Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. Balabane

Comportement asymptotique des solutions des équations de type Schrödinger dans $L^P(\mathbb{R}^n)$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 8, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A9_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1980-1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 0 - 1 9 8 1

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE TYPE SCHRODINGER DANS $L^P(\mathbb{R}^n)$

par M. BALABANE

Exposé n° VIII

16 Décembre 1980

§ 1. INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des propriétés des équations de la forme :

$$(\star) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = i\, P(D)U \quad ; \quad U(o,x) = U_o(x).$$

lorsque $U_o(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(Ici $D = (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n})$ et P est un polynôme vérifiant $\operatorname{Im} P(\xi) \geqslant 0$ pour $\xi \in \mathbb{R}^n$).

Il est bien connu que pour $p = 2$, le problème de Cauchy $(\star)$ est bien posé, i.e. : pour tout $U_o \in L^2(\mathbb{R}^n)$, il existe une solution $U(t,x)$ du problème $(\star)$ qui vérifie :

(i) $U(t,x) \xrightarrow{L^2} U_o(x)$ lorsque $t \longrightarrow o$

(ii) $||U(t,.)||_{L^2} \leqslant ||U_o||_{L^2}$

Il est aussi bien connu que pour $p \neq 2$, le problème de Cauchy $(\star)$ est mal posé, et qu'une inégalité du type (ii) est alors fausse (il suffit de prendre $P(D) = \Delta$)

Néanmoins, dans le cas $P(D) = \Delta$, les deux propriétés suivantes fournissent, pour $p \neq 2$, un moyen d'analyser le problème $(\star)$:

a) Un résultat de S. Sjöstrand [7], sur les moyennes de Riesz s'énonce, en posant $e^{it\Delta}U_o$ la solution de $(\star)$ lorsque $P(D) = \Delta$, et pour $U_o \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\left|\left| \frac{1}{t^k} \int_o^t (t-s)^k\, e^{is\Delta}U_o\, ds \right|\right|_{L^p} \leqslant ||U_o||_{L^p} \quad \text{pour } k > n\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|$$

Ceci induit que certaines moyennes en la variable t de la solution de l'équation de Schrödinger vérifient des inégalités de type (ii). Ce qui permet d'espérer, dans le cas $\operatorname{Im} P(\xi) \geqslant 0$, montrer que $(\star)$ est bien posé dans le cadre des semigroupes distributions, et d'en déduire des estimations de la résolvante de

$iP(D)$ dans $L^P(\mathbb{R}^n)$.

b) L'inégalité classique :

$$||e^{it\Delta}U_o||_{L^{P'}} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} ||U_o||_{L^P}$$

(où $1 \leqslant p \leqslant 2$, $1/p + 1/p' = 1$ et $\alpha = n|1/p - 1/2|$)
induit à prouver de telles inégalités dans le cas $Im\, P(\xi) = 0$, et d'examiner l'existence d'un poids $M(t)$ qui interviendrait dans une telle inégalité :

$$||e^{itP(D)}U_o||_{L^{P'}} \leqslant M(t)\ ||U_o||_{L^P}$$

c) En fait, les deux problèmes (a) et (b) sont liés, et leur conjonction nous permettra d'examiner le problème "avec potentiel" :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = iP(D)U + V(x)U \quad , \quad U(o,x) = U_o(x) \in L^P(\mathbb{R}^n).$$

La première partie de ce travail (Problème (a)) a été faite en collaboration avec H.A. Emami Rad, et a fait l'objet de [1], [2] et [3]. Les preuves des résultats de la seconde partie (Problème (b)) ont fait l'objet de [4] et [5].

§ 2. SEMI GROUPES DISTRIBUTION DE CLASSE σ, D'ORDRE k : (en abrégé SGD $\sigma(k)$)

Définition 1 : Nous notons T_k le complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ pour la norme

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\ ;\ p_k(\varphi) = \sum_{\ell=o}^{\ell=k} ||(t\frac{d}{dt})^\ell \varphi||_{L^1(\mathbb{R}_+)}$$

La proposition suivante fournit les propriétés utiles de T_k :

Proposition 1 : T_k est une algèbre de Banach pour la convolution additive sur $\mathbb{R}_+$; cette algèbre contient les fonctions $Y(t)e^{-\lambda t}$ pour $Im\ \lambda > 0$; de plus, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, la famille de fonctions $(\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{\cdot}{\varepsilon}))_{\varepsilon > 0}$ est équibornée dans T_k.

Nous donnons maintenant l'équivalent abstrait des solutions des équations du type (★) :

Définition 2 : Soit X un espace de Banach. Un semi groupe distribution de classe σ et d'ordre k est une représentation continue $\mathcal{G}$ de l'algèbre T_k dans l'algèbre $\mathcal{L}(X)$ vérifiant la régularité à l'origine suivante : il existe un sous espace D dense dans X tel que pour tout x appartenant à D, la distribution à valeur dans X : $\mathcal{G} \otimes x$, est une distribution fonction continue sur $\overline{\mathbb{R}}_+$, nulle pour $t < o$, et valant x à l'origine.

Remarque : Cette définition précise la notion de semi groupe distribution régulier introduite par Lions [6], de manière adaptée aux équations (★) dans $L^P(\mathbb{R}^n)$.

De même que dans Lions [6], nous définissons le générateur infinitésimal d'un SGDσ(k) $\mathcal{G}$, comme étant la fermeture de l'opérateur (non borné) dans X : $\mathcal{G}(-\delta')$, et le théorème suivant en fournit les propriétés spectrales :

Théorème 1 : Soit $\mathcal{G}$ un SGDσ(k) sur un espace de Banach X. Soit A son générateur. A est fermé, de domaine dense, et son ensemble résolvant contient les nombres complexes de partie réelle strictement positive. De plus, on a la majoration :

$$\forall \lambda,\ \mathrm{Re}\,\lambda > 0\ ;\ \forall \mu,\ \mathrm{Re}\,\mu > 0,\quad \|(\lambda - A)^{-\mu}\| \leqslant C|\mu|^k\ \frac{\Gamma(\mathrm{Re}\,\mu)}{|\Gamma(\mu)|}\ \frac{|\lambda|^k}{(\mathrm{Re}\,\lambda)^{k + \mathrm{Re}\,\mu}}$$

Le théorème suivant est un théorème inverse, de type Hille Yosida, avec perte de deux unités.

Théorème 1bis : Soit A un opérateur fermé, de domaine dense, dans un espace de Banach X. S'il vérifie la majoration :

$$\forall \lambda,\ \mathrm{Re}\,\lambda > 0,\quad \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqslant C|\lambda|^k\ (\mathrm{Re}\,\lambda)^{-k-1}$$

alors A engendre un SGDσ(k+2).

La démonstration du théorème 1 repose sur le fait que les fonctions $Y(t)e^{-\lambda t}$ appartiennent à T_k pour Re $\lambda > 0$. En effet, on démontre que $(\lambda-A)^{-1} = \mathcal{G}(Y(t)e^{-\lambda t})$. L'inégalité découle de la continuité de $\mathcal{G}$ sur T_k.

La démonstration du théorème 1bis se fait par une construction de $\mathcal{G}$ par une intégrale de Dunford.

§ 3. PROBLEME DE CAUCHY (★) DANS $L^p(\mathbb{R}^n)$: $(1 < p < \infty)$

Le théorème suivant montre que le problème (a) énoncé dans l'introduction admet une réponse positive, au sens des distributions en la variable t, à valeur dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour les variables x. Il précise l'ordre de cette distribution.

Théorème 2 : Si $\mathrm{Im}\, P(\xi) \geqslant 0$, alors $iP(D)$, regardé comme opérateur (non borné) fermé dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ engendre un SGD$\sigma(k)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour tout entier $k > n/2$.

La démonstration de ce théorème se fait par analyse de Fourier, en utilisant un théorème sur les multiplicateurs de Fourier dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ fourni par Stein [8] p. 96.

Le théorème 1, et l'interpolation entre $L^{1+\varepsilon}$ et L^2, où $iP(D)$ engendre trivialement un semi groupe fortement continu permet alors de montrer :

Théorème 2bis : Si $\mathrm{Im}\, P(\xi) \geqslant 0$, alors tout λ appartenant à C, de partie réelle strictement positive, appartient à l'ensemble résolvant de $iP(D)$, opérateur fermé dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. De plus, pour tout μ de partie réelle strictement positive, et tout ε réel strictement positif, on a la majoration :

$$\left\| (\lambda - iP(D))^{-\mu} \right\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))} \leqslant C_\varepsilon \frac{\Gamma(\mathrm{Re}\ \mu)}{|\Gamma(\mu)|} |\mu|^k \frac{|\lambda|^k}{(\mathrm{Re}\ \lambda)^{k+\mathrm{Re}\ \mu}}$$

avec $k = (n+2)\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| + \varepsilon$

Remarque : si P est homogène, alors p peut prendre les valeurs 1 et ∞, et on peut faire $\varepsilon = 0$ dans le théorème 2bis.

§ 4. INEGALITES $(L^p, L^{p'})$ POUR LE PROBLEME (★) : $(1 \leqslant p \leqslant 2 \ ; \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$

Le problème (b), énoncé dans l'introduction, est le problème de l'existence d'une fonction M(t) telle que toute solution U(t,x) du problème (★), avec donnée initiale $U_o \in S(\mathbb{R}^n)$, satisfasse l'inégalité :

$$||U(t,x)||_{L^{p'}} \leqslant M(t) \ ||U_o||_{L^p}$$

Ce problème est équivalent, pour p=1, et par analyse de Fourier, à l'appartenance de $\bar{\mathcal{F}}(e^{it\,P(\xi)})$ à l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, la fonction M(t) étant la norme de cette fonction dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

L'analyse de $\bar{\mathcal{F}}(e^{it\,P(\xi)})$ se fait par un feuilletage de l'extérieur d'un compact de $\mathbb{R}^n$ pour les surfaces $P(\xi) = cte$, et l'estimation de l'intégrale définissant $\bar{\mathcal{F}}(e^{it\,P(\xi)})$ par la méthode de la phase stationnaire.

Le point essentiel est alors de montrer que sous les hypothèses :

(H1) $P(\xi) = ||\xi||^{2m} + Q(\xi)$ où Q est un polynôme réel de degré supérieur ou égal à 2m-1.

(H2) $2m > n + 1$ (H3) $n > 1$,

il existe un difféomorphisme de l'extérieur d'un compact de $\mathbb{R}^n$ sur $S^{n-1} \times]a,\infty[$ donné par :

$$\omega = ||\xi||^{-1}\xi \qquad s = P(\xi)$$

où, en posant $||\xi|| = \rho$, on a

$$s(\rho,\omega) = s^{1/2m} + \sigma(\omega,\rho)$$

σ appartenant à la classe de symboles de Hörmander $S^0_{1,0}(S^{n-1} \times \mathbb{R})$. L'estimation de $(e^{it\,P(\xi)})$ se ramène alors à l'étude d'une intégrale oscillante sur S^{n-1}, dont la phase n'a que deux points stationnaires, tous les deux non dégénérés, uniformément en les paramètres. On a alors :

Théorème 3 : Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), on a, pour toute $U_o \in S(\mathbb{R}^n)$ et en notant U(t,x) la solution du problème (★),

$$\forall \ t \neq 0, \quad ||U(t,x)||_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \max\left(1, \ |t|^{-2\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right|}\right) ||U_o||_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Utilisant le fait que la transformée de Laplace en la variable t de U(t,x) fournit la résolvante de iP(D), nous déduisons du théorème 3 :

Corollaire : Sous les hypothèses (H1), (H2), (H3), et pour $1 < p \leqslant 2$, on a l'inégalité

$$\forall \lambda, \mathrm{Re}\ \lambda > 0, \quad \| (\lambda - iP(D))^{-1} \|_{\mathcal{L}(L^P, L^{P'})} \leqslant C\ (\mathrm{Re}\ \lambda)^{2|1/p-1/2|-1}$$

§ 5. PROBLEME (★) AVEC POTENTIEL

Nous nous proposons de démontrer que le problème de Cauchy

$$(\star\star) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = iP(D)U + V(x)U \qquad U(o,x) = U_o(x)$$

est bien posé au sens des distributions en la variable t à valeurs dans $L^P(\mathbb{R}^n)$. (Ici V(x) est l'opérateur de multiplication par une fonction V(x) appartenant à un espace $L^r(\mathbb{R}^n)$ à préciser).

Pour cela, nous estimons la résolvante

$$\| (\lambda - (iP(D) + V))^{-1} \|_{\mathcal{L}(L^P(\mathbb{R}^n))}$$

par une méthode de perturbation, et en utilisant le corollaire du théorème 3 ; puis nous utilisons le théorème 1bis pour conclure.

Théorème 4 : Pour $1 < p < \infty$, sous les hypothèses (H1), (H2), (H3) sur P, et pour $V \in L^r(\mathbb{R}^n)$ avec $r^{-1} = |p^{-1} - p'^{-1}|$, (iP(D) + V) engendre un SGDσ, à croissance exponentielle, d'ordre k supérieur à $(n+2)\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right| + 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Balabane et H.A. Emami Rad : Smooth distribution group and Schrödinger equation in $L^P(\mathbb{R}^n)$. J. Math. Anal. Appl. vol 70 n° 1 (1971) pp 61-71.

[2] M. Balabane et H.A. Emami Rad : Systèmes Pseudo Différentiels dans $L^P(\mathbb{R}^n)$. Note aux C.R.A.S. (à paraître).

[3] M. Balabane et H.A. Emami Rad : Pseudo Differential Systems in $L^P(\mathbb{R}^n)$. (à paraître).

[4] M. Balabane : Décroissance des solutions d'équations du type de Schrödinger. Application à leur régularité dans $L^P(\mathbb{R}^n)$. Note aux C.R.A.S. (à paraître).

[5] M. Balabane : Uniform Behaviour of solutions of parabolic equations. Application to $iP(D) + V$ in $L^P(\mathbb{R}^n)$. (à paraître).

[6] J.L. Lions : Les Semi Groupes Distributions. Portugalae Math. 19. (1960) pp 141-164.

[7] S. Sjöstrand : On the Riesz means of solutions to Schrödinger equation. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 24 (1970) pp 331-348.

[8] E. Stein : Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press (1970).