considérée sera

$$\int_\Omega [y(x,T\,;v)-z_d(x)]^2\,dx + N\int_0^T v^2(t)dt = J(v) \tag{2}$$

où

T est donné > 0 ,

z_d est donnée dans $L^2(\Omega)$ ([1])

N est un nombre > 0 donné ([2]) .

On cherche alors

(3) inf. $J(v)$

pour $v \in \mathcal{U}_{ad}$,

([2]) Correspondant au coût du contrôle ;

([1]) Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

(4) $\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble convexe fermé (non vide) de $L^2(0,T)$.

Les problèmes à étudier sont alors : l'existence (et l'unicité) d'un élément u qui réalise le minimum (u est le contrôle optimal), et la structure des conditions nécessaires du 1er ordre (qui sont, dans le cas linéaire - quadratique, également suffisantes), exprimée par le système d'optimalité. L'étape suivante (non abordée ici) consiste à étudier les algorithmes numériques permettant de calculer une approximation de u. Cela est le programme "standard" (cf. J.L. Lions [1]) dans le contrôle optimal des systèmes distribués.

Mais il y a ici une difficulté préliminaire : pour v donné dans $L^2(0,T)$, il faut d'abord donner un sens à la solution de (1) (avec les conditions aux limites et initiales appropriées) ; cela peut être fait comme dans J.L. Lions et E. Magenes [1], Vol. 2 ; mais on arrive ici à un problème, introduit dans J.L. Lions [2] et qui semble encore ouvert (cf.Addendum)

pour v donné dans $L^2(0,T)$, la fonction

$$x \to y(x,T\ ;v)$$

est-elle dans $L^2(\Omega)$?

Le plan suivi est alors le suivant.

1. Résolution de l'équation d'état pour $v \in L^1(0,T)$.
2. Espace $\mathcal{U}$.
3. Système d'optimalité.
4. Quelques variantes.

Bibliographie.

1. RESOLUTION DE L'EQUATION D'ETAT

1.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert donné de $\mathbb{R}^3$, de frontière Γ régulière.
On se donne $b \in \Omega$ et v avec

(1.1) $$v \in L^1(0,T).$$

On cherche y solution de

(1.2) $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y = v(t)\delta(x-b) \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0,T[$$

avec

(1.3) $$y = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma = \Gamma \times]0,T[$$

et

(1.4) $$y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

(on notera souvent par $y(t)$ la fonction $x \to y(x,t)$;
on pose $y' = \frac{\partial y}{\partial t}$).

Remarque 1.1

On a pris avec (1.3) (1.4) les conditions aux limites et initiales les plus simples possibles. Cf. Section 4.1 ci-après. □

On va résoudre (1.2) (1.3) (1.4) par transposition.

1.2 Méthode de transposition

On considère le problème adjoint

(1.5) $$\left|\begin{array}{l} \varphi'' - \Delta\varphi = \psi \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0,T[\ , \\ \varphi(T) = \varphi'(T) = 0 \quad \text{dans} \ \Omega \ , \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \ \Sigma \ . \end{array}\right.$$

Alors, formellement, en supposant toutes les fonctions considérées régulières, on déduit de (1.2) (1.3) (1.4) (1.5) que

$$(1.6) \qquad \int_Q y\, \psi\, dx\, dt = \int_0^T \varphi(b,t)\, v(t)\, dt \ , \quad Q = \Omega \times]0,T[$$

Reste alors à définir l'espace "le plus grand" soit Y , où prendre ψ pour que $\varphi(b,t)$ soit dans L^∞ 0,T), et dépende continûment de ψ. Alors l'application

$$(1.7) \qquad \psi \to \int_0^T \varphi(b,t)\, v(t)\, dt$$

est une forme linéaire continue sur Y , qui définit la solution $y \in Y'$ de (1.2) (1.3) (1.4). [C'est la méthode utilisée systématiquement dans J.L. Lions et E. Magenes, loc. cit.].

Il est classique que

$$(1.8) \qquad \left| \begin{array}{l} \psi \longrightarrow \varphi \quad \text{est linéaire continue de} \\ L^1(0,T,L^2(\Omega)) \longrightarrow L^\infty(0,T\,;H^1_0(\Omega)) \ . \end{array} \right.$$

Par ailleurs

$$(1.9) \qquad \left| \begin{array}{l} \psi \longrightarrow \varphi \quad \text{est linéaire continue de } L^1(0,T\,;H^1_0(\Omega)) \longrightarrow \\ \longrightarrow \{\varphi |\ \varphi \in L^\infty(0,T\,;H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \ , \quad \varphi' \in L^\infty(0,T\,;L^2(\Omega))\} \ . \end{array} \right.$$

En effet, prenant le produit scalaire sur Ω avec $-\Delta\varphi'$, il vient [1]

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,[a(\varphi') + |\Delta_\varphi|^2] = a(\psi,\varphi')$$

d'où le résultat (1.9).

---

[1] Les notations sont : $(\varphi,\psi) = \int_\Omega \varphi\,\psi\, dx$, $a(\varphi,\psi) = \int_\Omega \nabla\varphi\, \nabla\psi\, dx$, $|\varphi|^2 = (\varphi,\varphi)$.

Par interpolation, on déduit, en particulier, de (1.8) (1.9) que

$$(1.10) \quad \left| \begin{array}{l} \psi \longrightarrow \varphi \text{ est linéaire continue de } L^1(0,T\,;H_0^\theta(\Omega)) \longrightarrow \\ \longrightarrow L^\infty(0,T\,;H^{1+\theta}(\Omega)) \quad , \quad \text{pour } 0 \leqslant \theta \leqslant 1 \ . \end{array} \right.$$

Mais, comme $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, on a :

$$(1.11) \qquad H^{1+\theta}(\Omega) \subset C^o(\Omega) \qquad \text{si } \theta > 1/2 \ .$$

On a alors $\varphi(b,t) \in L^\infty(0,T)$ et

$$(1.12) \quad \left| \begin{array}{l} \psi \longrightarrow \varphi(b,t) \text{ est linéaire continue de } L^1(0,T\,;H_0^\theta(\Omega)) \longrightarrow \\ \longrightarrow \quad L^\infty(0,T) \quad \text{si} \quad \theta > 1/2 \ . \ \square \end{array} \right.$$

Par transposition, utilisant (1.6), on en déduit :

<u>Proposition 1.1</u> : <u>Si</u> $v \in L^1(0,T)$, <u>le problème</u> (1.2) (1.3) (1.4) <u>admet une solution unique, notée</u> $y(v)$, <u>qui vérifie</u>

$$(1.13) \qquad y(v) \in L^\infty(0,T)\,;H^{-\theta}(\Omega))$$

<u>où</u> θ <u>est quelconque</u> $> 1/2$ (¹) .

L'application $v \to y(v)$ est linéaire et continue de $L^1(0,T) \to L^\infty(0,T\,;H^{-\theta}(\Omega))$. $\square$

Comme $\Delta \in \mathcal{L}(H^{-\theta}(\Omega)\,;H^{-\theta-2}(\Omega))$ et que $\delta(x-b) \in H^{-\theta-2}(\Omega)$ on déduit de (1.13) et de l'équation (1.2) que

$$(1.14) \qquad y''(v) \in L^1(0,T\,;H^{-\theta-2}(\Omega))$$

(¹) Le résultat d'autant meilleur que θ est plus proche de $1/2$.

(ce résultat peut être amélioré !). Il résulte de (1.13) (1.14) que

((1.15) $\quad t \longrightarrow y(t\,;v)$ est scalairement continue de $[0,T] \longrightarrow H^{-\theta}(\Omega)$.

Donc, si $v \in L^1(0,T)$, $y(T\,;v)$ a un sens et appartient à $H^{-\theta}(\Omega)$ pour $\theta > 1/2$.

2. ESPACE $\mathcal{U}$.

2.1 Définition et conjecture

Pour $v \in L^2(0,T)$, on peut, d'après ce qui précède, définir $y(T\,;v)$.

On conjecture que, au moins si Γ est assez "régulière",

$$v \in L^2(0,T) \Rightarrow y(T\,;v) \in L^2(\Omega) \ . \tag{2.1}$$

On donne ci-après quelques éléments en faveur de cette conjecture. Faute de démonstration, il est nécéssaire pour l'étude du problème de contrôle, d'introduire alors

(2.2 $\qquad \mathcal{U} = \{v \mid \ v \in L^2(0,T) \ , \ y(T\,;v) \in L^2(\Omega)\}$,

pourvu bien sûr de vérifier que $\mathcal{U}$ n'est pas réduit à $\{0\}$; on munit $\mathcal{U}$ de la structure hilbertienne donnée par :

$$\|v\|^2_{\mathcal{U}} = \|v\|^2_{L^2(0,T)} + \|y(T\,;v)\|^2_{L^2(\Omega)} \ . \tag{2.3}$$

La conjecture (2.1) équivaut alors à

$$\mathcal{U} = L^2(0,T) \ . \tag{2.4}$$

On verra dans la suite que l'on peut arriver à un système d'optimalité "raisonnable", même sans avoir démontré la conjecture (ce système d'optimalité devenant tout à fait raisonnable si la conjecture est fausse ....). □

Remarque 2.1

Des questions de ce type se rencontrent dans le cas des systèmes paraboliques. Si l'on considère l'équation d'état.

(2.5) $$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = w(t)\ \delta(x-b) \quad \text{dans } Q$$

avec

(2.6) $$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \ , \quad y(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \ ,$$

alors pour $v \in L^2(0,T)$, $y(T,v)$ n'est pas en général dans $L^2(\Omega)$; on est alors conduit à introduire $\mathcal{U}$ comme dans (2.2), avec, cette fois

(2.7) $\mathcal{U} \subset L^2(0,T)$ strictement, et $\mathcal{U}$ ne coïncidant avec aucun espace "classique"

On vérifie (J.L. Lions [2][3]) que cet espace est indépendant de Ω et de b (avec équivalence des normes données comme en (2.3)).

On peut remplacer $-\Delta$ par

(2.8) $$A = -\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \ ,$$

A étant elliptique à coefficients assez réguliers. Alors $\mathcal{U}$ ne dépend pas de A ; Li Ta Tsien [1]. Une étude complémentaire de $\mathcal{U}$ a été faite par J. Simon [1]. □

Remarque 2.2

Si la conjecture (2.4) était infirmée, il deviendrait très intéressant de savoir si $\mathcal{U}$ dépend de Ω et de b ou non, et si l'on peut remplacer $-\Delta$ par A (avec $a_{ij} = a_{ji}$) sans changer $\mathcal{U}$. □

Donnons maintenant quelques éléments en faveur de la conjecture.

2.2 Le cas $\Omega = \mathbb{R}^3$ ([1])

Si $\Omega = \mathbb{R}^3$, on ne restreint pas la généralité en prenant $b=0$. On définit, de manière générale :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\xi} f(x)\, dx .$$

Alors

$$\frac{d^2\hat{y}}{dt^2} + |\xi|^2 \hat{y} = v(t) , \quad \hat{y}(0) = \hat{y}'(0) = 0 . \tag{2.9}$$

On pose

$$|\xi| = r .$$

On a alors

$$\hat{y}(\xi,T) = \frac{1}{r} g(r) ,$$

$$g(r) = \int_0^T \sin(T-t)r \,.\, v(t)\, dt .$$

(Mais (sinus et cosinus transformées!) $g \in L^2(0,\infty)$ de sorte que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\hat{y}(\xi,T)|^2 \, d\xi = c \int_0^\infty r^2 (\frac{1}{r} g(r))^2 dr = c \int_0 g(r)^2 dr < \infty$$

de telle sorte que (2.4) est vrai dans ce cas.

2.3 Propriétés de la solution si v et $v' \in L^1(0,T)$ ([2])

On va démontrer :

Proposition 2.1 : L'application $v \to y(v)$ (solution de (2.2) (2.3) (2.4)) est linéaire continue de $W^{1,1}(0,T) \to L^\infty(0,T\,; H^{1-\theta}(\Omega))$ avec θ quelconque $> 1/2$ ([3])

([1]) qui n'est pas précisément un ouvert borné, mais cela est un détail dans le contexte présent.

([2]) i.e. $v \in W^{1,1}(0,T)$.

([3]) Résultat d'autant meilleur que θ est plus proche de $1/2$.

Démonstration : On définit

$A = \{$ opérateur $-\Delta$, de domaine $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)\}$.

On prend le produit scalaire de (2.2) avec $A^{-\theta} y'(t)$, θ à choisir (on justifie ce type de calcul soit par une approximation régulière de l'équation, soit par la méthode de Galerkin construite à partir de la base des fonctions propres de A). Il vient

$$(2.10) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|A^{-\theta/2} y'|^2 + |A^{\frac{1-\theta}{2}} y|^2 \right] = v(t)\,(\delta(x-b)\,,\, A^{-\theta} y')$$

d'où en intégrant en t :

$$(2.11) \qquad |A^{-\theta/2}(y'(t))|^2 + |A^{\frac{1-\theta}{2}} y(t)|^2 = 2\int_o^t v(\sigma)(\delta(x-b)\,,\, A^{-\theta} y'(\sigma))\,d\sigma =$$

$$= 2\,v(t)\,(\delta(x-b), A^{-\theta} y(t)) - 2\int_o^t v'(\sigma)\,(\delta(x-b)\,,\, A^{-\theta} y(\sigma))\,d\sigma$$

$$= 2\,v(t)\,(A^{-\frac{1+\theta}{2}}\delta(x-b)\,,\, A^{\frac{1-\theta}{2}} y(t)) -$$

$$- 2\int_o^t v'(\sigma)\,(A^{-\frac{1+\theta}{2}}\delta(x-b)\,,\, A^{\frac{1-\theta}{2}} y(\sigma))\,d\sigma \quad .$$

Mais $\delta(x-b) \in H_K^{-(1+\theta)}(\Omega)$ (espace des distributions de $H^{-(1+\theta)}(\Omega)$ à support compact dans Ω) si $\theta > 1/2$, et $A^{-\frac{1+\theta}{2}}$ applique $H_K^{-(1+\theta)}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$; on peut alors appliquer Gronwall à (2.11) et on obtient le résultat. □

Remarque 2.3

On obtient également

$$(2.12) \qquad y' \in L^\infty(0,T\,;\,H^{-\theta}(\Omega)) \,. \qquad \square$$

2.4 Interpolation

Interpolons entre les Propositions 1.1 et 2.1, sans entrer dans les détails techniques car il nous paraît extrêmement improbable que la conjecture peut être démontrée par cette méthode ! Mais on va obtenir un résultat "proche". Par interpolation on obtient [1]

$$v \in (W^{1,1}(0,T),\ L^1(0,T))_\theta \Rightarrow y(v) \in L^\infty(0,T\,;L^2(\Omega)). \tag{2.13}$$

Alors $y(v)$ est, en fait, scalairement continue à valeurs dans $L^2(\Omega)$.

On a donc

$$(W^{1,1}(0,T),\ L^1(0,T))_\theta \subset \mathcal{U}. \tag{2.14}$$

Or $\qquad W^{1,1}(0,T) \subset L^\infty(0,T)$ et donc

$$(W^{1,1}(0,T)\ ,\ L^1(0,T))_\theta \subset (L^\infty(0,T)\ ,\ L^1(0,T))_\theta \subset L^{p(\theta)}(0,T)\ ,\ \frac{1}{p(\theta)} = 1-\theta\ ,$$

donc $p(\theta)$ quelconque $< \frac{1}{2}$.

Mais évidemment les éléments de l'espace $(W^{1,1}(0,T)\ ,L^1(0,T))$ ont des propriétés de régularité en t ; on ne saurait donc atteindre $L^2(0,T)$ par ce type de méthode.

3. SYSTEME D'OPTIMALITE

3.1 Enoncé du résultat

Soit $\mathcal{U}_{ad}$ donné avec

$$(3.1)\quad \left|\ \begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé de } L^2(0,T)\ , \\ \text{tel qu'il existe } v \in \mathcal{U}_{ad} \text{ avec } y(T;v) \in L^2(\Omega)\ \ (^2)\ . \end{array}\right.$$

---

[1] Par exemple par interpolation complexe.

[2] Cette dernière partie de l'hypothèse est strictement sans objet si la conjecture est démontrée.

Le problème (3) de l'introduction admet alors une solution unique u, le <u>contrôle optimal</u>.

L'état $y(u) = y$ est <u>l'état optimal</u>.

Pour donner l'énoncé du système d'optimalité, il faut introduire

$$(3.2)\quad \left| \begin{array}{l} W_o^{\theta,1}(0,T) = \text{espace d'interpolation complexe entre} \\ W_o^{1,1}(T)\ (^1)\quad \text{et}\quad L^1(0,T)\ ,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1\ . \end{array} \right.$$

On a alors

<u>Théorème 3.1</u> : <u>Si</u> u <u>est le contrôle optimal</u>, y <u>l'état optimal</u>, <u>alors le système d'équations suivantes</u>

$$(3.3)\quad \left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y = u\,\delta(x-b)\ ,\quad p'' - \Delta p = 0 \quad \text{dans } Q\ , \\ y(0) = y'(0) = 0\ ,\quad p(T) = 0\ ,\quad p'(T) = -(y(T) - z_d) \text{ dans } \Omega\ , \\ y = p = 0 \quad \text{sur } \Sigma\ . \end{array} \right.$$

<u>vérifie</u>

$$(3.4)\quad \left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_o^T p(b,t)\, v(t)dt + N \int_o^T u(t)(v(t) - u(t))dt \geqslant (y(T) - z_d\ ,\ y(T)) \\ \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad} \cap W_o^{\theta,1}(0,T)\ ,\ \text{avec } \theta \text{ quelconque } > 1/2\ , \end{array} \right.$$

<u>sous l'hypothèse</u>

$$(3.5)\quad \mathcal{U}_{ad} \cap W_o^{\theta,1}(0,T) \text{ est dense dans } \mathcal{U}_{ad}\ .$$

<u>Remarque 3.1</u>

L'énoncé a un sens, car p étant défini par les équations et conditions appartenant dans (3.3) (p est l'état adjoint) alors $p(b,t)$ a un sens et appartient à $W^{-\theta,\infty}(0,T)$, espace de dual de $W_o^{\theta,1}(0,T)$. □

$(^1)$ Espace des $v \in L^1(0,T)$, $v' \in L^1(0,T)$ et $v(0) = v(T) = 0$.

Remarque 3.2

Si l'on intègre formellement par parties, on voit que

$$(y(T) - z_d, y(T)) = \int_o^T p(b,t)\, u(t)dt$$

de sorte que (3.4) prend la forme plus agréable (mais formelle)

$$\text{(3.4 bis)} \qquad \int_o^T (p(b,t) + N u(t))\,(v(t) - u(t))dt \geqslant 0 .$$

Le système (3.3) (3.4) est le système d'optimalité, sous forme faible (ou mixte).

Une forme "duale" de la conjecture est que

$$p(b,t) \in L^2(0,T) .$$

Alors (3.4 bis) a le sens évident des produits scalaires dans $L^2(0,T)$ et est valable $\forall v \in \mathcal{U}_{ad}$ (sans l'hypothèse (3.5). □

Remarque 3.3

Il semble probable que (3.3) (3.4) définisse de manière unique le triplet $\{u,y,p\}$, mais cela n'est pas établi. □

Remarque 3.4

Des formulations "mixtes" du type (3.4) ont été utilisées dans J.L. Lions [4] pour le contrôle de systèmes singuliers. □

La démonstration du Théorème est faite en plusieurs étapes.

3.2 Propriétés de $p(b,t)$

On définit p par

$$\text{(3.6)} \quad \left|\begin{array}{l} p'' - \Delta p = 0 \quad \text{dans } Q , \\ p(T) = 0 , \; p'(T) = -(y(T) - z_d) \in L^2(\Omega) , \\ p = 0 \text{ sur } \Sigma . \end{array}\right.$$

On a :

(3.7) $\qquad p \in L^{\infty}(0,T, H_o^1(\Omega)), p' \in L^{\infty}(0,T, L^2(\Omega))$.

Alors

$$\Delta p = p'' \in W^{-1,\infty}(0,T ; L^2(\Omega))$$

et par conséquent (puisque $(-\Delta)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega) ; H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega))$:

(3.8) $\qquad p \in W^{-1,\infty}(0,T ; H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega))$.

Par interpolation (complexe par exemple), on en déduit que

(3.9) $\qquad p \in W^{-\theta,\infty}(0,T ; H^{1+\theta}(\Omega) \cap H_o^1(\Omega))$

et donc, si $\theta > \frac{1}{2}$, on a :

(3.10) $\qquad p(b,t) \in W^{-\theta,\infty}(0,T)$.

3.3 Problème régularisé

Pour $\varepsilon > 0$, posons

(3.11) $\qquad B_\varepsilon = (-\varepsilon\Delta + I)^{-1} = (\varepsilon A + I)^{-1}$;

Si $v \in L^2(0,T)$, alors, en particulier $(y(T ; v) \in H^{-\theta}(\Omega), \theta > \frac{1}{2}$,

et donc, en particulier

(3.12) $\qquad B_\varepsilon\, y(T ; v) \in L^2(\Omega)$.

On définit alors, pour tout $v \in L^2(0,T)$,

(3.13) $\qquad J_\varepsilon(v) = (B_\varepsilon(y(T ; v) - z_d) , y(T ; v) - z_d) + N \int_o^T v^2\, dt$.

Le problème "régularisé" considéré est alors :

(3.14) $\qquad \inf . J_\varepsilon(v) , v \in \mathcal{U}_{ad}$.

Ce problème admet une solution unique u_ε, caractérisée par (on pose $y(u_\varepsilon)=y_\varepsilon$) :

$$(3.15)\quad \left|\begin{array}{l} y''_\varepsilon - \Delta y_\varepsilon = u_\varepsilon \delta(x-b) , \\ p''_\varepsilon - \Delta p_\varepsilon = 0 , \\ y_\varepsilon(0) = y'_\varepsilon(0) , \ p_\varepsilon(T) = 0 , \ p'_\varepsilon(T) = -B_\varepsilon(y_\varepsilon(T) - z_d) , \\ y_\varepsilon = p_\varepsilon = 0 \ \text{ sur } \Sigma , \end{array}\right.$$

et

$$(3.16)\quad \left|\begin{array}{l} \int_0^T (p_\varepsilon(b,t) + N u_\varepsilon(t)) (v(t) - u_\varepsilon(t)) \, dt \geq 0 \\ \forall v \in \mathcal{U}_{ad} . \end{array}\right.$$

(Cette fois $p_\varepsilon(b,t) \in L^2(0,T)$, puisque en particulier $B_\varepsilon(y_\varepsilon(T)-z_d) \in H^1_o(\Omega)$) .

3.4 Démonstration du Théorème 3.1

Par intégrations par parties (loisibles) on obtient

$$\int_Q (p''_\varepsilon - \Delta p_\varepsilon) y_\varepsilon \, dxdt = 0 = -(B_\varepsilon(y_\varepsilon(T) - z_d) , y_\varepsilon(T) - z_d) + \int_0^T p_\varepsilon(b,t) u_\varepsilon(t) dt.$$

de sorte que l'on peut écrire (3.16) sous la forme "mixte"

$$(3.17)\quad \int_0 p_\varepsilon(b,t) v(t) dt + N \int_0 u_\varepsilon(t)(v(t) - u_\varepsilon(t)) dt \geq (B_\varepsilon(y_\varepsilon(T) - z_d), y_\varepsilon(T) - z_d) , \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

D'un autre côté, il résulte de (3.13) que

(3.18) $\| u_\varepsilon \|_{L^2(0,T)} \leq C$ (les C désignent des constantes indépendantes de ε),

(3.19) $\| B_\varepsilon^{1/2} y_\varepsilon(T) \|_{L^2(\Omega)} \leq C$.

On peut alors extraire une sous suite, encore notée u_ε, telle que

$$(3.20)\quad \left|\begin{array}{l} u_\varepsilon \longrightarrow \tilde{u} \ \text{ dans } L^2(0,T) \text{ faible} , \\ B_\varepsilon^{1/2} y_\varepsilon(T) \longrightarrow \eta \ \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} . \end{array}\right.$$

D'après $(3.20)_1$ et la Proposition 1.1 ,

(3.21)
$$\left|\begin{array}{l} y_\varepsilon \longrightarrow \tilde{y} \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T\,;H^{-\theta}(\Omega)) \text{ faible étoile, } (^1) \\ y_\varepsilon(T) \longrightarrow \tilde{y}(T) \quad \text{dans} \quad H^{-\theta}(\Omega) \text{ faible .} \end{array}\right.$$

Mais alors $B_\varepsilon^{1/2}\, y_\varepsilon(T) \longrightarrow \tilde{y}(T)$ dans $H^{-\theta}(\Omega)$ faible et donc

(3.22)
$$\eta = \tilde{y}(T) \text{ .}$$

Alors

(3.23)
$$\lim_{\varepsilon\to 0}.\inf.\ J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geqslant J(\tilde{u}) \text{ .}$$

Par ailleurs, si l'on fixe v dans $W_o^{\theta,1}(0,T)$, alors

$$B_\varepsilon\, y_\varepsilon(T\,;v) \longrightarrow y(T\,;v) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \text{ ,}$$

et par conséquent

(3.24)
$$J_\varepsilon(v) \longrightarrow J(v) \qquad \text{si} \quad v \in W_o^{\theta,1}(0,T \text{ .}$$

Comme

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad} \text{ ,}$$

on a en particulier

(3.25)
$$\lim.\sup.\ J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant J(v) \quad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad} \cap W_o^{\theta,1}(0,T) \text{ .}$$

D'après l'hypothèse (3.5), on a donc

(3.26)
$$\lim.\sup.\ J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad},\ y(T\,;v) \in L^2(\Omega)}.\ J(v) \text{ .}$$

Comparant à 3.23, on a :

(3.27)
$$\left|\begin{array}{l} \tilde{u} = u \text{ ,} \\ J_\varepsilon(u_\varepsilon) \longrightarrow J(u) \text{ .} \end{array}\right.$$

---

(1) On pose $\tilde{y} = y(\tilde{u})$.

On reprend alors (3.17), mais avec $v \in \mathcal{U}_{ad} \cap W_o^{\theta,1}(0,T)$.
Comme (d'après le N° 3.2 ci-dessus) $p_\varepsilon(b,t) \to p(b,t)$ dans $W^{-o,\infty}(0,T)$,
on peut passer à la limite et on obtient (3.4). □

3.5 Autre Enoncé

On peut donner un énoncé de structure différente mais sous une hypothèse (différente ?) :

(3.28) $\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble convexe fermé non vide de .

On obtient alors un énoncé "usuel"

(3.29) $$\int_o^T p(b,t)(v(t)-u(t))dt + N\int_o^T u(v-u)dt \geqslant 0 \quad \forall\ v \in \mathcal{U}_{ad} ,$$

où $p(b,t) \in \mathcal{U}'$, espace dual de $\mathcal{U}$.

C'est la démarche suivie pour le cas parabolique dans J.L. Lions [1],[3], cette démarche étant alors indispensable puisque $\mathcal{U} \subset L^2(0,T)$.

4. QUELQUES VARIANTES

4.1 On peut démontrer des résultats tout à fait analogues aux précédents avec d'autres conditions aux limites que Dirichlet. On peut également remplacer $-\Delta$ par un opérateur A elliptique symétrique du 2ème ordre à coefficients réguliers.

4.2 On peut considérer, pour l'équation d'état (2.2) (2.3) (2.4) d'autres fonctions coût, par ex.

(4.1) $$J(v) = \| y(T;v) - z_d^o\|^2_{H^1(\Omega)} + \| y'(T;v) - z_d^1\|^2_{L^2(\Omega)} + N\|v\|^2_{L^2(0,T)} ,$$

où $z_d = \{z_d^o, z_d^1\} \in H_o^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.
Cela revient alors à travailler avec les fonctions $v \in L^2(\Omega)$ telles que

(4.2) $$y(T;v) \in H^1(\Omega) \ , \ y'(T;v) \in L^2(\Omega).$$

Cela conduit au problème ouvert de la caractérisation des v ayant cette propriété (probablement l'espace de v ayant cette propriété coïncide avec $H^1(0,T)$).

4.3 Considérons maintenant l'équation d'état (système bien posé au sens de Petrowski) :

(4.3) $$y'' + \Delta^2 y = v(t)\ \delta(x-b)\ ,$$

$$y(0) = y'(0) = 0\ ,\ y = \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma\ .$$

On est conduit alors <u>au problème ouvert</u> : pour $v \in L^2(0,T)$, si $y(t\,;v)$ désigne la solution de (4.3), a-t-on

(4.4) $$y(T\,;v) \in H_0^1(\Omega) \quad ?$$

Cela semble plausible ...

4.4 Un autre problème est celui du <u>contrôle frontière</u>.

(4.5) $$y'' - \Delta y = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[\ .$$

avec

(4.6) $$y = v(t)\ \delta_{(b)} \quad \text{sur } \Sigma \quad ,$$

où $\delta_{(b)}$ est la masse +1 au point $b \in \Gamma$, et avec

(4.7) $$y(0) = y'(0) = 0\ .$$

Le contrôle de tels systèmes conduit à des questions (ouvertes) du type suivant :

Si $v \in L^2(0,T)$ a-t-on $y(T\,;v) \in H^{-1}(\Omega)$?

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

J.L. LIONS [1] : Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Gauthier Villars - Paris .

[2] Function spaces and optimal control of distributed systems. U.F.R.j. Lecture Notes. 1980.

[3] Some methods in the mathematical analysis of systems and their control. Science Press. Beijing, 1981.

[4] Some remarks on the optimal control of singular distributed systems. Proceedings Berkeley symposium 1983. A.M.S.

J.L. LIONS [1] et F. MAGENES Problèmes aux limites non homogènes et applications. Dunod Paris. t. 1 et 2, 1968.

LI TA-TSIEN [1] Propriétés d'espaces fonctionnels intervenant en contrôle optimal. C.R.A.S. 289 (1979), p. 687-690.

J. SIMON [1] Fonctions coût optimal avec contrôle ponctuel. A paraître.

SEMINAIRE GOULAOUIC - MEYER - SCHWARTZ

Sur le contrôle ponctuel de systèmes hyperboliques* ou du type Petrowski

J.L. LIONS

Addendum
(Mai 1984)

Depuis la rédaction de l'exposé, le problème posé dans l'introduction été résolu de trois manières différentes. Il a d'abord été résolu par Y. MEYER par utilisation de résultats spectraux et de résultats d'analyse harmonique, à partir de la représentation de la solution par la méthode de Fourier avec la base des fonctions propres de $-\Delta$ pour Dirichlet. Une fois ce résultat établi par Y. Meyer, on a donné une démonstration basée sur les problèmes non homogènes non donnés au bord L^2 : sont à résoudre (1) de l'Introduction avec

$$y(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

et

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0,T[\, .$$

On introduit la solution de (1) dans <u>l'espace entier</u> ; prenant, par translation, $b = 0$, la solution de l'espace entier est

$$\phi = \frac{1}{4\pi r} v(t.r) \ , \ t > r = |x| \ ;$$

alors

$$w = y - \phi$$

(*) Exposé n° XX, du 28 Février 1984.

vérifie

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \Delta w = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0,T[= Q \ ,$$

$$w(x,0) = \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \ ,$$

$$w = -\phi \quad \text{sur} \quad \Sigma \ .$$

Mais $\phi|_\Sigma \in L^2(\Sigma)$ si $v \in L^2(0,T)$. Or (cf. J.L. Lions, Contrôle des systèmes distribués singuliers, Gauthier Villars, 1983, Th. 4.3, p. 200) dans ces conditions w est continue de $[0,T] \to L^2(\Omega)$, d'où la propriété analogue pour y.

Une troisième démonstration a été donnée par L. Nirenberg (communication personnelle). Elle est basée sur la propriété "duale" de la continuité de y à valeurs dans $L^2(\Omega)$; si l'on considère ψ solutions de

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = 0 \quad \text{dans} \quad Q \ ,$$

$$\psi(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = h(x) \ \text{dans} \ \Omega \ , \quad h \in L^2(\Omega) \ ,$$

$$\psi = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma$$

alors $\psi(b,t) \in L^2(0,T)$.

La démonstration de Nirenberg utilise, entre autres, la propriété de propagation des ondes en dimension 3 d'espace.

J.L. LIONS
Professeur au Collège de France