B. Malgrange

Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 25, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A1_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone . 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

REMARQUES SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES A POINTS SINGULIERS IRREGULIERS

par B. MALGRANGE

Exposé n° XXV

7 Juin 1977

§ 1. GENERALITES SUR LES DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

On se place au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$; on fait un "éclatement réel" de 0 ; i.e. on passe en coordonnées polaires $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$; on note S l'image réciproque $\{0\} \times \mathbb{T}$ de 0, et on fabrique un faisceau $\mathcal{A}$ sur S de la manière suivante :

Soit U un ouvert de S, et $\tilde{U}$ le secteur angulaire de $\mathbb{C}$ associé i.e. $\{(\rho,\theta) | \rho > 0,\ \theta \in U\}$; soit $\bar{\mathcal{A}}(U)$ l'ensemble des germes en 0 de fonctions holomorphes dans U, admettant en 0 un "développement asymptotique de Taylor" ; de façon plus précise, pour $f \in \bar{\mathcal{A}}(U)$, il existe une série formelle $\Sigma a_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ tel qu'on ait, pour tout p, et pour $t \to 0$

$$f(t) - \sum_{0}^{p} a_n t^n = O(t^{p+1}),$$

le "Oh" étant uniforme dans tout secteur $\tilde{V}$ tel que V soit relativement compact dans U (en abrégé : $V \subset\subset U$). On définit alors $\mathcal{A}$ comme le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \bar{\mathcal{A}}(U)$.

Un théorème classique de Ritt nous assure que, si $U \neq S$, l'application "série de Taylor" : $\bar{\mathcal{A}}(U) \to \mathbb{C}[[t]]$ est surjective (voir par exemple une démonstration dans [5]). Dans la suite, cette application sera notée $f \mapsto \hat{f}$.

Soit $\mathcal{A}_0$ le sous-faisceau des $f \in \mathcal{A}$ vérifiant $\hat{f} = 0$. Considérons un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de S par des ouverts connexes $\neq$ S, et soit $g \in \mathbb{C}[[t]]$, donné ; pour tout i, soit $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{A})$, qui représente g, i.e. qui vérifie $\hat{f}_i = g$; dans $U_i \cap U_j$, on a manifestement $f_i - f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{A}_0)$; la classe de cohomologie de $\{f_i - f_j\}$ dans $H^1(S, \mathcal{A}_0)$ ne dépend que de g (détails laissés au lecteur), d'où une application $\tilde{\gamma} : \mathbb{C}[[t]] \to H^1(S, \mathcal{A}_0)$ dont on voit aussitôt que le noyau est égal à $\mathbb{C}\{t\}$, ensemble des séries convergentes en 0.

<u>Proposition 1.1</u> : <u>L'application $\tilde{\gamma}$ définit un isomorphisme</u> $\gamma : \mathbb{C}[[t]]/\mathbb{C}\{t\} \to H^1(S, \mathcal{A}_0)$.

Il suffit de montrer que γ est surjective ; en fait, on va démontrer ce résultat en utilisant un calcul du H^2 à la Dolbeault;

soit, pour cela $\mathcal{C}$ l'espace des germes en 0 de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ (identifié à $\mathbb{R}^2$), $\mathcal{P}$ le sous-espace de $\mathcal{C}$ des fonctions plates en 0, i.e. ayant un développement de Taylor (en t et $\bar{t}$) nul en 0. On définit une application $\alpha : \mathbb{C}[[t]]/\mathbb{C}\{t\} \to \mathcal{P}/\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\mathcal{P}$ de la manière suivante :

Soit $g \in \mathbb{C}[[t]]$; on prend un $h \in \mathcal{C}$ dont la série de Taylor $\hat{g}$ en 0 soit égale à g ; on a $\frac{\partial h}{\partial \bar{t}} \in \mathcal{P}$, et la classe de $\frac{\partial h}{\partial \bar{t}}$ modulo $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\mathcal{P}$ ne dépend que de g ; on la note $\alpha(g)$;

<u>Lemme 1.2</u> : <u>L'application</u> α <u>est un isomorphisme</u>.

Ceci résulte immédiatement de la surjectivité de $\frac{\partial}{\partial \bar{t}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. [Une manière "plus savante" de dire les choses est de considérer le morphisme de complexes suivant, où les flèches verticales sont les applications "série de Taylor" :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{C}\{t\} & \longrightarrow & \mathcal{C} & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{t}}} & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathbb{C}[[t]] & \to & \mathbb{C}[[t,\bar{t}]] & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{t}}} & \mathbb{C}[[t,\bar{t}]] & \to & 0 \end{array}$$

Les lignes sont exactes, et il suffit alors d'appliquer la suite exacte de cohomologie pour avoir les résultats cherchés.]

Soit maintenant $\tilde{\mathcal{P}}$ la restriction à S du faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}$, et plates sur S ; si π désigne la projection évidente (= celle définie par les coordonnées polaires) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, on a $\pi_*(\tilde{\mathcal{P}}) = \mathcal{P}$; de plus $\tilde{\mathcal{P}}$ est manifestement mou, donc $H^i(S,\tilde{\mathcal{P}}) = 0$, $i \geq 1$; enfin, l'application $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$ se relève en un morphisme de faisceaux $\tilde{\mathcal{P}} \to \tilde{\mathcal{P}}$, qu'on notera $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$, et dont le noyau est égal à $\mathcal{A}_0$.

<u>Lemme 1.3</u> : <u>La suite</u> $0 \to \mathcal{A}_0 \to \tilde{\mathcal{P}} \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \bar{t}}} \tilde{\mathcal{P}} \to 0$ <u>est exacte</u>.

Soit V un fermé de S, et $f \in \tilde{\mathcal{P}}(V)$; f prolonge en $f_1 \in \tilde{\mathcal{P}}(S)$ (immédiat), et il existe un $g \in \mathcal{P}$ unique tel qu'on ait $f_1 = \pi^* g$; soit $h \in \mathcal{E}$ tel qu'on ait $\frac{\partial h}{\partial \bar{t}} = g$; la série de Taylor $\hat{h}$ de h en 0 ne contient pas de termes en $\bar{t}$; donc, si $V \neq S$, on pourra corriger h par $h_1 \in \mathcal{A}(V)$, tel qu'on ait $\hat{h}_1 = \hat{h}$; si l'on pose $k = \pi^*(h - h_1) \in \tilde{\mathcal{P}}(V)$, il est clair que l'on a $\frac{\partial k}{\partial t} = f$.

Le lemme précédent, joint à la mollesse de $\tilde{\mathcal{P}}$ donne un isomorphisme: $H^1(S, \mathcal{A}_0) \xrightarrow{\beta} \Gamma(S,\tilde{\mathcal{P}})/\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(S,\tilde{\mathcal{P}})$; on a $\Gamma(S,\tilde{\mathcal{P}}) = \mathcal{P}$ et d'autre part, l'on s'assure facilement que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[[t]]/\mathbb{C}\{t\} \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & H^1(S, \mathcal{A}_0) \arrow[dl, "\beta"] \\
& \mathcal{P}/\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P} &
\end{tikzcd}$$

est commutatif ; cela démontre la proposition 1.1.

§ 2. UN THEOREME DE DUALITE

On va appliquer les considérations précédentes dans une situation "globale" : soient X une courbe analytique complexe compacte connexe, A un ensemble fini et non vide $\{a_1,\dots,a_p\}$ de points de X, et V un fibré vectoriel holomorphe sur X, qu'on peut supposer sans inconvénients être le fibré trivial $X \times \mathbb{C}^n$. Désignons par $\mathcal{O}$ (resp. Ω) le faisceau des fonctions (resp. des 1 formes) holomorphes sur X, et par $\mathcal{O}_V$ (resp. M_V) le faisceau des sections holomorphes de V (resp. des sections méromorphes de V, avec pôles dans A). Soit D une connexion sur V, avec pôles dans A, i.e. une application

$$D : M_V \to M_V \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega$$

vérifiant, pour $f \in \mathcal{O}$, $\varphi \in M_V$: $D(f\varphi) = fD\varphi + \varphi \otimes df$.
[Le lecteur pourra vérifier que, en coordonnées locales, ceci n'est rien d'autre qu'une équation différentielle du 1er ordre : $\varphi \mapsto \frac{d\varphi}{dt} + M\varphi$, M une matrice à coefficients méromorphes avec pôles dans A].
En prenant les sections, on trouve un complexe

$$(K^\cdot) \quad \Gamma(X,M_V) \xrightarrow{D} \Gamma(X,M_V \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega)$$

dont on se propose d'interpréter la cohomologie. Dans le cas où les pôles de D sont des points singuliers réguliers, il est bien connu [2] qu'on obtient ainsi la cohomologie de $X - A$, à valeurs dans le système local "(V,D) restreint à $X - A$", mais que ceci n'est plus vrai en général ; cela peut se voir ainsi : soit S_V le faisceau sur X des sections de V, holomorphes sur $X - A$, et admettant éventuellement des singularités essentielles sur A (en d'autres termes, $S_V = i_* i^* \mathcal{O}_V$, i désignant l'injection $X - A \to X$). Le faisceau S_V/M_V est concentré sur A ; soit $a \in A$; on sait que l'application

$$D : S_{V,a}/M_{V,a} \to (S_{V,a}/M_{V,a}) \underset{\mathcal{O}_a}{\otimes} \Omega_a$$

est surjective, et que son noyau N_a est de dimension finie, égale à $i_a(D)$, l'irrégularité de D en a (voir [3]).

D'autre part, il est connu que les faisceaux M_V et S_V sont acycliques, i.e. qu'on a, pour $i \geq 1$: $H^i(X,M_V) = 0$ et $H^i(X,S_V) = 0$ (le dernier résultat parce que toute "surface de Riemann" non compacte, en l'occurence $X - A$, est une variété de Stein ; le permier est, par exemple, un cas particulier du "vanishing theorem" de Kodaira-Serre) ; donc, de la suite exacte $0 \to M_V \to S_V \to S_V/M_V \to 0$, on déduit une suite exacte

$$0 \to \Gamma(X,M_V) \to \Gamma(X,S_V) \to \Gamma(X,S_V/M_V) \to 0 .$$

En désignant par $(S^\cdot)$ le complexe analogue à $K^\cdot$, avec M_V remplacé par S_V, on tire de là une suite exacte

$$0 \to H^0(K^\cdot) \to H^0(S^\cdot) \to \bigoplus_i N_{a_i} \to H^1(K^\cdot) \to H^1(S^\cdot) \to 0$$

enfin les groupes de cohomologie $H^i(S^\cdot)$ s'identifient aux groupes de cohomologie de $X - A$, à valeurs dans le système local défini par (V,D) (i.e. à valeurs dans le faisceau des $f \in \mathcal{O}_V | X - A$ qui vérifient $Df = 0$; ceci résulte, par un argument bien connu, du fait que X est un Stein]. Cela démontre le résultat annoncé plus haut, et, accessoirement, le résultat suivant dont nous aurons besoin.

<u>Lemme 2.1</u> : <u>Les</u> $H^i(K^\cdot)$ <u>sont de dimension finie sur</u> $\mathbb{C}$.

Soit maintenant $\tilde{X}$ l'espace obtenu en faisant un éclatement réel des points a_i, comme au paragraphe 1 ; on appelle π la projection $\tilde{X} \to X$, $S_i = \pi^{-1}(a_i)$, $S = \cup S_i$; on note $\mathcal{A}_o$ le faisceau suivant sur $\tilde{X}$: sur $\tilde{X} - S \sim X - A$, $\mathcal{A}_o$ est le faisceau structural $\mathcal{O}$; sur S_i, $\mathcal{A}_o$ est le faisceau défini précédemment qu'on recolle de la façon évidente avec $\mathcal{A}_o | \tilde{X} - S$.

Soient V^* le fibré dual de V, et $D^* : M_{V^*} \to M_{V^*} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega$ la connexion duale de D ; rappelons que cette dernière est définie par la formule $d\langle\varphi,\psi\rangle = \langle D\varphi,\psi\rangle + \langle\varphi,D^*\psi\rangle$, $\varphi \in M_V$, $\psi \in M_{V^*}$; désignons enfin par $\mathcal{A}_o(V^*)$ le faisceau des sections de $\mathcal{A}_o$ à valeurs dans V^*, et par $\mathcal{A}_o(V^*,D^*)$ le sous-faisceau du précédent formé des φ qui vérifient $D^*\varphi = 0$. Le résultat principal de ce paragraphe est le théorème suivant, qui m'a été proposé comme conjecture par P. Deligne sous une forme légèrement différente.

<u>Théorème 2.2</u> : <u>Le dual de</u> $H^i(K^\cdot)$ <u>est naturellement isomorphe à</u> $H^{2-i}(\tilde{X}, \mathcal{A}_o(V^*,D^*))$.

La démonstration va se faire en trois étapes.

i) Désignons par $\mathcal{D}'$ le faisceau des distributions (= courants de degré 0) sur X, $\mathcal{D}'_A$ le sous-faisceau des sections de $\mathcal{D}'$ à support dans A, et posons $\mathcal{P}' = \mathcal{D}'/\mathcal{D}'_A$; c'est le faisceau des "distributions sur $X - A$, prolongeables à X" ; soient $\mathcal{P}'_V = \mathcal{P}' \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_V$, et ${}^{(p,q)}\mathcal{P}'_V$ le faisceau des sections "de type (p,q)" de $\mathcal{P}'_V$; il est bien connu que $d'' : \mathcal{P}'_V \to {}^{(0,1)}\mathcal{P}'_V$ est surjective, et a pour noyau M_V ; en vertu de l'acyclicité de M_V, et de celle de $\mathcal{P}'_V$ (ce dernier faisceau est fin), on en déduit une suite exacte

$$0 \to \Gamma(X,M_V) \to \Gamma(X,\mathcal{P}'_V) \xrightarrow{d''} \Gamma(X,{}^{(0,1)}\mathcal{P}'_V) \to 0$$

on raisonne de même avec $M_V \otimes_{\mathcal{O}} \Omega$ au lieu de M_V, et l'on déduit une suite exacte

$$0 \to \Gamma(X,M_V \otimes \Omega) \to \Gamma(X,{}^{(1,0)}\mathcal{P}'_V) \xrightarrow{d''} \Gamma(X,{}^{(1,1)}\mathcal{P}'_V) \to 0$$

par suite la cohomologie de $(K^\cdot)$ est égale à la cohomologie du complexe simple associé au complexe double

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X,\mathcal{P}'_V) \arrow[r, "d''"] \arrow[d, "D"] & \Gamma(X,{}^{(0,1)}\mathcal{P}'_V) \arrow[d, "D"] \\
\Gamma(X,{}^{(1,0)}\mathcal{P}'_V) \arrow[r, "d''"] & \Gamma(X,{}^{(1,1)}\mathcal{P}'_V)
\end{tikzcd}$$

ii) Les espaces $\Gamma(X,{}^{(p,q)}\mathcal{P}'_V)$ sont du type "dual de Fréchet-Schwartz" (et même "dual de Fréchet nucléaire"). Le lemme 2.1, joint à un lemme de Schwartz montre alors que le dual des groupes de cohomologie du complexe précédent s'obtient en considérant le complexe "dual topologique", c'est-à-dire ici le complexe associé au complexe double :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X,{}^{(1,1)}\mathcal{P}_{V^*}) & \Gamma(X,{}^{(1,0)}\mathcal{P}_{V^*}) \arrow[l, "d''"'] \\
\Gamma(X,\mathcal{P}^{(0,1)}{}_{V^*}) \arrow[u, "D^*"] & \Gamma(X,\mathcal{P}_{V^*}) \arrow[l, "d''"'] \arrow[u, "D^*"']
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{P}_{V^*}$ désigne le faisceau des sections $\mathcal{C}^\infty$ de V*, plates sur A (cf. paragraphe 1).

iii) Reste à interpréter les groupes de cohomologie de ce dernier complexe ; pour cela, on définit sur $\widetilde{X}$ le faisceau $\widetilde{\mathcal{P}}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, et plates sur S. On a un isomorphisme évident $\pi^* : \Gamma(X,\mathcal{P}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{P}})$; par suite, le complexe précédent est isomorphe au complexe analogue, avec X (resp. $\mathcal{P}_V$) remplacé par $\widetilde{X}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{P}}_V$) ; le théorème résulte alors du lemme suivant, appliqué à V* et D* au lieu de V et D.

<u>Lemme 2.3</u> : <u>Considérons le complexe double de faisceaux</u>

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{P}}_V \arrow[r, "d''"] \arrow[d, "D"] & {}^{(0,1)}\widetilde{\mathcal{P}}_V \arrow[d] \\
{}^{(1,0)}\widetilde{\mathcal{P}}_V \arrow[r, "d''"] & {}^{(1,1)}\widetilde{\mathcal{P}}_V
\end{tikzcd}$$

Alors, la cohomologie du complexe simple associé vaut $\mathcal{A}_0(V,D)$ en degré 0 et 0 en degrés $\neq 0$.

En appliquant le lemme (1.3), on voit qu'il revient au même de considérer le complexe (= l'application $\mathcal{A}_0(V) \xrightarrow{D} \mathcal{A}_0(V)$; par définition, son noyau est égal à $\mathcal{A}_0(V,D)$; d'autre part, le fait que cette application soit surjective résulte du théorème fondamental de la théorie des développements asymptotiques au voisinage d'un point singulier irrégulier (voir appendice). D'où le lemme et le théorème.

§ 3. UN PROBLEME DE MODULES

Nous revenons ici à la situation locale du paragraphe 1, et aux notations correspondantes. Nous allons montrer rapidement comment une "variante non commutative des considérations qui s'y trouvent permet de donner une systématisation de certains calculs de Balser-Jurkat-Lutz [1] relatives aux "invariants de Birkhoff". Des idées très voisines de celles exposées ici se trouvent dans Sibuya [4].

Soit n un entier fixé, et soit $G = G\ell(n,\mathbb{C}\{t\})$ l'ensemble des matrices carrées holomorphes inversibles d'ordre n en $0 \in \mathbb{C}$; posons de même $G = G\ell(n,\mathbb{C}[[t]])$. Soit Λ le faisceau $G\ell(n,\mathcal{A})$, et soit Λ_0 le sous-faisceau des $A \in \Lambda$ qui vérifient $\hat{A}$ = identité. Une construction analogue à celle du paragraphe 1 permet de définir une application $\gamma : \hat{G}/G \to H^1(S,\Lambda_0)$; explicitons-la rapidement : soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement de S par des ouverts connexes, et $\neq S$; soit $A \in \hat{G}$; on choisit, pour chaque i, $B_i \in \Gamma(U_i,\Lambda)$ vérifiant $\hat{B}_i = A$; alors, on a $B_iB_j^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U_j,\Lambda_0)$; d'où une classe de cohomologie dans $H^1(S,\Lambda_0)$, qui ne dépend manifestement que de la classe à droite AG, et définit ainsi un $\gamma : \hat{G}/G \to H^1(S,\Lambda_0)$.

Théorème 3.1 : *L'application γ est bijective.*

Ce résultat est essentiellement équivalent à un théorème de Sibuya (voir [1], théorème B p.75, ou [4], théorème 1). Indiquons, sans entrer dans les détails, qu'on peut en donner une démonstration analogue à celle de la proposition 1.1, quoiqu'évidemment plus délicate.

Cela posé, soit r un entier ≥ 0, fixé une fois pour toutes et soit M une matrice carrée d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{C}\{t\}$(on écrit cela $M \in \mathfrak{G}$); on considère l'opérateur différentiel P défini par

$DF = t^{r+1}\frac{dF}{dt} + MF$, $F \in \mathbb{C}\{t\}^n$ [il reviendrait au même de considérer la connexion $F \mapsto dF + t^{-r-1}MF\,dt$]; Si $A \in G$, le changement de base $F = AG$ transforme l'opérateur donné en $A^{-1}DA = t^{r+1}\frac{d}{dr} + N$, avec N $N = t^{r+1}A^{-1}\frac{dA}{dt} + A^{-1}MA$; on posera pour simplifier $N = M^A$.

Si D est à point singulier régulier, et si l'on a $N \in \mathfrak{G}$, et $A \in \hat{G}$ tels qu'on ait $N = M^A$, on sait que, nécessairement A converge; par contre, si D a un point singulier irrégulier, il se peut que A diverge et même qu'il n'existe aucun $B \in G$ vérifiant $N = M^B$; autrement dit, N peut être "formellement équivalente à M" sans lui être "analytiquement équivalente". Dans la suite, M étant donné une fois pour toutes, on se propose, en gros, de classer les N formellement équivalentes à M, modulo l'équivalence analytique. De façon précise, on considère l'ensemble (E) des couples $(N,A) \in \mathfrak{G} \times \hat{G}$ qui vérifient $M^A = N$; on munit E de la relation d'équivalence (R) suivante : $(N,A) \sim (N',A')$ s'il existe $B \in G$ tel qu'on ait $A' = AB$ (et par conséquent $N' = N^B$).

Désignons d'autre part $\Lambda_o(M)$ le sous-faisceau de Λ_o formé des A qui vérifient $M^A = M$; on a alors le théorème suivant

<u>Théorème 3.2</u> : <u>Il existe une bijection canonique</u> $\delta : E/R \to H^1(S,\Lambda_o(M))$. Cette bijection se définit ainsi ; prenons $(N,A) \in \mathfrak{G} \times \hat{G}$, avec $M^A = N$, et prenons un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de S par des intervalles ouverts assez petits (par exemple, de longueur $< \frac{\pi}{r}$) ; la théorie des développements asymptotiques (cf. appendice) nous apprend qu'il existe des $B_i \in \Gamma(U_i,\Lambda)$ vérifiant $\hat{B}_i = A$, $M^{B_i} = N$; on a donc

$B_iB_j^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \Lambda_o(M))$, d'où comme précédemment une application $E \to H^1(S,\Lambda_o(M))$, dont on vérifie immédiatement qu'elle passe au quotient par R ; l'injectivité de l'application $\delta : E/R \to H^1(S,\Lambda_o(M))$ ainsi définie est immédiate : si (A',N') définit la même classe que (A,N), et que A' est représentée par des B'_i, on a (après avoir éventuellement remplacé $\mathcal{U}$ par un recouvrement plus fin) : $B'_iB'^{-1}_j = C_iB_iB_j^{-1}C_j^{-1}$, $C_i \in \Gamma(U_i,\Lambda_o(M))$, d'où $B_i^{-1}C_i^{-1}B'_i = B_j^{-1}C_j^{-1}B'_j$; par suite, il existe $D \in \Gamma(S,\Lambda) = G$ vérifiant, pour tout i : $B_i^{-1}C_i^{-1}B'_i = D$, ou encore $C_i^{-1}B'_i = B_iD$; en prenant les développements de Taylor en 0, il vient $A' = AD$; d'où le résultat cherché.

Montrons enfin que δ est surjective ; soit $C \in H^1(S,\Lambda_o(M))$; en choisissant un recouvrement assez fin, γ peut être représenté par des $C_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j,\Lambda_o(M))$; d'après le théorème 3.1, et quitte à raffiner le recouvrement considéré, il existe $A \in \hat{G}$ et des $B_i \in \Gamma(U_i,\Lambda_o)$ tels qu'on ait $\hat{B}_i = A$, $B_i B_j^{-1} = C_{ij}$; alors, dans $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$, on a $M^{B_i} = M^{B_j}$, donc il existe $N \in \mathcal{G}$ tel qu'on ait $M^{B_i} = N$ dans U_i ; il est clair qu'on a alors $\delta(N,A) = C$; d'où le théorème.

Pour terminer, remarquons que les théorèmes sur les développements asymptotiques nous montrent ceci : si $\mathcal{U}$ est un recouvrement fini de S par des intervalles U_i de longueur $< \frac{\pi}{r}$, alors les éléments de $\delta(E/R)$ [et par conséquent tous les éléments de $H^1(S,\Lambda_o(M)$] se laissent représenter par des cocycles de $\mathcal{U}$; il en résulte immédiatement que les éléments de E/R peuvent tous être "représentés" par les points d'un espace de dimension finie, à savoir par les cocycles de $\mathcal{U}$; en particulier, les N qui sont formellement équivalents à M peuvent être représentés, modulo l'équivalence analytique, par les points d'un espace de dimension finie. Naturellement, ces "représentations" seront en général surjectives, mais non bijectives, et les problèmes précis de modules qu'on est alors amené à se poser risquent de comporter des difficultés non triviales de passage au quotient. Dans le cas où les valeurs propres de la partie principale de M sont distinctes, ces questions étudiées dans [1] grâce à une analyse précise du "phénomène de Stokes". Dans le cas général une étude analogue s'imposerait ; nous ne l'aborderons pas ici.

§ 4. APPENDICE

Le théorème qui a été utilisé aux paragraphes 2 et 3 est le suivant :

<u>Théorème 4.1</u> : <u>Soit</u> r <u>un entier</u> ≥ 0 ; <u>et soit</u> Φ <u>une fonction holomorphe de</u> $(t,Y) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ <u>au voisinage de</u> $(0, Y_o)$. <u>Soit</u> U <u>un intervalle ouvert de</u> S <u>de mesure</u> $< \frac{\pi}{r}$; <u>supposons qu'il existe</u> $Z \in \mathbb{C}[[t]]^n$, <u>avec</u> $Z(0) = Y_o$ <u>qui vérifie</u> $t^{r+1}\frac{dZ}{dt} = \Phi(t,Z)$; <u>alors il existe</u> $Y \in \bar{\mathcal{A}}(U)^n$ <u>vérifiant</u> $\hat{Y} = Z$, <u>et</u> $t^{r+1}\frac{dY}{dt} = \Phi(t,Y)$.

Quoique ce résultat soit "bien connu", je n'en ai pas de référence explicite. Il est essentiellement démontré dans [5]; voir à ce propos la remarque finale de [3], page 175.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz : Birkhoff invariants and Stokes multipliers for meromorphic linear differential equations, 1976 (à paraître).

[2] P. Deligne : Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lect. Notes in Math., n° 163, Springer (1970).

[3] B. Malgrange : Sur les points singuliers des équations différentielle différentielles, l'Enseignement mathématique, t. XX, 1-2 (1974), p.147-176.

[4] Y. Sibuya : Stokes Phenomena, 1977 (à paraître au Bull. A. M. S.).

[5] W. Wasow : Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Publ. (1965).