Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. Tsuji

Localisation et front d'onde analytique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 3, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1980-1981____A4_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1980-1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - M E Y E R - S C H W A R T Z 1 9 8 0 - 1 9 8 1

LOCALISATION ET FRONT D'ONDE ANALYTIQUE

par M. TSUJI

Exposé n°III

21 Octobre 1980

§ 1. INTRODUCTION

Soit $P(D_x)$ un opérateur d'ordre m à coefficients constants hyperboliques par rapport à $\vartheta \in R^n \setminus \{0\} \equiv \dot{R}^n$ où $x \in R^n$ et $D_x = \partial / i\partial_x$, c'est-à-dire, le symbole $P(\zeta)$ satisfait

i) $P_m(\vartheta) \neq 0$ où P_m est la partie principale de P, et

ii) $P(\xi - i\gamma\vartheta) \neq 0$ pour $\xi \in R^n$ et $\gamma \geqslant \gamma_o > 0$ où γ_o est constant. Alors

$$(1) \qquad E(P)(x) = (\frac{1}{2\pi})^n \int_{R^n - i\gamma\vartheta} P(\zeta)^{-1} e^{i\langle x,\zeta\rangle} d\zeta \qquad (\gamma \geqslant \gamma_o)$$

définit l'unique solution élémentaire de $P(D_x)$ dont le support est contenu dans $\{x \in R^n ; \langle x, \vartheta\rangle \geqslant 0\}$. Le but de cet exposé est de déterminer le front d'onde analytique de E(P) exactement.

Soit $u(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$. Alors on note Su le support, SSu le support singulier, WF(u) le front d'onde, et $WF_A(u)$ le front d'onde analytique de u. On écrit ici la définition de $WF_A(u)$ précisément. Soient $x^o \in R^n$ et $\xi^o \in \dot{R}^n$. Le point (x^o, ξ^o) est dans le complémentaire de $WF_A(u)$ si et seulement s'il existe un voisinage U de x^o et un voisinage ouvert conique Γ de ξ^o tels que

$$(2) \qquad |\widehat{\phi_N u}(\xi)| \leqslant C(CN)^N (1 + |\xi|)^{-N} \qquad \text{pour} \quad \xi \in \Gamma ,$$

où $\{\phi_N\} \subset C_o^\infty(U)$ vérifie

$$(3) \qquad |D^\alpha \phi_N| \leqslant C(CN)^{|\alpha|} \qquad \text{pour} \quad |\alpha| \leqslant N,$$

$\phi_N(x) \equiv 1$ sur un voisinage fixé de x^o contenu dans U, et $\hat{f}(\xi)$ est la transformée de Fourier de f(x), c'est-à-dire,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{R^n} f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx .$$

Si ξ est complexe, nous appelons $\hat{f}(\xi)$ la transformée de Laplace de f(x) en utilisant le même symbole.

§ 2. ENONCE DES RESULTATS

Notre problème est de décrire WF(E(P)) et $WF_A(E(P))$ exactement. Quoique ce problème ait une longue histoire, nous partons des travaux d'Atiyah-Bott-Gårding [2] et [3]. On développe $s^m P(s^{-1}\xi + \zeta)$ en un polynôme

de s,

$$s^m P(s^{-1}\xi + \zeta) = s^p P_\xi(\zeta) + O(s^{p+1})$$

où $P_\xi(\zeta) \not\equiv 0$. Le nombre $p = m_\xi(P)$ est la multiplicité de ξ par rapport à P. On appelle le polynôme $P_\xi(\zeta)$ la localisation de P à ξ. Alors $P_\xi(\zeta)$ est aussi hyperbolique par apport à ϑ. Atiyah-Bott-Gårding [2] ont démontré le :

Théorème 1 :

$$\lim_{s \to \infty} s^{m-p} e^{-is\langle x,\xi\rangle} E(P) = E(P_\xi) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(R^n)$$

où $E(P_\xi)$ est la solution élémentaire de $P_\xi(D_x)$, et

$$\bigcup_{\xi \neq 0} SE(P_\xi) \times \{\xi\} \subset WF(E(P)) \subset WF_A(E(P)) \subset \bigcup_{\xi \neq 0} c.h.SE(P_\xi) \times \{\xi\}$$

où c.h.A signifie l'enveloppe convexe de A.

Dans [2] , ils ont proposé les conjectures suivantes :

i) $WF(E(P)) = \bigcup_{\xi \neq 0} SE(P_\xi) \times \{\xi\}$,

ii) $WF(E(P)) = WF_A(E(P))$.

La conjecture (i) n'est pas vraie. Pour les exemples, voir l'exposé de l'auteur [7] . Le but de cet exposé est de donner la description exacte de $WF(E(P))$ et de démontrer la conjecture (ii) pour les opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles. Nous généralisons d'abord le théorème de localisation d'Atiyah-Bott-Gårding.

On développe $s^{m-p} P(s\xi + \zeta)^{-1}$ en une série formelle de Taylor par rapport à $1/s$ comme suit :

$$\frac{s^{m-p}}{P(s\xi+\zeta)} = \frac{1}{P_\xi(\zeta)} + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(\zeta) P_\xi(\zeta)^{-j-1} \left(\frac{1}{s}\right)^j$$

et on écrit

$$E_o(P_\xi) = E(P_\xi) \quad \text{et}$$

$$E_j(P_\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{R^n - i\gamma\vartheta} Q_j(\zeta) P_\xi(\zeta)^{-j-1} e^{i\langle x,\zeta\rangle} d\zeta \ .$$

Alors nous avons le théorème de localisation généralisé,

Théorème 2 : Pour un entier N quelconque, on a

$$(4)\quad \lim_{s\to\infty} s^N\{s^{m-p}e^{-is\langle x,\xi\rangle}E(P) - \sum_{j=0}^{N-1} E_j(P_\xi)s^{-j}\} = E_N(P_\xi)$$

dans $\mathcal{D}'(R^n)$, et

$$(5)\quad WF(E(P)) \supset \bigcup_{\xi\neq 0}\Big(\bigcup_{j=0}^{\infty} SE_j(P_\xi)\Big)\times\{\xi\}\ .$$

Nous proposons une conjecture pour un opérateur hyperbolique $P(D_x)$ quelconque :

$$(C)\quad WF(E(P)) = WF_A(E(P)) = \bigcup_{\xi\neq 0}\Big(\bigcup_{j=0}^{\infty} SE_j(P_\xi)\Big)\times\{\xi\}$$

Posons ici l'hypothèse suivante :

(H) La multiplicité des caractéristiques de P est au plus deux .

Alors nous obtenons le théorème principal de cet exposé :

Théorème 3 : Supposons (H), alors (C) est vrai.

L'ensemble $\bigcup_{j=0}^{\infty} SE_j(P_\xi)$ n'est pas concret. De plus, pour comparer le résultat d'Atiyah-Bott-Gårding (Théorème 1) avec le nôtre, nous l'écrivons pour le premier terme $E(P_\xi)$ seulement. Dans ce but, nous classifions des points caractéristiques comme suit :

$$C_1 = \{\ \xi\in \dot{R}^n\ ;\ P_m(\xi) = 0\ ,\ \text{grad}\ P_m(\xi)\neq 0\}$$

et

$$C_2 = \{\xi\in \dot{R}^n;\ P_m(\xi) = 0,\ \text{grad}\ P_m(\xi) = 0\}\ .$$

Pour $\xi^0\in C_2$, on peut supposer sans perdre la généralité que $\xi^0 = (1,0,\ldots,0)$, $\mathcal{O} = (1,1,0,\ldots,0)$ et

$$P_{\xi^0}(\zeta) = \zeta_2^2 - \sum_{j=3}^{\ell}\zeta_j^2 + C\ .$$

Le point crucial est la localisation de P à ξ^o telle que l'enveloppe convexe de $SE(P_{\xi^o})$ n'est pas égale à $SE(P_{\xi^o})$. Cette localisation doit satisfaire la condition suivante :

(*) $\qquad C = 0$, et ℓ est impair $\geqslant 5$.

Et puis, la condition suivante joue un rôle important :

(**) $\qquad P(\xi) \equiv 0$ et grad $P(\xi) \equiv 0$ sur $\{\xi_2 = \ldots = \xi_\ell = 0\}$.

Ici on divise l'ensemble C_2 en deux comme suit :

$$S_o = \{\xi \in C_2 \ ; \ P_\xi \text{ satisfait (*), mais (**) est violé}\}$$

et

$$S_1 = \{\xi \in C_2 ; \quad \xi \in S_o\}.$$

Proposition 4 : Supposons (H), alors on a

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} SE_j(P_\xi) = \begin{cases} \text{c.h. } SE(P_\xi) & \text{pour } \xi \in S_o \ , \\ SE(P_\xi) & \text{pour } \xi \in C_1 \cup S_1 \ . \end{cases}$$

Remarque : Nous donnons une autre représentation des conditions (*) et (**) invariantes par changement de coordonnées. Soit $P(\xi)$ un polynôme de $\xi \in R^n$. On définit l'espace linéaire $L(P) \equiv \{\xi \in \dot{R}^n ; P(\xi + \zeta) \equiv P(\zeta)$ identiquement pour $\zeta \in R^n\}$. Alors la condition (*) est équivalente à la suivante (*)' :

(*)' $P_{\xi^o}(\zeta)$ est un polynôme homogène d'ordre 2, et $n - \dim L(P) - \dim L(P_{\xi^o})$ est pair $\geqslant 4$.

Et puis, (**) est équivalent à (**)' :

(**)' $\qquad P(\xi) \equiv 0$ et grad $P(\xi) \equiv 0$ sur $L(P_{\xi^o})$.

§ 3. DEMONSTRATION DU THEOREME 2

Posons

$$K_{s,N} = s^N\{\frac{s^{m-p}}{P(s\xi + \zeta)} - \frac{1}{P_\xi(\zeta)} - \sum_{j=1}^{N-1} Q_j(\zeta)P_\xi(\zeta)^{-j-1}s^{-j}\} ,$$

alors on a, pour $\zeta \in R^n - i\gamma\mathcal{O}$ où $\gamma \geqslant \gamma_o > 0$,

$$\lim_{s \to \infty} K_{s,N} = Q_N(\zeta)P_\xi(\zeta)^{-N-1} ,$$

et, en appliquant le théorème de Seidenberg ,

$$|K_{s,N}| \leqslant C(1 + |\zeta|)^d \quad \text{pour } s \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \zeta \in R^n - i\gamma\mathcal{O},$$

où C et d sont des constantes indépendantes de s et ζ . Donc on a, pour $\varphi \in C_o^\infty(R^n)$ quelconque,

$$\lim_{s \to \infty} <s^N\{s^{m-p}e^{-is<x,\xi>}E(P) - \sum_{j=0}^{N-1} E_j(P_\xi)s^{-j}\} , \varphi > =$$

$$= \lim_{s \to \infty} \int_{R^n - i\gamma\mathcal{O}} K_{s,N}(\zeta)\ \hat{\varphi}\ (-\zeta)d\zeta = < E_N(P_\xi),\varphi > .$$

Soit $(x^o, \xi^o) \notin WF(E(P))$, alors il existe un voisinage U de x^o et un voisinage ouvert conique Γ de ξ^o tels que, pour $\varphi \in C_o^\infty(U)$ quelconque, $\widehat{E(P)\varphi}$ est rapidement décroissant dans Γ . Donc on peut successivement obtenir $<E_j(P_{\xi^o}),\varphi > = 0$ pour tout j. Comme cela montre $x^o \notin SE_j(P_{\xi^o})$, on obtient (5).

§ 4. DEMONSTRATION DU THEOREME 3

Les théorèmes 1 et 2 montrent que,pour obtenir le Théorème 3, il nous suffit de démontrer

$$(\bigcup_{\xi \neq 0} (c.h.SE(P_\xi) - \bigcup_{j=0}^{\infty} SE_j(P_\xi)) \times \{\xi\}) \cap WF_A(E(P)) = \phi .$$

Donc on considère la localisation de P à ξ^o telle que

$$c.h.SE(P_{\xi^o}) - \bigcup_{j=0}^{\infty} SE_j(P_{\xi^o}) \neq \phi .$$

Alors on peut supposer, sans perdre la généralité, que $\xi^o = (1,0,\ldots,0)$, $\mathcal{V} = (1,1,0,\ldots,0)$, et $P_{\xi^o}(\zeta) = \zeta_2^2 - \sum_{j=3}^{\ell} \zeta_j^2$ où ℓ est impair $\geqslant 5$. De plus, la proposition 4 dit que la condition (**) est aussi vérifiée. Quand on pose $x' = (x_2,\ldots,x_n)$, $x'_{(1)} = (x_2,\ldots,x_\ell)$ et $x'_{(2)} = (x_{\ell+1},\ldots,x_n)$, on obtient

$$\text{(6)} \qquad \text{c.h.SE}(P_{\xi^o}) - \bigcup_{j=o}^{\infty} \text{SE}_j(P_{\xi^o}) = \text{c.h.SE}(P_{\xi^o}) - \text{SE}(P_{\xi^o})$$

$$= \{x_1 = 0,\ x_2 > (\sum_{j=3}^{\ell} x_j^2)^{1/2},\ x'_{(2)} = 0\} \ .$$

On prend un point x^o quelconque contenu dans l'ensemble (6). Notre but est de démontrer $(x^o,\xi^o) \notin \text{WF}_A(E(P))$, c'est-à-dire, qu'il existe un voisinage ouvert U de x^o et un voisinage ouvert conique Γ de ξ^o tels que

$$\text{(7)} \qquad |\widehat{E(P)\,\phi_N}(\xi)| \leqslant C(CN)^N(1 + |\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma \ ,$$

où $\{\phi_N\} \in C_o^\infty(U)$ satisfait (3) et $\phi_N(x) \equiv 1$ sur un voisinage ouvert fixé de x^o contenu dans U. Ici on prend $U = \{|x - x^o| < \varepsilon_o\}$ avec $\varepsilon_o > 0$ petit de sorte que $x_2 > (\sum_{j=3}^{\ell} x_j^2)^{1/2}$ pour tout $x \in \bar{U}$. Et puis, on remarque que ε_o devra être plus petit qu'un nombre ε qui sera introduit à (9) dans la suite. Pour obtenir l'estimation (7), on divise la démonstration en trois étapes.

<u>Première étape</u> : Maintenant $P(\zeta)$ s'écrit sous la forme :

$$P(\zeta) = \zeta_1^{m-2}(P_{\xi^o}(\zeta'_{(1)}) - \zeta_1^{-1}R(\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n \ ,$$

où $\zeta' = (\zeta_2,\ldots,\zeta_n)$, $\zeta'_{(1)} = (\zeta_2,\ldots,\zeta_\ell)$ et

$$R(\zeta) = R_1(\zeta') + \zeta_1^{-1}R_2(\zeta') + \ldots + \zeta_1^{-m+3}R_{m-2}(\zeta').$$

Si $P(\zeta) \neq 0$ et $P_{\xi^o}(\zeta'_{(1)}) \neq 0$, on peut développer $P(\zeta)^{-1}$ en série géométrique finie :

$$\frac{1}{P(\zeta)} = \sum_{j=0}^{N-1} R(\zeta)^j \zeta_1^{2-m-j} P_{\xi^o}(\zeta'_{(1)})^{-j-1} + R(\zeta)^N \zeta_1^{-N} P(\zeta)^{-1} P_{\xi^o}(\zeta'_{(1)})^{-N}$$

$$\equiv A_N(\zeta) + B_N(\zeta) \ .$$

Alors on obtient :

$$F_N(x) = (\frac{1}{2\pi})^n \int_{R^n - i\gamma\mathcal{V}} A_N(\zeta)\, e^{i<x,\zeta>} d\zeta$$
$$= H(x_1) \sum_{j=0}^{N-1} \Big(\sum_{k=m+j-2}^{(m-2)(j+1)} x_1^{k-1}\, Q_{j,k}(D_{x'}) \Big) E(P^{j+1}_{\xi^o}),$$

où $Q_{j,k}(D_{x'})$ est l'opérateur différentiel d'ordre $(-m+k+2j+2)$ et $H(x_1) = 1$ pour $x_1 > 0$ et $= 0$ pour $x_1 < 0$. Rappelons ici que la condition (**) est satisfaite. Elle est vérifiée si et seulement si tout $R_j(\zeta')$ s'écrit de façon suivante :

$$R_j(\zeta') = \sum_{|\alpha| = 2} r_{j,\alpha}(\zeta')(\zeta'_{(1)})^\alpha .$$

Ceci montre que, pour k quelconque,

$$Q_{j,k}(\zeta') = \sum_{|\alpha|=2j} q_{j,k,\alpha}(\zeta')(\zeta'_{(1)})^\alpha ,$$

d'où, pour tout N ,

$$SF_N = \{x_1 \geqslant 0,\ x_2 = (\sum_{j=3}^{\ell} x_j^2)^{1/2} ,\ x'_{(2)} = 0\} .$$

Donc on obtient

$$(8) \qquad \widehat{E(P)\,\phi_N}(\eta) = <B_N(\zeta), \hat{\phi}_N(\eta - \zeta)>_\zeta , \qquad \zeta \in R^n - i\gamma\mathcal{V} ,$$

où $<f,g>_\zeta$ signifie l'intégrale de f.g par rapport à ζ .

<u>Seconde étape</u> : Pour estimer (8), on change le chemin d'intégration dans $\mathbb{C}^n$ selon l'idée dûe à Atiyah-Bott-Garding ([2] et [3]) et aussi à Andersson [1] . Mais, dans ce cas, on ne peut pas appliquer leur méthode directement. Le but de cette étape est de trouver un bon chemin d'intégration.

Soit $Q(\xi)$ un polynôme homogène hyperbolique par rapport à $\mathcal{V}$. On écrit par $\Gamma(Q,\mathcal{V})$ un composant de $R^n - \{\xi; Q(\xi) = 0\}$ contenant $\mathcal{V}$. Il est le cône ouvert connexe.

On construit premièrement un champ de vecteurs de classe C^∞

$$\xi'_{(1)} \longrightarrow w(\xi'_{(1)}) \in \Gamma((P_{\xi^o})_{\xi'_{(1)}}, -\mathcal{V}'), \quad \mathcal{V}' = (1,0,\ldots,0) \in R^{\ell-1},$$

tel qu'il est homogène de degré 0, et que

(9) $$\langle x'_{(1)}, w\rangle \geqslant \varepsilon > 0 ,$$

$$P_{\xi^o}(\xi'_{(1)} + i(s\, w(\xi'_{(1)}) - (1-s)\gamma\mathcal{V}')) \neq 0$$

pour $x \in \bar{U}$, $s \in [0,1]$ et $\xi'_{(1)} \in S^{\ell-2} = \{\xi'_{(1)} \in R^{\ell-1} ; |\xi'_{(1)}| = 1\}$.

On peut ici supposer que $P_{\xi^o}(w) < 0$ pour $\xi'_{(1)} \in S^{\ell-2}$.

Soient $\Gamma_i = \{\xi \in R^n;\ \xi_1 > (M+i)|\xi'|\}$ où $\xi' = (\xi_2,\ldots,\xi_n)$ et $i = 0,1,2$ et 3 .

Prenons $\Phi_i(\xi) \in C^\infty(R^n)$, homogène de degré 0, telles que $S\,\Phi_i \subset \Gamma_{i-1}$ et $\Phi_i(\xi) \equiv 1$ sur Γ_i pour $i = 1,2$ et 3 . Soient $r_1 = 1$ et $r_2 = \max\{3, 2\sup|P_{\xi^o}(w)|^{-1}\} - 1$. Posons

$$\chi(\xi'_{(1)}) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \{|\xi'_{(1)}| \leqslant 1/2\} \\ 0 & \text{dans } \{|\xi'_{(1)}| \geqslant 1\} \end{cases}$$

$$\rho_i(\xi') = \begin{cases} 1 & \text{dans } \{|\xi'| \geqslant r_i + 1\} \\ 0 & \text{dans } \{|\xi'| \geqslant r_i\} \end{cases} \qquad (i = 1 \text{ et } 2)$$

$$\psi_1(\xi) = \chi(\xi'_{(1)})\ \Phi_1(\xi) \quad \text{et}$$

$$\psi_2(\xi) = \chi(\xi'_{(1)})\ \Phi_1(\xi)\ \{\rho_2(1 - \Phi_3) + (1 - \rho_2)\} .$$

Ensuite, on définit des champs de vecteurs $v_i(\xi)$ comme suit :

$$v_0(\xi) = -\gamma\mathcal{V} \ , \quad v_1(\xi) = -\gamma|\xi'_{(1)}|^{\psi_1}\mathcal{V},$$

$$v_2(\xi) = |\xi'_{(1)}|^{\psi_1}\{\rho_1\,\Phi_2|\xi'|\hat{w}(\xi'_{(1)}) - (1 - \rho_1\,\Phi_2)\gamma\ \} \quad \text{et}$$

$$v_3(\xi) = |\xi'_{(1)}|^{\psi_2}\{\rho_1\Phi_2|\xi'|\hat{w}(\xi'_{(1)}) - (1 - \rho_1\,\Phi_2)\gamma\ \}$$

pour $\xi \in R^n$, où $\hat{w} = (0,w,0) \in R^n$. Si M est suffisamment grand comme il le semble dans la définition de Γ_i, alors on obtient

(10) $$P_{\xi^o}(\xi'_{(1)} + i(sv_j + (1-s)v_{j-1})_{(1)}) \neq 0 ,$$

(11) $$P(\xi + i(sv_j + (1-s)v_{j-1})) \neq 0$$

pour tout $\xi'_{(1)} \neq 0$ et j quelconque. Il est évident que $\langle x, v_j \rangle$ est borné inférieurement pour $x \in \bar{U}$. La preuve de (10) et (11) dépend essentiellement de la propriété (**) et l'inégalité suivante : si on écrit

$$\zeta'_{(1)} = \xi'_{(1)} + i(s\,|\xi'|\,w(\xi'_{(1)}) - (1 - s)\gamma \mathcal{P}') ,$$

il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|P_{\xi^0}(\zeta'_{(1)})| \geqslant C\,|\zeta'_{(1)}|^2$$

pour $\xi' \in R^{n-1}$, $\xi'_{(1)} \in S^{\ell-2}$ et $s \in [0,1]$.

Nous allons enfin définir des chemins d'intégration. Soit V_j une chaîne donnée par $\zeta = \xi + iv_j(\xi)$ pour $\xi \in R^n$ ($j = 0,1,2$ et 3). Quand on remplace V_j par V_{j+1} dans (8), on sait par (10), (11) et le théorème de Stokes que la valeur de (8) reste invariante, c'est-à-dire, que l'on a

$$\widehat{E(P)\phi_N}(\eta) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{V_3 \cap \{ |\xi'_{(1)}| \geqslant \varepsilon \}} B_N(\zeta)\, \hat{\phi}_N(\eta - \zeta)\, d\zeta \tag{12}$$

Voilà la partie principale de la démonstration. Dès maintenant, on suppose que l'intégrale sur V_3 est prise au sens du (12), même si on n'écrit pas la notation de la limite.

<u>Troisième étape</u> : On estime le membre droit de (12). Comme $\langle x, v_3 \rangle$ est borné inférieurement, on obtient

$$|\hat{\phi}_N(\eta - \zeta)| \leqslant C(CN)^N (1 + |\eta - \zeta|)^{-N}$$

pour $\zeta \in V_3$ et $\eta \in R^n$. Soient Γ un voisinage ouvert conique de ξ^0 tel que $\Gamma \setminus \{0\} \subset\subset \Gamma_3$, et V_{Γ_3} la restriction de V_3 sur Γ_3 . Alors on a

$$\widehat{E(P)\,\phi_N}(\eta) = \int_{V_3} B_N(\zeta)\, \hat{\phi}_N(\eta - \zeta)\, d\zeta$$

$$= \int_{V_3 - V_{\Gamma_3}} P(\zeta)^{-1}\, \hat{\phi}_N(\eta - \zeta)\, d\zeta \; - \int_{V_3 - V_{\Gamma_3}} A_N(\zeta) \hat{\phi}_N(\eta - \zeta)\, d\zeta$$

$$+ \int_{\Gamma_{V_{\Gamma_3}}} B_N(\zeta)\, \hat{\phi}_N(\eta - \zeta)\, d\zeta \quad .$$

L'estimation du premier terme est facile, parce qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $|\zeta - \eta| \geqslant \delta(|\zeta| + |\eta|)$ pour $\zeta \in V_3 - V_{\Gamma_3}$ et $\eta \in \Gamma$. Pour estimer le second terme, on remplace encore le chemin d'intégration par un autre $\tilde{V}_3 - V_{\Gamma_3}$, sans changer le bord $\partial(V_3 - V_{\Gamma_3})$, pour que l'on ait $|\zeta_1| \geqslant C_1|\zeta|$ et $|P_{\xi^o}(\zeta'_{(1)})| \geqslant C_2|\zeta'_{(1)}|^2$ sur $\tilde{V}_3 - V_{\Gamma_3}$ avec des constantes $C_i > 0$. C'est possible parce que $x_o \notin SE(P_{\xi^o})$ et que $\varepsilon_o < \varepsilon$. Alors on obtient $|A_N(\zeta)| \leqslant C^N |\zeta|^{-m}$ sur $\tilde{V}_3 - V_{\Gamma_3}$. Donc on obtient l'estimation du type (7) pour le second terme. Quant au troisième terme, on a sur V_{Γ_3}

$$|B_N(\zeta)| \leqslant C_N|\zeta'|^N |\zeta_1|^{-N} .$$

Si $|\zeta - \eta| \geqslant \delta(|\zeta| + |\eta|)$, il n'y a pas de problème. Si $|\zeta - \eta| \leqslant \delta(|\zeta| + |\eta|)$ il existe alors une constante C telle que $|\eta| \leqslant C|\zeta_1|$. D'autre part, comme on a $|\zeta - \eta| \geqslant C'|\zeta'|$ pour $\zeta \in V_{\Gamma_3}$ grand, on peut obtenir l'estimation du type (7) pour le troisième terme, ce qui achève la démonstration du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. G. Andersson : Localization and wave fronts. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-73, Exposé 25.

[2] M. F. Atiyah, R. Bott and L. Gårding : Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients, I. Acta Math., 124 (1970), p.109-189.

[3] M. F. Atiyah, R. Bott and L. Gårding : II, Acta Math., 131 (1973), p. 145-206.

[4] L. Hörmander : On the singularities of solutions of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), p.329-358.

[5] L. Hörmander : Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 24 (1971), p. 671-703.

[6] M. Tsuji : Propagation of the singularities for hyperbolic equations with constant coefficients, Japanese J. Math. (New Series), 2 (1976), p. 362-410.

[7] M. Tsuji : Singularities of elementary solutions of hyperbolic equations with constant coefficients, à paraître dans "Proceedings on Singularities in the boundary value problems", à Maratea (Italie), 1980.

*
**