Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. Derridj

Inégalités de Carleman et applications au $\bar{\partial}$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 6, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A7_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1980-1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 0 - 1 9 8 1

INEGALITES DE CARLEMAN ET APPLICATIONS AU $\bar{\partial}$

par M. DERRIDJ

Exposé 18 Novembre 1980

INTRODUCTION

Nous donnons ici quelques résultats concernant le $\bar{\partial}$: résolution d"un "problème de Cauchy" et application au prolongement de formes $\bar{\partial}$-fermées, en particulier des fonctions holomorphes.

Pour cela nous utilisons la méthode des inégalités de Carleman (voir A. Andreotti, E. Vesentini [2]) avec des fonctions poids liées au domaine (pour lequel on veut, par exemple, résoudre un problème de Cauchy) (voir L. Hörmander pour les méthodes L^2 avec poids [5]).

Le but de ce travail est d'essayer d'étendre à quelques domaines dont la forme de Levi peut dégéner et qui ne sont pas pseudoconvexes, des résultats connus, sur le prolongement des fonctions holomorphes. On a des résultats de prolongement local pour des formes $\bar{\partial}$ -fermées, qui, cependant, ne sont satisfaisants que dans le cas des fonctions (voir corollaire 5.2 et Th. 5.3).

Dans le cas strict, le problème de Cauchy a été abordé par R. Nirenberg [8] en utilisant les résultats d'Andreotti-Vesentini.

Dans le cas des formes, signalons les travaux de J. J. Kohn, H. Rossi [4] et A. Andreotti, C. D. Hill [1].

QUELQUES NOTATIONS

On considère un domaine Ω borné de $\mathbb{C}^n$, une fonction $\varphi \in C^2(\mathbb{C}^n)$, positive. Pour deux fonctions u,v, on note $(u,v)_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} e^{\varphi} u.\bar{v}$, lorsque ceci a un sens; si u est une (O,q)-forme :

$$u = \sum_{|I|=q} u_I d\bar{z}_I ,$$

ainsi que v, on note :

$$(u,v)_\varphi = \sum_{|I|=q} (u_I, v_I)_\varphi .$$

Rappelons que

$$\bar{\partial} u = \sum_{|I|=q} \frac{\partial u_I}{\partial z_i} d\bar{z}_i \quad d\bar{z}_I = \sum_{|J|=q+1} \left(\sum \varepsilon_J^{iI} \frac{\partial u_I}{\partial z_i}\right) d\bar{z}_J$$

où ε_J^{iI} est le signe de la permutation $iI \longrightarrow J$.

On notera alors ϑ_φ l'adjoint formel de $\bar\partial$ pour $(\ ,\ )_\varphi$ c'est-à-dire que

$$(\vartheta_\varphi u, v)_\varphi = (u, \bar\partial v)_\varphi \ ,$$

si u est une (0,q)-forme pour tout $v \in \mathcal{D}^{q-1}$ où

$$\mathcal{D}^{q-1} = \{(0,q-1)\text{-formes } C^\infty \text{ à support compact}\}$$

Comme on travaillera sur Ω , on considèrera $\mathcal{D}^{q-1}(\Omega)$ l'espace des (0,q-1)-formes C^∞ à support compact dans Ω . Notons :

$$Q_\varphi(u,v) = (\bar\partial u, \bar\partial v)_\varphi + (\vartheta_\varphi u, \vartheta_\varphi v)_\varphi \ , u,v \in \mathcal{D}^q(\Omega)$$

$$\square_\varphi = \bar\partial \vartheta_\varphi + \vartheta_\varphi \bar\partial$$

Généralement on aura $q \geqslant 1$.

3. UN CALCUL DE $Q_\varphi(u,u)$ POUR $u \in \mathcal{D}^q(\Omega)$ ET SES CONSEQUENCES

En arrangeant d'une certaine façon les termes qui viennent de $\|\bar\partial u\|_\varphi^2$ et $\|\vartheta_\varphi u\|_\varphi^2$, on obtient une formule contenue dans la :

Proposition 3.1 : On a l'égalité

$$(3.1) \qquad \begin{cases} Q_\varphi(u,u) = \displaystyle\sum_{i \in I} \left\| \frac{\partial u_I}{\partial z_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} u_I \right\|_\varphi^2 \\ \qquad + \displaystyle\sum_{|J|=q+1} \Big(\sum_{i,j \in J} \int_\Omega e^{-\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar z_j} u_i^J \bar u_j^J \Big) \ ; \quad \forall\, u \in \mathcal{D}^q(\Omega) \end{cases}$$

où $u_i^J = \varepsilon_J^{iI} u_I$.

Partant de cette égalité, nous allons introduire des hypothèses qui affaiblissent de façon naturelle celles qu'on a dans le cas strict (cas où un certain nombre de valeurs propres de la Hessienne de φ sont strictement positives).

Soient $\lambda_{i,J}$ des fonctions continues (non nécessairement positives) telles que

$$\sum_{i,j \in J}{}' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial z_j} u_i^I \overline{u_j^J} \geqslant \sum_{i \in J} \lambda_{i,J} |u_i^J|^2 .$$

Posons $\lambda_I(\varphi) = \sum_{i \notin I}{}' \lambda_{i,(iI)}$

Hypothèse $(*)_q$: $\lambda_q(\varphi) = \inf_{|I|=q} \lambda_I(\varphi) \geqslant 0$.

Corollaire 3.2 : Sous l'hypothèse $(*)_q$ on a

$$\int_\Omega e^{-\varphi} \lambda_q(\varphi) |u|^2 \leqslant Q_\varphi(u,u) \quad \forall\, u \in \mathcal{D}^q(\Omega) .$$

Dans le cas où $\lambda_q(\varphi)$ est strictement positive dans $\overline{\Omega}$ on en déduit une majoration de $\int_\Omega e^{-\varphi}|u|^2$, par $Q_\varphi(u,u)$. Mais ici, nous nous intéressons au cas non strict. Nous allons cependant avoir une majoration de $\int_\Omega e^{-\varphi}|u|^2$ par $Q_\varphi(u,u)$ en exploitant toute l'égalité 3.1.

Pour mieux éclairer cette partie, considérons des fonctions $\mu : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, de classe C^2 telles que :

$$\mu' \geqslant 1 \ , \ \mu'' \geqslant 0 .$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.3 : On a l'inégalité

$$(3.2) \qquad \int_\Omega e^{-\mu(\varphi)} \lambda_q(\varphi) |u|^2 + \frac{1}{C_\mu} \|u\|^2_{\mu(\varphi)} \leqslant Q_{\mu(\varphi)}(u,u) \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}^q(\Omega) .$$

Cette inégalité nous montre que $\|u\|^2_{\mu(\varphi)}$ est dominé par $Q_{\mu(\varphi)}(u,u)$, mais en utilisant une constante C_μ (qui dépend de μ). Alors que si $\lambda_q(\varphi) \geqslant c > 0$, on aurait une majoration sans constante C_μ .

L'inégalité (3.2) se démontre en utilisant les termes

$$\sum_{i \in I}{}' \| \frac{\partial u_I}{\partial z_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} u_I \|^2_{\mu(\varphi)}$$

dans l'égalité (3.1), l'inégalité de Poincaré (Ω est borné!) et le fait que :

Hessienne $(\mu(\varphi)) = \mu'(\varphi)$.Hessienne $(\varphi) + \mu''(\varphi)\,|\partial\phi|^2$, donc $\geqslant$ Hessienne (φ) .
Le fait que $\|u\|^2_{\mu(\varphi)}$ est dominé par $Q_{\mu(\varphi)}(u,u)$, permet de dire que, étant donné $f \in L^2_{(0,q)}(\Omega)$, il existe u_μ unique dans $\mathcal{H}_\mu$ ($\mathcal{H}_\mu$ complété de $\mathcal{D}^q(\Omega)$ pour $Q_{\mu(\varphi)}$) tel que :

$$Q_{\mu(\varphi)}(u_\mu,\psi) = (f,\psi)_{\mu(\varphi)} \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{H}_\mu$$

(c'est de l'analyse fonctionnelle).

Supposons de plus $\bar\partial f = 0$, alors en posant

$$v_\mu = \mathcal{C}_{\mu(\varphi)} u_\mu$$

on obtient (voir [2])

$$\bar\partial v_\mu = f \ .$$

4. INEGALITES DE CARLEMAN ET APPLICATIONS

Dorénavant μ et v_μ ont les significations données précédemment.

Proposition 4.1 : Soit f une (0,q)-forme telle que $\dfrac{f^2}{\lambda_q(\varphi)} \in L^1_{(0,q)}(\Omega)$. Alors :

$$(4.1) \qquad \int_\Omega e^{\mu(\varphi)}\,|v_\mu|^2 \leqslant 4 \int_\Omega e^{\mu(\varphi)}\ \frac{|f|^2}{\lambda_q(\varphi)} \ .$$

Ce sont les inégalités de Carleman, adaptées à notre situation (dans [2] , $\lambda_q(\varphi)$ ne figure pas car $\lambda_q(\varphi) \geqslant C > 0$).

Les inégalités (4.1) permettent de déduire un résultat de type "problème de Cauchy".

Théorème 4.1 : Soit φ vérifiant $(*)_q$ et $[\lambda_q(\varphi)]^{-1} \in L^1(\Omega)$. Soit $\omega \subset\subset \Omega$ défini par $\omega = \{\varphi < c\}$. Soit $f \in L^\infty_{(0,q)}(\Omega)$ telle que $\bar\partial f = 0$ et $\mathrm{supp}(f) \subset \bar\omega$. Alors il existe $u \in L^2_{(0,q-1)}(\Omega)$ tel que :

$$\begin{cases} \mathrm{supp}\ (u) \subset \bar\omega \\ \bar\partial u = f \end{cases}$$

Corollaire 4.2 : Sous les hypothèses précédentes sur φ et ω, soit f une (0,q-1)-forme $\bar\partial$-fermée dans $\Omega\backslash\bar\omega$, de classe C^1 dans $\bar\Omega\backslash\omega$. Alors il existe une (0,q-1)-forme $\tilde f \in L^2_{(0,q-1)}(\Omega)$ $\bar\partial$-fermée dans Ω telle que $\tilde f|_{\Omega|\bar\omega} = f$.

On a un analogue pour une intersection d'un nombre fini de domaines définis par des fonctions φ_i vérifiant les hypothèses précédentes.

Théorème 4.3 : Soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$, des fonctions positives, de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$ telles que l'on ait :

$$\lambda_I(\varphi_j) \geqslant g \ , \ |I| = q \ , \ j = 1,\ldots,p \qquad g^{-1} \in L^1_{loc}(\mathbb{C}^n) \quad g \geqslant 0$$

Soit $\varphi = \max(\varphi_j)$ et $\omega = \{\varphi < c\}$, $\bar{\omega} \subset \Omega$.
Soit f une (0,q)-forme, $\bar{\partial}$-fermée dans Ω, à support dans $\bar{\omega}$, $f \in L^\infty(\Omega)$. Alors, il existe $u \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = f \\ \text{supp } (u) \subset \bar{\omega} \end{cases} .$$

En utilisant les régularisées $\varphi_\varepsilon = \varphi * \chi_\varepsilon$ de φ , où $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\chi(\frac{x}{n})$ et χ ne dépendant que de $|x|$, on se ramène essentiellement à montrer les trois lemmes suivants.

Lemme 4.4 : Soient $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$, p fonctions de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$ et $\varphi = \max(\varphi_i)$. Supposons que :

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z_i \partial \bar{z}_k}(z) a_i \bar{a}_k \geqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i(z)|a_i|^2 \quad , \quad \forall\, z \in \bar{\Omega}$$

où λ_i sont des fonctions continues dans $\bar{\Omega}$, et pour tout vecteur a.

Alors on a, au sens des distributions :

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \bar{z}_k} a_i \bar{a}_k \geqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i |a_i|^2$$

Lemme 4.5 : Posons $\varphi_\varepsilon = \varphi * \chi_\varepsilon$, $\lambda_{i,\varepsilon} = \lambda_i * \chi_\varepsilon$, $\chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-n}\chi(\frac{z}{\varepsilon})$, χ ne dépendant que de $|z|$. Alors

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial z_i \partial \bar{z}_k}(z) a_i \bar{a}_k \geqslant \sum_{i=1}^n \lambda_{i,\varepsilon}(z)|a_i|^2$$

pour tout vecteur $a = (a_1,\ldots,a_n)$.

Lemme 4.6 : Soit g continue telle que $\frac{1}{g} \in L^1_{loc}(\mathbb{C}^n)$. Alors $\frac{1}{g_\varepsilon} \in L^1_{loc}(\mathbb{C}^n)$ et, pour tout compact K

$$\| \frac{1}{g_\varepsilon} \|_{L^1(K)} \leqslant \| \frac{1}{g} \|_{L^1(K_1)}$$

où

$$K_1 = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid d(z,K) \leqslant 1 \}.$$

Cependant, il y a beaucoup de cas intéressants où on n'a pas une minoration des λ_I par une fonction continue positive dont l'inverse est dans L^1_{loc} ; ce sont les cas où les λ_I majorent le module d'une fonction holomorphe.

Théorème 4.1 bis : Soit φ vérifiant $(*)_q$ et supposons qu'il existe une fonction h holomorphe dans $\mathbb{C}^n$ telle que :

$$\lambda_q(\varphi) \geqslant |h| \quad \text{dans} \quad \bar{\Omega}$$

soit f une (0,q)-forme telle que :

a) $|f|^2/h \in L^1(\Omega)$

b) $\text{supp}\,(f) \subset \bar{\omega} = \{\varphi \leqslant c\}$ et $\bar{\partial} f = 0$

Alors il existe $u \in L^2_{(0,q-1)}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \text{supp}\,(u) \subset \bar{\omega} \\ \bar{\partial} u = f. \end{cases}$$

Théorème 4.3 bis : Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ des fonctions positives, de classe C^2 dans $\mathbb{C}^n$ telles que l'on ait :

$$\lambda_I(\varphi_j) \geqslant |h| \quad , |I| = q \quad , j = 1, \ldots, p, \quad h \text{ holomorphe}$$

soit $\varphi = \max(\varphi_j)$ et $\omega = \{\varphi < c\}$, $\omega \subset\subset \Omega$. Soit f une (0,q)-forme $\bar{\partial}$-fermée dans Ω, à support dans $\bar{\omega}$, s'écrivant sous la forme $f = h\,g$, avec $g \in L^2(\Omega)$. Alors il existe $u \in L^2_{(0,q-1)}(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = f \\ \text{supp}\,(u) \subset \bar{\omega} . \end{cases}$$

Remarque : Les théorèmes 4.1 bis et 4.3 bis n'ont pas d'intérêt en eux-mêmes : cependant on les utilisera pour montrer le théorème de prolongement de fonctions holomorphes que l'on a en vue : Pour montrer le théorème 4.3 bis on utilise le

Lemme 4.7 : Soit φ_ε la régularisée de φ (comme dans le lemme 4.5). Alors on a :

$$\int e^{\mu(\varphi_\varepsilon)} \frac{|f|^2}{\lambda_q(\varphi_\varepsilon)} \leqslant \int e^{c} \frac{|f|^2}{|h|}$$

où $\mu(\varphi_\varepsilon) \leqslant c$ sur $\mathrm{supp}(f)$.

Il suffit de remarquer que $|h|$ est pluri-sous-harmonique et que $|h|_\varepsilon$ décroit alors vers $|h|$. (voir [6]).

5. PROLONGEMENT LOCAL

Maintenant on donne un résultat sur le "Problème de Cauchy local" pour $\bar\partial$, qui permettra de déduire un résultat de prolongement.

Soit donc ω un ouvert relativement compact de Ω, donné par $\{\varphi < c\}$. On considère $z_o \in \partial\omega$: on considère les hypothèses suivantes :

$(C_{1,q})$: $\lambda_q(\varphi)$ et $\lambda_{q+1}(\varphi)$ majorent $|h|$ au voisinage de z_o où h est une fonction holomorphe telle que $h \not\equiv 0$.

$(C_{2,q})$ Pour tout voisinage V de z_o, il existe une fonction φ_V positive de classe C^2 telle que $\omega \cap \{\varphi_V > 1\} \subset V$, $\varphi_V(z_o) = 3/2$ et $\lambda_q(\varphi_V)$ et $\lambda_{q+1}(\varphi_V)$ majorent $|h|$.

(C) Les composantes irréductibles h_i de h, au voisinage de z_o, sont telles que

$$Z(h_i) \cap C_{\bar\omega} \neq \emptyset, \quad \forall\, i$$

où $Z(h_i)$ est la variété des zéros de h_i.

Théorème 5.1 : Supposons $(C_{1,q})$ et $(C_{2,q})$ satisfaites. Soit f une (0,q) forme s'écrivant $f = h^2 g$ avec

$$\mathrm{supp}(g) \subset \bar\omega \cap U, \quad \bar\partial g = 0 \text{ dans } U, \quad g \in C^1(U)$$

où U est un voisinage de z_o.

Il existe un voisinage V de z_o et $u \in L^2_{(O,q-1)}(V)$ tel que

$$\begin{cases} \bar{\partial} u = f \text{ dans } V \\ \text{supp } (u) \subset \bar{\omega} \cap V \end{cases}$$

Pour montrer ce théorème on utilise le théorème 4.3 bis.

Corollaire 5.2 : Supposons $(C_{1,q})$ et $(C_{2,q})$ satisfaites. Soit f une (O,q-1)-forme telle que $f = h^2 g$ où

$$\bar{\partial} g = 0 \text{ dans } U \cap C_{\bar{\omega}} \quad , \; g \in C^1(U \cap C_{\omega}).$$

Il existe une (O,q-1)-forme $\tilde{f}$, $\bar{\partial}$-fermée dans un voisinage V de z_o telle que

$$\begin{cases} \tilde{f} \in L^2(V) \\ \tilde{f}\big|_{C_{\bar{\omega}} \cap V} = f \end{cases}$$

Remarque : Là aussi, le théorème 5.1 et le corollaire 5.2 ne sont pas très satisfaisants dans la mesure où on ne peut travailler qu'avec des formes f qui ont h^2 en facteur. Cependant nous allons en déduire un résultat satisfaisant dans le cas des fonctions : lorsqu'on a l'hypothèse (C_3). Cette hypothèse est très naturelle elle est automatiquement satisfaite par un domaine ω pseudo-convexe dont la frontière ne contient pas une hypersurface complexe (signalons que E. Bedford et J. E. Fornaess ont montré que pour ω à frontière analytique réelle et pseudoconvexe au voisinage de z_o, une condition nécessaire et suffisante pour que toute fonction holomorphe dans $U \cap C_{\bar{\omega}}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de z_o est que $\partial\omega$ ne contienne pas, au voisinage de z_o, d'hypersurface complexe [3]).

Théorème 5.3 : Suppsons $(C_{1,q})$ $(C_{2,q})$ et (C) satisfaites. Soit f une fonction holomorphe dans $U \cap C_{\bar{\omega}}$, de classe C^1 dans $U \cap C_{\omega}$. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe dans un voisinage de z_o .

On utilise pour la démonstration le corollaire 5.2.

Remarque : A. Douady et N. Sibony m'ont fait remarquer que la condition (C) est toujours vérifiée par un domaine ω pseudocpnvexe, de classe C^2, dont la frontière ne contient pas au voisinage de z_o, d'hypersurface complexe (on utilise

pour cela l'existence pour ω d'une fonction d'exhaustion, pluri-sous-harmonique dans ω , continue dans $\overline{\omega}$).

Exemples :

1) Considérons le domaine $\sum_{i=1}^{n} |z_i|^{2p_i} - 1 < 0$, dans $\mathbb{C}^n$. On posera $\varphi = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^{2p_i}$. Alors on a :

$$\lambda_I = \sum_{i \notin I} p_i^2 \, |z_i|^{2(p_i-1)}$$

Une condition suffisante pour étendre à $\omega = \{\varphi < 1\}$ une forme de degré $(0,q)$, $\overline{\partial}$-fermée dans $\Omega \setminus \bar{\omega}$, où Ω est un voisinage de $\overline{\omega}$ est que :

$$\{ \sum_{j \in J} |z_j|^{2(p-1)} \}^{-1}$$

soit localement intégrable où $p = \max(p_i)$ et J de longueur $n-q$.

Il suffit donc que $\max(p_i - 1) < n-q$.

2) On considère, près de 0, le domaine dans $\mathbb{C}^4$ défini par

$$\omega = \{|z_1|^2 + |z_4|^2(|z'|^2 - |z_4|^2) < 1\} \quad \text{où} \quad z' = (z_2, z_3).$$

Alors pour ce domaine, les hypothèses du théorème 5.3 sont satisfaites, et ω n'est pas pseudo-convexe au voisinage du point $z^o = \{1,0,0,0\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Andreotti, C. D. Hill : E. E. convexity and the H. Lewy problem part I : reduction to vanishing theorems, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 26 (1972).

[2] A. Andreotti, E. Vesentini : Carleman estimates for the Laplace Beltrami equation on complex manifolds. Publ. I.H.E.S., vol. 24-25.

[3] E. Bedford, J. E. Fornaess : Local extension of C. R. function from weakly pseudo-convex boundaries.

[4] J. J. Kohn, H. Rossi : on the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold, Ann. of Math. 81 (1965).

[5] L. Hörmander : L^2-estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$-operator. Acta Math. 113 (1965).

[6] L. Hörmander : Introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand.

[7] H. Lewy : On the local character.... Ann. of Maths 64 (1956).

[8] R. Nirenberg : On the H. Lewy extension phenomenon. Trans. Amer. Math. Soc. vol 168 (1972).

*
* *