Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. A. Raviart

Modèles fluides et modèles cinétiques en analyse numérique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. n° 19, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A19_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tel. (6) 941 82.00 - Poste N°
Telex : ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1983-1984

MODELES FLUIDES ET MODELES CINETIQUES EN ANALYSE NUMERIQUE

P.A. RAVIART

Université Pierre et Marie Curie

Exposé n° 19

17 Janvier 1984

1. INTRODUCTION.

Il est clair que les progrès en Calcul Scientifique, et en Analyse Numérique en particulier, sont directement influencés par l'accroissement des performances des ordinateurs. C'est ainsi que l'arrivée récente sur le marché d'une nouvelle génération d'ordinateurs vectoriels de grande puissance, type CRAY 1, a permis de s'attaquer de manière efficace à la résolution numérique de problèmes de très grande taille.

En Physique notamment, où la simulation sur ordinateur est devenue un instrument essentiel de la Recherche se substituant pour une part à l'expérimentation directe, il devient possible d'utiliser à un coût raisonnable des modèles cinétiques (de type Boltzmann, Vlasov, Fokker-Planck,...) permettant d'affiner de manière essentielle la connaissance apportée par des modèles fluides forcément imparfaits.

Nous allons dans cet exposé étudier divers problèmes rencontrés dans l'Analyse Numérique des modèles cinétiques et montrer comment l'utilisation de modèles fluides permet de résoudre de manière économique les modèles cinétiques. Comme exemple, nous prendrons les équations de Vlasov-Maxwell qui sont utilisées pour étudier l'interaction laser-plasma dans le cadre de la fusion nucléaire inertiel.

2. UN PROBLEME EN PHYSIQUE DES PLASMAS.

On considère un plasma formé de particules chargées de différents types. On désigne par $\bar{n}_\alpha$ la densité moyenne de particules de type α de masse m_α et de charge q_α et par $f_\alpha = f_\alpha(x,v,t)$ leur fonction de distribution. Si on suppose le plasma non collisionnel, chaque fonction f_α est solution de l'équation de Vlasov dans $\mathbb{R}^N$, $N \leqslant 3$:

$$(1) \qquad \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v.\nabla_x f_\alpha + \frac{1}{m_\alpha} F_\alpha . \nabla_v f_\alpha = 0 \quad , \quad x,v \in \mathbb{R}^N , \ t > 0 ,$$

où $F_\alpha = F_\alpha(x,v,t)$ est la force exercée sur chaque particule, i.e.

$$F_\alpha = q_\alpha(E + \frac{v \times B}{c}),$$

$E = E(x,t)$ est le champ électrique, $B = B(x,t)$ le champ magnétique et c est la vitesse de la lumière. Les équations de Vlasov sont en général couplées avec les équations de Maxwell régissant le couple (E,B). Lorsque l'on néglige le champ magnétique (cas de l'approximation électrostatique), on obtient le système couplé des équations de Vlasov-Poisson.

$$(2) \qquad \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v.\nabla_x f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E. \nabla_v f_\alpha = 0 ,$$

$$(3) \qquad \nabla.E = 4\Pi\rho$$

où $\rho = \rho(x,t)$ est la charge définie par

$$\rho = \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} f_{\alpha} \, dv \ . \tag{4}$$

A ces équations, il faut rajouter la condition de champ nul à l'infini :

$$E(x,t) \to 0 \quad \text{si} \quad |x| \to \infty \tag{5}$$

ainsi que les conditions initiales

$$f_{\alpha}(x,v,o) = f_{\alpha o}(x,v) \ . \tag{6}$$

De manière classique, les équations (3) et (5) s'écrivent de manière équivalente :

$$E(.,t) = K * \rho(.,t) \tag{7}$$

où K est le noyau donné par :

$$K(x) = \begin{cases} 2 \dfrac{x}{|x|^2} & , \ N = 2 \\ \dfrac{x}{|x|^3} & , \ N = 3 \ . \end{cases}$$

En ce qui concerne l'existence et l'unicité des solutions du système de Vlasov-Poisson (2) - (6), on connaît l'existence globale en temps d'une solution <u>faible</u> en dimension quelconque $N \leqslant 3$ (cf. Arsen'ev [1]). Par ailleurs, on a existence et unicité d'une solution classique pour tout temps t en dimension $N \leqslant 2$ et pour $t \leqslant T^*$ en dimension $N = 3$ ou T^* dépend des données (cf. Ukai & Okabe [10]).

Enfin, en dimension $N = 3$, Bardos & Degond [2] ont démontré que $T^* = +\infty$ dans le cas de données initiales "assez petites".

3. UNE METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE VLASOV-POISSON.

Un procédé numérique efficace de résolution numérique du système des équations de Vlasov-Poisson consiste à utiliser une méthode particulaire susceptible d'une interprétation physique évidente. Mathématiquement, la méthode est basée sur la remarque suivante. Si la condition initiale $f_{\alpha o}$ est une masse de Dirac dans l'espace des phases

$$f_{\alpha o}(x,v) = \delta(x-x_o) \otimes \delta(v - v_o)$$

et si le champ électrique E est supposé connu ("assez régulier"), la solution correspondante des équations (2), (6) est donnée par

$$f_\alpha(x,v,t) = \delta(x-x_o(t)) \otimes \delta(v-v_o(t))$$

où la fonction $t \to (x_o(t),v_o(t))$ est la solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_o}{dt}(t) = v_o(t) \ , \ \dfrac{dv_o}{dt}(t) = \dfrac{q_\alpha}{m_\alpha} E(x_o(t),t) \\ \\ x_o(o) = x_o \quad , \quad v_o(o) = v_o \ , \end{cases}$$

c'est-à-dire la trajectoire dans l'espace des phases d'une particule de type α soumise au champ électrique E .
Dans ces conditions, étant donné une approximation suffisamment régulière E^h du champ électrique E , on approche chaque distribution initiale $f_{\alpha o}$ par :

$$f^h_{\alpha o} \quad \sum_j w_{\alpha j}\, \delta(x-x_{\alpha j}) \otimes \delta(v-v_{\alpha j})$$

et on résout

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^h}{\partial t} + v.\nabla_x f^h_\alpha + \dfrac{q_\alpha}{m_\alpha} E^h . \nabla_v f^h_\alpha = 0 \\ \\ f^h_\alpha(x,v,o) = f^h_{\alpha o}(x,v) \end{cases}$$

ce qui donne

$$f^h_\alpha(x,v,t) = \sum_j w_{\alpha j}\, \delta(x-x_{\alpha j}(t)) \otimes \delta(v-v_{\alpha j}(t)) \ ,$$

où chaque fonction $t \to (x_{\alpha j}(t),\, v_{\alpha j}(t))$ est la solution de

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_{\alpha j}}{dt}(t) = v_{\alpha j}(t) \ , \quad \dfrac{dv_{\alpha j}}{dt}(t) = \dfrac{q_\alpha}{m_\alpha} E^h(x_{\alpha j}(t),t) \ , \\ \\ x_{\alpha j}(0) = x_{\alpha j} \qquad , \qquad v_{\alpha j}(0) = v_{\alpha j} \end{cases}$$

Pour achever de définir la méthode particulaire, il convient de préciser comment s'effectue le couplage entre le champ self- consistant E^h et les distributions de particules f^h_α . D'après (7), on peut songer à poser

$$E^h(.,t) = K * \rho^h(.,t)$$

où

$$\rho^h(x,t) = \sum_{\alpha,j} \bar{n}_\alpha \, q_\alpha \, w_{\alpha j} \, \delta(x - x_{\alpha j}(t)) \ .$$

Malheureusement, le noyau K étant discontinu à l'origine n'opère pas par convolution sur les mesures. Le remède consiste à régulariser ce noyau K. On introduit pour cela une fonction cut-off $\zeta \in C_0^o(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \zeta(x) \, dx = 1$$

et on pose

$$\zeta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \, \zeta(\frac{x}{\varepsilon})$$

puis

$$K_\varepsilon = K * \zeta_\varepsilon \ .$$

On peut alors prendre

$$E^h(.,t) = K_\varepsilon * \rho^h(.,t)$$

de sorte que

$$(9) \qquad E^h(x,t) = \sum_{\alpha,j} \bar{n}_\alpha \, q_\alpha \, w_{\alpha j} \, K_\varepsilon(x - x_{\alpha j}(t)) \ .$$

Les équations (8), (9) définissent alors la méthode particulaire. Pour une description précise des propriétés d'approximation de la méthode de la fonction cut-off, voir Raviart [9], Cottet & Raviart [4].

Notons que les équations (8), (9) équivalent à un système différentiel non linéaire du second ordre en les $x_{\alpha j}$ dont la dimension est précisément égale au nombre de particules utilisées. Dans des simulations réalistes en dimension $N \geqslant 2$, on peut être conduit à utiliser de l'ordre de 10^5 à 10^6 particules. Il va sans dire que le résolution pratique d'un système différentiel d'une telle dimension apparaît ici critique !

La méthodologie la plus simple consiste à utiliser un schéma de résolution explicite de ce système différentiel. On introduit alors un pas de temps Δt et on pose

$$t_n = n\,\Delta t \quad , \quad t_{n+1/2} = (n+\tfrac{1}{2})\Delta t$$

et on remplace (8), (9) par

$$(10) \qquad \frac{1}{\Delta t}(x_{\alpha j}^{n+1} - x_{\alpha j}^{n}) = v_{\alpha j}^{n+1/2} \quad , \quad \frac{1}{\Delta t}\,(v_{\alpha j}^{n+1/2} - v_{\alpha j}^{n-1/2}) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\, E^n(x_{\alpha j}^{n}) \ ,$$

$$(11) \qquad E^n = K_\varepsilon * \rho^n \quad , \quad \rho^n = \sum_{\alpha,j} \bar{n}_\alpha\, q_\alpha\, w_{\alpha j}\, \delta(x - x_{\alpha j}^{n}) \ ,$$

où $x_{\alpha j}^{n}$, $v_{\alpha j}^{n+1/2}$, E^n sont respectivement des approximations de $x_{\alpha j}(t_n)$,

$v_{\alpha j}(t_{n+1/2})$ et $E^h(.,t_n)$. Il est clair que, partant des $x^n_{\alpha j}$, $v^{n-1/2}_{\alpha}$, les équations précédentes permettent de déterminer successivement et de manière explicite les quantités ρ^n, E^n, $v^{n+1/2}_{\alpha j}$, $x^{n+1}_{\alpha j}$.

Si la méthode numérique ainsi définie est de mise en oeuvre aisée (du moins apparemment !), le pas de temps Δt doit par contre satisfaire une contrainte très restrictive (appelée condition de stabilité). Pour le voir simplement, on considère le cas d'un oscillateur harmonique

$$x'' + \omega^2 x = 0 .$$

Si on applique le schéma d'intégration numérique à l'équation précédente, on obtient

$$\frac{1}{\Delta t}(x^{n+1}-x^n) = v^{n+1/2} \quad , \quad \frac{1}{\Delta t}(v^{n+1/2} - v^{n-1/2}) + \omega^2 x^n = 0 .$$

On vérifie aisément que la solution $(x^n)_{n \geqslant 0}$ de ces équations est bornée (propriété éminemment désirable) si et seulement si la condition de stabilité

$$\omega \Delta t \leqslant 2$$

est satisfaite, ce qui introduit une restriction sur le pas de temps Δt. Dans le cas du schéma (10), (11), une étude semi-heuristique montre qu'en pratique le pas de temps Δt doit satisfaire

(12) $$\Delta t \lesssim \frac{1}{\omega_{pe}}$$

où ω_{pe} est la fréquence plasma électronique (c'est la plus haute fréquence observable dans le plasma). En d'autres termes, le pas de temps doit être choisi suffisamment petit pour pouvoir décrire tous les phénomènes hautes fréquences ! Ceci est parfaitement adapté à l'étude numérique des instabilités d'un plasma. Pour tout ceci, voir par exemple Hockney & Eastwood [6].

4. METHODE IMPLICITES ET MODELES FLUIDES.

Lorsqu'on veut décrire des phénomènes basses fréquences, par exemple des phénomènes de transport, la restriction (12) sur le pas de temps Δt devient intolérable numériquement et on est conduit à remplacer le schéma explicite (10), (11) par un schéma implicite de la forme

(13) $$\frac{1}{\Delta t}(x_{\alpha j}^{n+1} - x_{\alpha j}^{n}) = v_{\alpha j}^{n+\theta} \quad , \quad \frac{1}{\Delta t}(v_{\alpha j}^{n+1} - v_{\alpha j}^{n}) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E^{n+\theta}(x_{\alpha j}^{n+\theta}) \ ,$$

(14) $$E^n = K_{\varepsilon *} \rho^n = \sum_{\alpha, j} \bar{n}_\alpha \, q_\alpha \, w_{\alpha j} \, K_\varepsilon (x - x_{\alpha j}^n) \ ,$$

où, de manière générale, on a posé

$$\varphi^{n+\theta} = \theta \varphi^{n+1} + (1-\theta)\varphi^n \ .$$

On vérifie que le schéma (13), (14) est inconditionnellement stable dès que θ est $\geqslant \frac{1}{2}$ (pas de restriction sur le pas de temps Δt). Naturellement, le prix à payer est qu'il faut désormais résoudre à chaque pas un système d'équations non linéaires couplées en les $x_{\alpha j}^{n+1}$, système

d'équations non linéaires couplées en les $x_{\alpha j}^{n+1}$, système dont la dimension est égale au nombre de particules du modèle numérique ! La résolution numérique directe d'un tel système apparaît actuellement hors de portée dans un certain nombre de simulations réalistes où on peut utiliser de l'ordre de 10^5 particules.

Une méthode indirecte par Mason [8] consiste à associer au modèle cinétique un modèle fluide qui va servir à prédire le champ électrique E .

On pose :

$$\rho_\alpha = \bar{n}_\alpha q_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} f_\alpha \, dv ,$$

$$J_\alpha = \bar{n}_\alpha q_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} v f_\alpha \, dv ,$$

$$\alpha = \bar{n}_\alpha m_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} v \otimes v f_\alpha \, dv .$$

En prenant les moments d'ordres 0 et 1 de l'équation de Vlasov (2) par rapport à v , on obtient les équations de conservation de la charge ρ_α et du courant J_α :

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla . J_\alpha = 0 ,$$

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial t} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}(\nabla . \mathcal{P}_\alpha - \rho_\alpha E) = 0 ,$$

équations que l'on couple avec l'équation de Poisson

$$\nabla . E = 4\Pi\rho \qquad , \quad \rho = \sum_\alpha \rho_\alpha .$$

Bien entendu, ces équations ne sont pas fermées et il convient d'introduire une relation de fermeture sous la forme d'une équation d'état. On pose :

$$u_\alpha = \frac{J_\alpha}{\rho_\alpha} \quad = \text{vitesse du fluide } \alpha$$

puis,

$$P_\alpha = \overline{n}_\alpha \, m_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} (v - u_\alpha) \otimes (v - u_\alpha) \, f_\alpha \, dv \quad ,$$

$$P_\alpha = p_\alpha \, I + \Pi_\alpha \qquad , \quad tr(\Pi_\alpha) = 0 \, ,$$

i.e., P_α est le tenseur de pression du fluide α . Puisque

$$\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha = J_\alpha \otimes u_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}(p_\alpha \, I + \Pi_\alpha) \quad ,$$

l'équation de conservation du courant devient

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial t} + \nabla.(J_\alpha \otimes u_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} P_\alpha) - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \rho_\alpha E = 0 \, .$$

Si on néglige le déviateur Π_α du tenseur de pression P_α , les deux relations de fermeture classiques consistent à prendre pour équation d'état

$$p_\alpha \, \rho_\alpha^{-\gamma} = c^{te}$$

avec soit $\gamma = 1$ (cas isotherme) , $\gamma = 5/3$ (cas adiabatique). Dans tous

les cas, on est conduit à la résolution d'un modèle à plusieurs fluides (dont les équations forment un système hyperbolique non linéaire) que l'on peut résoudre à l'aide du schéma implicite suivant directement inspiré de (13), (14)

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(\rho_\alpha^{n+1} - \rho_\alpha^n) + \nabla . J_\alpha^{n+\theta} = 0 \quad , \\ \frac{1}{\Delta t}(J_\alpha^{n+1} - J_\alpha^n) + \nabla . (J_\alpha^{n+\theta} \otimes u_\alpha^{n+\theta} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}(p_\alpha^{n+\theta}\, I + \Pi_\alpha^{n+\theta})) - \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\rho_\alpha^{n+\theta}\, E^{n+\theta} = 0 \, , \\ \nabla . E^{n+\theta} = 4\Pi\rho^{n+\theta} \quad . \end{cases}$$

En fait, il convient de discrétiser ces équations par rapport aux variables d'espaces pour obtenir une méthode numérique réellement utilisable et ceci est un point hautement non trivial. Pour les méthodes récentes d'approximation des systèmes hyperboliques non linéaires, cf. par exemple Harten [5] .

En pratique, connaissant

$$f_\alpha^n(x,v) = \Sigma\, w_{\alpha j}\, \delta(x - x_{\alpha j}^n) \otimes \delta(v - v_{\alpha j}^n) \quad ,$$

on calcule (après régularisation) ζ_α^n , J_α^n , $P^n = p_\alpha^n\, I + \Pi_\alpha^n$ puis on prédit le champ électrique $\tilde{E}^{n+\theta}$ en résolvant les équations fluides

$$(15) \qquad \begin{cases} \frac{1}{\theta\Delta t}(\tilde{\rho}_\alpha^{n+\theta} - \rho_\alpha^n) + \nabla . J_\alpha^{n+\theta} = 0 \\ \frac{1}{\theta\Delta t}(\tilde{J}_\alpha^{n+\theta} - J_\alpha^n) + \nabla . (\tilde{J}_\alpha^{n+\theta} \otimes u_\alpha^{n+\theta} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha}(\tilde{p}_\alpha^{n+\theta}\, I + \tilde{\Pi}_\alpha^{n+\theta}) - \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\tilde{\rho}_\alpha^{n+\theta}\, \tilde{E}^{n+\theta} = 0 \\ \nabla . \tilde{E}^{n+\theta} = 4\Pi\tilde{\rho}^{n+\theta} \end{cases}$$

auxquelles on rajoute les relations de fermeture sur un pas de temps Δt .

$$
\begin{aligned}
&\tilde{p}_\alpha^{n+\theta}(\tilde{\rho}_\alpha^{n+\theta})^{-\gamma} = p_\alpha^n(\rho_\alpha^n)^{-\gamma} \quad , \\
&\tilde{\Pi}_\alpha^{n+\theta} = \Pi_\alpha^n \quad .
\end{aligned} \tag{16}
$$

La résolution numérique du modèle fluide (15), (16) s'avère infiniment moins coûteuse que la résolution du modèle cinétique (13), (14). Ayant ainsi prédit le champ électrique $\tilde{E}^{n+\theta}$ au temps $t_{n+\theta}$, on résout ensuite pour chaque particule les équations non linéaires découplées

$$
\frac{1}{\Delta t}(x_{\alpha j}^{n+1} - x_{\alpha j}^n) = v_{\alpha j}^{n+\theta} \quad , \quad \frac{1}{\Delta t}(v_{\alpha j}^{n+1} - v_{\alpha j}^n) = \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\tilde{E}^{n+\theta}(x_{\alpha j}^{n+\theta}) \quad , \tag{17}
$$

puis on calcule E^{n+1} solution de

$$
\nabla . E^{n+1} = 4\Pi\rho^{n+1} \quad , \tag{18}
$$

et ainsi de suite, ...

Cette méthode numérique peut donc apparaître comme une correction cinétique d'un modèle fluide. Pour une approche plus directe, cf. Langdon & al. [7]. Cette méthode d'approximation prometteuse qui mêle description fluide et description cinétique reste essentiellement heuristique. En particulier, on ne connaît rien sur sa convergence et sur le rôle de la relation de fermeture choisie. De plus, il reste à étudier les méthodes de discrétisation en espace des équations (15) et à mettre au point des algorithmes performants de résolution des équations non linéaires obtenues : vaste programme qui en est encore à son début !

Signalons pour conclure que le vrai problème physique est relatif aux équations de Vlasov-Maxwell

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v.\nabla_x f_\alpha + \dfrac{q_\alpha}{m_\alpha}(E + \dfrac{v \times B}{c}).\nabla_v f_\alpha = 0 \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0 \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = \dfrac{4\Pi}{c} J \qquad , \quad J = \sum_\alpha J_\alpha \ . \end{cases}$$

Pour une généralisation des idées précédentes à ce cas, cf. Brackbill & Forslund [3]. Enfin, on a négligé ici les termes de collision qui conduisent à rajouter un terme de Fokker-Planck dans l'équation de Vlasov. La généralisation des techniques précédentes aux équations de Vlasov-Fokker-Planck-Poisson (ou Maxwell) reste largement ouverte.

5. REFERENCES.

[1] A.A. ARSEN'EV, Global existence of a weak solution of Vlasov's equation system of equations, Zh.Vychisl Mat. Mat. Fiz., 15 (1975) 136-147.

[2] C. BARDOS & DEGOND, Global existence for the Vlasov-Poisson equations in 3 space variables with small initial data, Analyse non linéaire (à paraître).

[3] J.U. BRACKBILL & D.W. FORSLUND, An implicit method for electromagnetic plasma simulation in two dimensions. J. Comp. Physics 46 (1982), 271-308.

[4] G.H. COTTET & P.A. RAVIART, Particle methods for the one-dimensional Vlasov-Poisson equations, SIAM J. Numer. Anal. 1 (1984), 52-76.

[5] A. HARTEN, On a class of high resolution total variation stable finite difference schemes, SIAM J. Numer. Anal. 1 (1984), 1-23.

[6] R.W. HOCKNEY & J.W. EASTWOOD, Computer Simulation Using Particles, Mc Graw-Hill, New-York 1981.

[7] A.B. LANGDON, B.I. COHEN & A. FRIEDMAN, Direct implicit large time step particle simulation of plasmas, J. Comp. Physics 51 (1983), 1983.

[8] R.J. MASON, Implicit moment particle simulation of plasmas, J. Comp. Physics 41 (1981), 233-244.

[9] P.A. RAVIART, An analysis of particle methods, Cours CIME : Numerical Methods in Fluids Dynamics, Como Juillet 1983 (à paraître aux Lecture Notes in Mathematics, Springer).

[10] UKAI & OKABE, On classical solutions in the large in time of the two-dimensional Vlasov's equation, Osaka, J. Math 15 (1978), 245-261.