Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. Kashiwara

Analyse micro-locale du noyau de Bergman

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 8, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A24_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

ANALYSE MICRO-LOCALE DU NOYAU DE BERGMAN

par M. KASHIWARA

Exposé n° VIII

14 Décembre 1976

§ 0. INTRODUCTION

Soit Ω un domaine borné, strictement pseudo-convexe dans $\mathbb{C}^n$. Rappelons que le noyau de Bergman $B(z,\bar{w})$ est défini de la façon suivante : $B(z,\bar{w})$ est une fonction holomorphe sur $\Omega \times \bar{\Omega}$ ($\bar{\Omega}$ le conjugué complexe de Ω) qui satisfait

$$\int_{\Omega} B(z,\bar{w})u(w)|dw|^2 = u(z)$$

pour toute fonction $u(z) \in \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.

Fefferman [2], Boutet de Monvel-Sjöstrand [1] ont démontré que ce noyau avait un développement asymptotique sur le bord $\partial\Omega$ de Ω dans le cas où celui-ci est C^∞ ; supposons que Ω soit défini par $\{z; f > 0\}$ avec f une fonction C^∞ telle que $df \neq 0$ sur $\partial\Omega$. Alors on a une série asymptotique

$$B(z,\bar{z}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j f^{-n-1+j} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j f^j \log f \ .$$

Si le bord de Ω est analytique, cette série asymptotique converge au noyau $B(z,\bar{z})$.

Théorème 0 : Supposons que f soit analytique. Alors il existe deux fonctions analytiques a et b définies dans un voisinage de $\partial\Omega$ telles qu'on ait $B(z,\bar{z}) = af^{-n-1} + b \log f$.

En plus, $B(z,\bar{w})$ satisfait le système holonome simple d'équations microdifférentielles, qui détermine $B(z,\bar{z})$ modulo une fonction analytique définie dans un voisinage de $\partial\Omega$.

Théorème 1 : Le noyau de Bergman $B(z,\bar{w})$ satisfait le système holonome simple d'équations microdifférentielles : si deux opérateurs microdifférentiels $P(z,D_z)$ et $Q(\bar{w},D_{\bar{w}})$ satisfont $P(z,D_z)Y(f(z,\bar{z})) = Q(\bar{z},D_{\bar{z}})Y(f(z,\bar{z}))$, alors $B(z,\bar{w})$ satisfait $P^*(z,D_z)B(z,\bar{w}) = Q^*(\bar{w},D_{\bar{w}})B(z,\bar{w})$ où Y est la fonction de Heaviside.

§ 1. OPERATEURS MICRO-DIFFERENTIELS (voir [3]).

Soient X une variété complexe de dimension n, T^*X le fibré vectoriel cotangent de X. On va définir le faisceau d'anneaux $\mathcal{E}_X$ des opérateurs micro-différentiels ; soient $(x_1,\dots,x_n)$ un système de coordonnées locales de X, $(x_1,\dots,x_n;\xi_1,\dots,\xi_n)$ le système de coordonnées locales de T^*X tel que $\omega = \Sigma\, \xi_j\, dx_j$ soit la forme canonique. Pour tout ouvert Ω de T^*X, $\mathcal{E}_X(\Omega)$ est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_X(\Omega) = \{(p_j(x,\xi))_{j\in Z} \ ;\ 0)p_j(x,\xi)$$

sont des fonctions holomorphes définies sur Ω, homogènes de degré j par rapport à ξ.

1) On a localement $p_j(x,\xi) = 0$ pour $j \gg 0$

2) Pour tout compact K de Ω, il existe une constante C_K telle que $\sup_K |p_j| \le (-j)!\, C_K^{-j}$ pour $j < 0\}$.

On écrit $\Sigma\, p_j(x,D_x)$ pour $(p_j(x,\xi))_j$. $\Omega \mapsto \mathcal{E}_X(\Omega)$ définit un faisceau sur T^*X qui possède une structure d'anneaux pour la loi de composition bien connue : pour $P = \Sigma P_j(x,D_x)$ et $Q = \Sigma\, Q_j(x,D_x)$, $R = PQ = \Sigma R_j(x,D_x)$ est donné par

$$R_\ell(x,\xi) = \sum_{\substack{\alpha\in \mathbb{Z}_+^n \\ \ell = j+k-|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!}(D_\xi^\alpha P_j)\,(D_x^\alpha Q_k) \ .$$

On note par $\mathcal{E}_X(m)$ le sous-faisceau de $\mathcal{E}_X$ formé des $P = \Sigma\, P_j(x,D_x)$ tels que $P_j = 0$ pour $j > m$. Si $\mathcal{O}(m)$ est un faisceau des fonctions holomorphes homogènes de degré m, on a un homomorphisme canonique $\sigma_m : \mathcal{E}_X(m) \to \mathcal{O}(m)$ donné par $P \mapsto P_m$, qui définit un isomorphisme, par passage au quotient, $\mathcal{E}_X(m)/\mathcal{E}_X(m-1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(m)$. $\mathcal{E}_X$ contient $\pi^{-1}\mathcal{D}_X$ comme un sous-faisceau où $\mathcal{D}_X$ est un faisceau d'anneaux des opérateurs différentiels et π la projection de T^*X sur X.

Considérons un Idéal $\mathcal{J}$ à gauche de $\mathcal{E}_X$. L'Idéal des symboles $\overline{\mathcal{J}}$ de $\mathcal{J}$ est, par définition, l'Idéal de $\mathcal{O}_{T^*X}$ engendré par les

$\sigma_m(\mathcal{J} \cap \mathcal{E}_X(m))$. $\mathcal{J}$ est un Idéal cohérent si et seulement si $\overline{\mathcal{J}}$ est un Idéal cohérent de $\mathcal{O}_{T^*X}$. Considérons le système d'équations micro-différentielles : $Pu = 0$ pour tout $P \in \mathcal{J}$. On dit que ce système est holonome simple si l'ensemble Λ des zéros de l'Idéal des symboles (appelé la variété caractéristique) est une sous-variété lisse de codimension n de T^*X et si $\overline{\mathcal{J}}$ coïncide avec l'Idéal des fonctions qui s'annulent sur Λ. Pour un opérateur micro-différentiel $P(x,D) = \Sigma P_j(x,D_x)$ (i.e. une section de $\mathcal{E}_X$), l'opérateur $Q(x,D) = \Sigma Q_\ell(x,D_x)$ défini par

$$Q_\ell(x,\xi) = \sum_{\ell=j-|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha D_x^\alpha P_j)(x,-\xi)$$

est dit un opérateur adjoint de P et noté par $P^*(x,D_x)$. Si on note a l'isomorphisme $(x,\xi) \mapsto (x,-\xi)$ de T^*X sur lui-même, $P \mapsto P^*$ définit un anti-isomorphisme $\mathcal{E}_X \simeq a^{-1}\mathcal{E}_X$, i.e. si P est défini sur Ω, alors P^* est défini sur Ω^a et $(PQ)^* = Q^*P^*$, $(P^*)^* = P$.

§ 2. MICRO-FONCTIONS HOLOMORPHES

Soit Y une hypersurface lisse de X, $T^*_Y X$ le fibré conormal de Y. Supposons que Y soit définie par $f = 0$. Considérons le faisceau $\mathcal{F}$ sur Y défini de la manière suivante : pour tout ouvert U de Y, $\mathcal{F}(U)$ est l'ensemble des fonctions multi-valuées ψ dans un voisinage de U dans X de la forme $\psi = af^{-N} + b \log f$ avec a et b des fonctions holomorphes définies dans un voisinage de U dans X et N un entier. Cette définition ne dépend pas de choix de f. On note par Y(f) la classe d'équivalence de $\log f$ dans $\mathcal{F}' = \mathcal{F}/\mathcal{O}_X|_Y$. Y(f) ne dépend pas du choix de f et de la branche de log. En notant par π la projection de T^*X sur X, on définit $\mathcal{C}_{Y|X} = (\pi^{-1}\mathcal{F}')|_{T^*X - T^*_X X}$.

Lemme 2.1 : Soit $\Theta_{Y|X}$ le faisceau des champs de vecteurs tangents à Y. Alors $\mathcal{C}_{Y|X}$ est isomorphe à $\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X\Theta_{Y|X}$ (voir [3]).

On donne ici seulement l'explication de l'action de $\mathcal{E}_X$ sur $\mathcal{C}_{Y|X}$. Soit p un point de $T^*_Y X - T^*_X X$. Choisissons des coordonnées locales $(x_1,\ldots,x_n)$ tel que $p = (o;dx_1)$. Posons $\Sigma = \{x_1 = \varepsilon\}$. Un opérateur micro-différentiel $P(x,D_x)$ défini dans un voisinage de p s'exprime

$$P(x,D) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n \\ \alpha_2,\ldots,\alpha_n \geq 0}} a_\alpha(x) D^\alpha$$

où $D^\alpha = D_1^{\alpha_1},\ldots,D_n^{\alpha_n}$.

On définit $(D_1^{-1})_\Sigma u(x) = \int_\varepsilon^{x_1} u(t,x_2,\ldots,x_n)dt$, $(D_1^\nu)_\Sigma = D_1^\nu$ pour $\nu \geq 0$ et $(D_1^{-1})_\Sigma^{-\nu}$ pour $\nu < 0$, $(D^\alpha)_\Sigma = (D_1^{\alpha_1})_\Sigma D_2^{\alpha_2},\ldots,D_n^{\alpha_n}$ et $P_\Sigma = \Sigma\, a_\alpha(x)(D^\alpha)_\Sigma$. Alors, pour $u(x) \in \mathcal{F}$, $P_\Sigma u$ converge et définit un germe de $\mathcal{F}$ pour $0 < |\varepsilon| \ll 1$. Si on considère $P_\Sigma u$ comme un germe de $\mathcal{F}/\mathcal{O}_X$, il ne dépend pas du choix de $\varepsilon \neq 0$ assez petit, et il définit un homomorphisme $\mathcal{C}_{Y|X,p} \to \mathcal{C}_{Y|X,p}$.

L'homomorphisme $\mathcal{E}_X \to \mathcal{C}_{Y|X}$ défini par $P \mapsto PY(f)$ devient un isomorphisme de $\mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X\Theta_{Y|X}$ sur $\mathcal{C}_{Y|X}$ (si $v \in \Theta_{Y|X}$, $v \log f = (vf)/f$ est holomorphe sur Y et donc $\Theta_{Y|X}\, Y(f) = 0$).

§ 3. TRANSFORMATIONS CANONIQUES QUANTIFIEES

Soient X_1, X_2 deux variétés de même dimension n, Ω_1(resp.Ω_2) un ouvert de T^*X_1(resp. T^*X_2).

Définition 3.1 : Le couple (Φ,ψ) est dit *transformation canonique quantifiée* s'il satisfait les conditions suivantes

a) Φ est une transformation symplectique homogène de Ω_1 sur Ω_2 (i.e. si ω_{X_ν} $(\nu = 1,2)$ est la forme canonique sur T^*X_ν, $\Phi^*\omega_{X_2} = \omega_{X_1}$).

b) ψ est un isomorphisme de $\mathcal{E}_{X_2}$ sur $\Phi_*\mathcal{E}_{X_1}$.

Proposition 3.2 : Si (Φ,ψ) est une transformation canonique quantifiée, $\sigma(P) \circ (\Phi) = \sigma(\psi(P))$ pour tout $P \in \mathcal{E}_{X_2}$.

Soit Φ une transformation symplectique homogène de Ω_1 sur Ω_2, Λ un graphe de Φ (i.e. $\{(p,\Phi(p)^a) \in T^*(X_1 \times X_2)\ ;\ p \in \Omega_1\}$). Alors on a la proposition suivante .

Proposition 3.3 : Si $\psi : \mathcal{E}_{X_2}|_{\Omega_2} \to \Phi_*(\mathcal{E}_{X_1}|_{\Omega_1})$ est un isomorphisme, l'Idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{E}_{X_1 \times X_2}$ engendré par $\{P^* - \psi(P); P \in \mathcal{E}_{X_2}\}$ définit un système holonome simple de variété caractéristique Λ. Réciproquement, si $\mathcal{J}'$ est un système holonome simple de variété caractéristique Λ, alors, pour tout $P \in \mathcal{E}_{X_2}$, il existe un et un seul opérateur $Q \in \mathcal{E}_{X_1}$ tel que $P^* - Q \in \mathcal{J}'$ et $P \mapsto Q$ donne un isomorphisme de $\mathcal{E}_{X_2}$ sur $\Phi_*(\mathcal{E}_{X_1})$.

Donc, il y a une équivalence entre l'ensemble des ψ et l'ensemble des systèmes holonomes simples $\mathcal{J}u = 0$ de variété caractéristique Λ.

§ 4. Soient X_1, X_2 comme dans la dernière section, Y une hypersurface lisse de $X_1 \times X_2$. Soit p_1 et p_2^a les projections de $T^*(X_1 \times X_2) = T^*X_1 \times T^*X_2$ sur T^*X_1 et T^*X_2 définies par $(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) \mapsto (x_1; \xi_1)$ et $(x_2; -\xi_2)$ respectivement. Posons $\Lambda = T^*_Y(X_1 \times X_2) - T^*_{X_1 \times X_2}(X_1 \times X_2)$ et soit $p = (x_1^o, x_2^o; \xi_1^o, -\xi_2^o)$ un point de Λ. Supposons que Y soit défini par $f(x_1, x_2) = 0$.

Lemme 4.1 : Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $p_1 : \Lambda \to T^*X_1$ est un isomorphisme local au voisinage du p.

b) $p_2^a : \Lambda \to T^*X_2$ est un isomorphisme local au voisinage de p.

c) $\begin{vmatrix} 0 & d_{x_1} f \\ d_{x_2} f & d_{x_1} d_{x_2} f \end{vmatrix} \quad (x_1^o, x_2^o) \neq 0$

§ 5. Revenons à la situation du noyau de Bergman. Soit Ω un domaine dans $\mathbb{C}^n = X$ à bord réel analytique, strictement pseudo-convex, z_o un point de $\partial\Omega$. Soit $X_{\mathbb{R}}$ la variété réel analytique sous-jacente à X, $\overline{X}$ le conjugué complexe de X. Alors $X_{\mathbb{R}} \to X \times \overline{X}$ est un complexifié de X. Soit Y un complexifié de $\partial\Omega$. Alors Y est une hypersurface de $X \times \overline{X}$. Soit

$f(z,\overline{w}) = 0$ une équation de Y. On peut supposer que f est positive sur Ω. Comme $\partial\Omega$ est strictement pseudo-convexe, $\begin{vmatrix} 0 & \partial_z f \\ \partial_{\overline{z}} f & \partial_z \partial_{\overline{z}} f \end{vmatrix} (z_o) \neq 0$ et, donc, $\Lambda = T^*_Y(X \times \overline{X})$ définit une transformation canonique entre T^*X et $T^*\overline{X}$ dans un voisinage de $\partial_z f(z_o,\overline{z}_o)$ et $\partial_{\overline{z}} f(z_o,\overline{z}_o)$ (Lemme 4.1). Considérons le système holonome $\mathcal{E}_{X \times \overline{X}} \otimes_{Y|X}$. Alors il définit une transformation canonique quantifiée ψ, qui est donnée par $Q(\overline{w},D_{\overline{w}}) \mapsto P(z,D_z)$ avec la relation

$$Q^*(\overline{w},D_{\overline{w}})Y(f) = P(z,D_z)Y(f) .$$

Comme $Q \mapsto Q^*$ est un anti-isomorphisme, $\widetilde{\Psi} : \mathcal{E}_{\overline{X}} \to \mathcal{E}_X$ défini par $\widetilde{\Psi}(Q) = (\Psi(Q^*))^*$ est un isomorphisme, et il définit, donc, un système holonome simple

$$\mathcal{J} : Q^*(\overline{w},D_{\overline{w}})u = \widetilde{\Psi}(Q)u$$

(autrement dit, $P(z,D_z)u = Q(\overline{w},D_{\overline{w}})u$ si $P^*(z,D_z)Y(f) = Q^*(\overline{w},D_{\overline{w}})Y(f)$).

Le théorème 0 signifie que $B(z,\overline{w})$ détermine une section de $\mathcal{C}_{Y|X \times \overline{X}}$, et le théorème 1 signifit que $B(z,\overline{w})$ satisfait le système holonome simple $\mathcal{J}$ en tant que section de $\mathcal{C}_{Y|X \times \overline{X}}$. Comme il existe une et une seule solution à un multiple constant près, on peut déterminer $B(z,w)$ modulo une fonction holomorphe définie dans un voisinage de Y.

§ 6 On donne le raisonnement <u>heuristique</u> du théorème 1. Supposons que $P(z,D_z)$ et $Q(\overline{w},D_{\overline{w}})$ satisfassent $P(z,D_z)Y(f) = Q(\overline{w},D_{\overline{w}})Y(f)$. Alors on a, pour toute fonction $u(z)$,

$$P^*(z,D_z)u(z) = P^*(z,D_z) \int_\Omega B(z,\overline{w})u(w)|dw|^2$$

$$= \int_\Omega [P^*(z,D_z)B(z,\overline{w})]u(w)\ |dw|^2.$$

D'autre part, on a

$$P^*(z,D_z)u(z) = \int_\Omega B(z,\bar{w})\left[P^*(w,D_w)u(w)\right]|dw|^2$$

$$= \int B(z,\bar{w})Y(f(w,\bar{w}))\left[P^*(w,D_w)u(w)\right]|dw|^2$$

Par intégration par partie, on trouve

$$\int \left[P(w,D_w)\{B(z,\bar{w})Y(f(w,\bar{w}))\right]u(w)|dw|^2$$

$$= \int B(z,\bar{w})\left[P(w,D_w)Y(f(w,\bar{w}))\right]u(w)|dw|^2$$

$$= \int B(z,\bar{w})\left[Q(\bar{w},D_{\bar{w}})Y(f(w,\bar{w}))\right]u(w)|dw|^2$$

$$= \int\left[Q^*(\bar{w},D_{\bar{w}})\{B(z,\bar{w})u(w)\}\right]Y(f(w,\bar{w}))|dw|^2$$

$$= \int_\Omega \left[Q^*(\bar{w},D_{\bar{w}})B(z,\bar{w})\right]u(w)|dw|^2.$$

On obtient, donc,

$$\int_\Omega \left[P^*(z,D_x)B(z,\bar{w}) - Q^*(\bar{w},D_{\bar{w}})B(z,\bar{w})\right]u(w)|dw|^2 = 0$$

pour tout u , qui entraîne $P^*(z,D_z)B(z,\bar{w}) = Q^*(\bar{w},D_{\bar{w}})B(z,\bar{w})$.

§ 7. Considérons une famille $\{\Omega_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ de domaines bornés strictement pseudo-convexes à bord réel analytique et comparons les noyaux de Bergman B_o de Ω_o et B_t de Ω_t modulo t^2.

Supposons que le bord de Ω_t soit donné par $f_t(z,\bar{z}) = 0$; on a $f_t(z,\bar{z}) \equiv f(z,\bar{z}) + th(z,\bar{z})$ modulo t^2 avec $f = f_o$ et $h = \partial f_t/\partial t|_{t=o}$.
On obtient donc

$$Y(f_t) \equiv Y(f) + th\,\delta(f) \text{ modulo } t^2.$$

Soit $R(z,D_z)$ un opérateur micro-différentiel en z qui satisfait $RY(f) = h\delta(f)$. Alors on a :

$$Y(f_t) \equiv Y(f) + tR\,Y(f) \equiv e^{tR}Y(f) \text{ modulo } t^2.$$

Proposition 7.1 : $B_t \equiv e^{-tR^*} B_o \equiv B_o - t\, R^* B_o$ modulo t^2.

En effet, si $P_z Y(f_t) = Q_{\bar{w}} Y(f_t)$, on a $P_z e^{tR} Y(f) = Q_{\bar{w}} e^{tR} Y(f)$ modulo t^2, et donc $e^{-tR} P_z e^{tR} Y(f) \equiv Q_{\bar{z}} Y(f)$. Comme B_o est un noyau de Bergman pour $f = 0$, on a

$$(e^{-tR} P_z e^{tR})^* B_o = Q_{\bar{w}}^* B_o ,$$

ce qui entraîne que

$$P_z^*(e^{-tR^*} B_o) = Q_{\bar{w}}^*(e^{-tR^*} B_o).$$

§ 8. EXEMPLE

Considérons le cas classique

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C}^n ; \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 < 1 \}$$

Posons $f(z,\bar{w}) = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{w}_j - 1$. Alors on a $D_{z_j} Y(f) = \bar{z}_j\, \delta(f)$,

$$D_{\bar{z}_j} Y(f) = z_j \delta(f) \text{ et donc}$$

$$(\Sigma z_k D_{z_k}) Y(f) = (\Sigma z_j \bar{z}_j)\delta(f) = (1+f)\delta(f) = \delta(f).$$

On obtient

$$D_{\bar{z}_j} Y(f) = z_j (\Sigma z_k D_{z_k}) Y(f)$$

$$\bar{z}_j Y(f) = (\Sigma z_k D_{z_k})^{-1} D_{z_j} Y(f) .$$

Le noyau de Bergman $B(z,\bar{w})$ de Ω satisfait donc le système holonome simple :

$$- D_{\bar{w}_j} B = (-\Sigma D_{z_k} z_k) z_j B$$

$$\bar{w}_j B = D_{z_j} (\Sigma D_{z_k} z_k)^{-1} B .$$

et $B = 1/f^{n+1}$ satisfait ces équations.

Par exemple, posons $h = \sum_j a_j |z_j|^4$ et considérons le noyau de Bergman B_t de $\Omega_t = \{f + th < 0\}$ modulo t^2. On a

$$h\,\delta(f) = -(\Sigma\, a_j\, z_j^2\, D_{z_j}^2)(-\Sigma\, z_j\, D_{z_j} + 1)^{-1}\, Y(f) .$$

On a donc

$$B_t \equiv B + t(\langle D, z\rangle + 1)^{-1}(\Sigma\, a_j\, D_{z_j}^2\, z_j^2)\, B = B + t(\Sigma\, a_j\, D_{z_j}^2\, z_j^2)(\langle z, D\rangle + n + 1)^{-1} B .$$

Posons

$$a(\tau) = \frac{1}{(1+\tau)^{n+1}} \log \tau - \frac{1}{(1+\tau)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k(n-k)!k!}\, \tau^{-k} .$$

Alors on a

$$(\langle z, D\rangle + n + 1)a(f) = 1/f^{n+1} .$$

Donc on a

$$B_t = f^{-n-1} + t(h\, a''(f) + 4\varphi\, a'(f) + 2\, c\, a(f))$$

avec $\varphi = \Sigma\, a_j\, z_j \bar{w}_j$, $c = \Sigma\, a_j$.

On trouve

$$\begin{aligned} B_t &= (f + th)^{-n-1} + \frac{t(n+1)\, h}{(f+th)^{n+2}} \\ &\quad + t\big[h\, a''(f + th) + 4\varphi\, a'(f + th) \\ &\quad + 2\, c\, a(f + th)\big] \\ &= \frac{g_t}{(f+th)^{n+1}} + t\,\psi \log(f + th) \end{aligned}$$

avec $\psi = (n+1)(n+2)\, h\,(1+f)^{-n-3} - 4(n+1)\varphi(1 + f)^{-n-2} - 2c(1 + f)^{-n-1}$.

Donc, si $h \not\equiv 0$, B_t contient un facteur logarithmique .

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Boutet de Monvel, J. Sjöstrand : Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö, Société Math. de France, Astérisque 34-35 (1976), 123-164.

[2] C. Fefferman : The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains, Inventiones Math. 26 (1974), 1-66.

[3] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara : Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture notes in Math. 287, Springer (1973), 265-529.