Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. S. Baouendi
C. Goulaouic

Solutions analytiques de l'équation d'Euler d'un fluide compressible

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 22, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A21_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

SOLUTIONS ANALYTIQUES DE L'EQUATION D'EULER D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE

par M. S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC

Exposé n° XXII

17 Mai 1977

On s'intéresse ici à des résultats du type "Théorème de Cauchy-Kovalewsky" pour des équations pseudo-différentielles non linéaires ; en fait, dans cet exposé, on se restreint à un exemple significatif (pour lequel on donne une idée succinte des démonstrations) qui est l'équation d'Euler pour un fluide non visqueux compressible sur une variété riemannienne compacte analytique sans bord.

Soit Γ une telle variété ; si E est un fibré vectoriel analytique sur Γ, on note $\mathcal{A}(\Gamma,E)$ les sections analytiques de ce fibré ; on note $\mathcal{A}(\Gamma)$ l'espace des fonctions analytiques sur Γ, $T\Gamma$ le fibré tangent à Γ et ∇ la connexion riemannienne de Γ. Soit $T > 0$; on cherche à résoudre le système (où (t,x) désigne le point courant de $[-T,T] \times \Gamma$) :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \nabla_u u = \dfrac{\operatorname{grad} p}{\rho} + f \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho . u = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \\ \rho(0,x) = \rho_0(x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

où grad, div désignent respectivement grad_x, div_x ; dans (1) on peut remplacer $\nabla_u u$ par $\operatorname{div}(u \otimes u)$.

On a le résultat :

Théorème 1 : Soient $f \in C([-T,T], \mathcal{A}(\Gamma,T\Gamma))$, $\rho_0 \in \mathcal{A}(\Gamma)$, $\rho_0 > 0$ et $u_0 \in \mathcal{A}(\Gamma,T\Gamma)$, $\operatorname{div} u_0 = 0$. Il existe $\varepsilon > 0$ et une unique fonction $u \in C^1([-\varepsilon,\varepsilon], \mathcal{A}(\Gamma,T\Gamma))$, une unique fonction $\rho \in C^1([-\varepsilon,\varepsilon], \mathcal{A}(\Gamma))$ et une fonction $p \in C([-\varepsilon,\varepsilon], \mathcal{A}(\Gamma))$ déterminée à une constante près, satisfaisant le système (1) sur $]-\varepsilon,\varepsilon[\times \Gamma$.

De plus si f est aussi analytique par rapport à t, les fonctions u, ρ, p sont aussi analytiques par rapport à t.

Dans le cas de données C^∞, Marsden [2] a démontré l'existence et l'unicité de solutions C^∞ du système (1).

Lorsque ρ_0 est constant, le système (1) est celui d'un fluide non visqueux incompressible pour lequel l'analogue du théorème 1 a été

montré dans [1]. La difficulté nouvelle ici est la "forte non linéarité" du problème pseudo-différentiel auquel on réduit le système (1).

§ 1. REDUCTION DE (1) PAR ELIMINATION DE LA PRESSION

On réduit (1) en projetant sur les u à divergence nulle, ce qui en même temps élimine p. Pour cela on note :

$$A_\rho = \operatorname{div} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \qquad \text{pour } \rho > 0 ,$$

$$Q_\rho = \operatorname{grad} A_\rho^{-1} \operatorname{div}$$

(Q_ρ est bien défini et est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 dans $\mathcal{C}(\Gamma, T\Gamma)$),

$$\Lambda_\rho = I - \frac{1}{\rho} Q_\rho \ ;$$

on a, pour $u \in \mathcal{C}(\Gamma, T\Gamma)$ et $p \in \mathcal{C}(\Gamma)$,

i) $\Lambda_\rho u = u$ si $\operatorname{div} u = 0$

ii) $\operatorname{div} \Lambda_\rho u = 0$

iii) $\Lambda_\rho \left(\frac{\operatorname{grad} p}{\rho}\right) = 0.$

On vérifie aisément que (1) équivaut à (2) (3) :

(2)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Lambda_\rho \operatorname{div}(u \otimes u) - \Lambda_\rho f = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho \,.\, u = 0 \\ u(0,x) = u_o(x) \quad \text{avec } \operatorname{div} u_o = 0 \\ \rho(0,x) = \rho_o(x) > 0. \end{cases}$$

(3) $p = A_\rho^{-1} \operatorname{div} (\operatorname{div} (u \otimes u) - f)$, défini à une constante additive près.

On se propose donc maintenant de résoudre le système (2).

§ 2. RAPPELS SUR UNE FORMULATION ABSTRAITE DU THEOREME DE CAUCHY

Soient $(E_s)_{0<s\leq s_0}$ une chaîne décroissante d'espaces de Banach, $T < 0$, $R > 0$, $V_0 \in E_{s_0}$, $\mathcal{F}$ une fonction continue de $[-T,T] \times \{V \in E_s ; \|V - V_0\|_s < R\}$ dans $E_{s'}$, pour tous $0 < s' < s \leq s_0$, telle qu'il existe $C > 0$ vérifiant

$$\sup_{|t|<T} \|\mathcal{F}(t,V) - \mathcal{F}(t,V')\|_{s'} \leq \frac{C}{s - s'} \|V - V'\|_s \tag{4}$$

pour tous V, V' dans E_s avec $\|V - V_0\|_s < R$ et $\|V' - V_0\|_s < R$.

On suppose de plus que la fonction

$$t \mapsto \mathcal{F}(t,V_0) \text{ est continue sur } [-T,T] \text{ à valeurs dans } E_{s_0} . \tag{5}$$

Alors un résultat de Nishida [4] (améliorant un théorème de Nirenberg [3]) permet d'affirmer qu'il existe $a > 0$ et une unique fonction $V \in C^1(]-a(s_0 - s), a(s_0 - s)[, E_s)$ pour $0 < s < s_0$ vérifiant $\|V - V_0\|_s < R$ et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{F}(t,V) = 0 \\ V(0) = V_0 \quad . \end{cases} \tag{6}$$

On va réduire le système (2) à la forme (6) ; pour cela on pose

$$V = \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}$$

et on définit la chaîne (E_s) comme suit :
on prend $X_1,\ldots,X_r$, r champs de vecteurs analytiques réels sur Γ qui engendrent $T\Gamma$ en chaque point. On note, pour $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)$ où $\alpha_j \in \{1,\ldots,r\}$

$$X^\alpha = X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \ldots X_{\alpha_\ell} \quad ; \quad \ell = |\alpha| .$$

On choisit une norme $|||\ |||$ sur $C^{1/2}(\Gamma)$ (l'espace des fonctions hölderiennes d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ), qui en fait une algèbre de Banach.

Pour $s > 0$, on note

$$F_s = \{u \in C^\infty(\Gamma)\ ; \|u\|_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \sup_{|\alpha|=k} |||\, X^\alpha u|||\, < \infty\}\ ;$$

on vérifie que (F_s) est une chaîne décroissante d'algèbres de Banach et que l'on a

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \bigcup_{s>0} F_s\ .$$

Plus généralement, si E est un fibré analytique riemannien sur Γ, on note

$$F_s(E) = \{u \in C^\infty(\Gamma,E);\ \|u\|_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \sup_{|\alpha|=k} |||\nabla_X^\alpha u|||\, < \infty\}$$

où $|||\ |||$ désigne une norme sur $C^{1/2}(\Gamma,E)$ et $\nabla_X^\alpha = \nabla_{X_{\alpha_1}} \ldots \nabla_{X_{\alpha_\ell}}$.

On remarque aussi que $(F_s(E))$ est une chaîne décroissante d'espaces de Banach, vérifiant $\mathcal{A}(\Gamma,E) = \bigcup_{s>0} F_s(E)$ et telle que l'on ait :

$$\|fu\|_s \leq \|f\|_s \|u\|_s \quad \text{pour tous } f \in F_s,\ u \in F_s(E).$$

On prend enfin

$$E_s = F_s(T\Gamma) \times F_s\ .$$

On utilisera les résultats suivants :

Lemme 1 : Soient E, E' deux fibrés riemanniens analytiques sur Γ et P un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre d ($d \in \mathbb{N}$) opérant de $\mathcal{A}(\Gamma,E)$ dans $\mathcal{A}(\Gamma,E')$.
Il existe $s_0 > 0$, $C > 0$ tels que l'on ait, pour tous $0 < s' < s \leq s_0$,

$$\|P\|_{\mathcal{L}(F_s(E),F_{s'}(E'))} \leq \frac{C}{(s-s')^d}\ .$$

Pour une démonstration de ce lemme (dans le cas scalaire) on peut voir [1].

Lemme 2 : Soient E et E' deux fibrés riemanniens analytiques sur Γ, $u_o \in \mathcal{C}(\Gamma,E)$ et Ω un ouvert de E contenant $u_o(x)$ pour tout $x \in \Gamma$; soit $f : \Omega \to E'$, analytique et respectant la fibration. Alors il existe $s_o > 0$, $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que : pour tout $s \in]0,s_o]$, pour tous u,v dans $F_s(E)$ vérifiant

$$\|u-u_o\|_s < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|v-u_o\|_s < \varepsilon ,$$

les fonctions $x \mapsto f(u(x))$ et $x \mapsto f(v(x))$ sont dans $F_s(E')$ et vérifient

$$\|f(u(.)) - f(v(.))\|_s \leq C \|u-v\|_s .$$

On ne donne pas ici la démonstration de ce lemme.

§ 3. IDEE DE LA RESOLUTION DE (2).

On utilise les lemmes :

Lemme 3 (formule de la résolvante) : Soient ρ_1, ρ_2 dans $\mathcal{C}(\Gamma)$ et strictement positifs ; on a

$$Q_{\rho_1} - Q_{\rho_2} = Q_{\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) Q_{\rho_1} .$$

Démonstration : Soient $f \in \mathcal{C}(\Gamma,T\Gamma)$ et u une solution de $A_{\rho_1} u = \operatorname{div} f$; on a $\operatorname{grad} u = Q_{\rho_1} f$. $A_{\rho_2} u = (A_{\rho_2} - A_{\rho_1})u + \operatorname{div} f$,

$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} A_{\rho_2}^{-1}(A_{\rho_2} - A_{\rho_1})u + \operatorname{grad} A_{\rho_2}^{-1} \operatorname{div} f$; comme $A_{\rho_2} - A_{\rho_1} = \operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\operatorname{grad}$, on obtient :

$$(Q_{\rho_1} - Q_{\rho_2})f = Q_{\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\operatorname{grad} u$$

$$(Q_{\rho_1} - Q_{\rho_2})f = Q_{\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)Q_{\rho_1} f.$$

Lemme 4 : Soit $\rho_o \in \mathcal{C}(\Gamma)$ et strictement positif. Il existe $s_o > 0$, $\varepsilon > 0$, $C_1 > 0$ tels que, pour tout $s \in]0, s_o]$ et tout $\rho \in F_s$ vérifiant $\|\rho - \rho_o\|_s < \varepsilon$, on ait :

$$\frac{1}{\rho} \in F_s ,$$

$$Q_\rho \in \mathcal{L}(F_s(T\Gamma), F_s(T\Gamma)) \text{ et}$$

$$\|Q_\rho\|_{\mathcal{L}(F_s(T\Gamma),F_s(T\Gamma))} \leq C_1 .$$

Démonstration : Il résulte du lemme 2 que $\frac{1}{\rho}$ appartient à F_s pourvu que s et $\|\rho - \rho_o\|_s$ soient assez petits.

En utilisant le lemme 3 on obtient

$$Q_{\rho_o} = (I - Q_{\rho_o}(\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho}))Q_\rho .$$

Pour s et $\|\rho - \rho_o\|_s$ assez petits, il résulte des lemmes 1 et 2 :

$$\|Q_{\rho_o}(\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho})\|_{\mathcal{L}(F_s(T\Gamma),F_s(T\Gamma))} \leq \frac{1}{2}$$

et alors $I - Q_{\rho_o}(\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho})$ est inversible et la majoration annoncée résulte de

$$Q_\rho = \sum_{n=o}^{\infty} (Q_{\rho_o}(\frac{1}{\rho_o} - \frac{1}{\rho}))^n Q_{\rho_o} .$$

On peut maintenant écrire (2) sous la forme (6) en posant

$$\begin{cases} \mathcal{F}(t,V) = \begin{pmatrix} \Lambda_\rho \operatorname{div}(u \otimes u) - \Lambda_\rho f \\ \operatorname{grad}\rho . u \end{pmatrix} \\ V_o = \begin{pmatrix} u_o \\ \rho_o \end{pmatrix} , \end{cases}$$

et il reste à vérifier que les hypothèses (4) (5) sont satisfaites avec le choix fait de la chaîne (E_s) et de $\mathcal{F}$. La vérification de (5) est immédiate. Pour vérifier (4) on traite successivement les différents

termes de $\mathcal{F}$ en utilisant systématiquement les lemmes 1, 2, 3 et 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Problèmes de Cauchy pseudo-différentiels analytiques non linéaires ; Séminaire de l'Ecole Polytechnique 1975-76, exposé 13.

[2] J. E. Marsden : Well posedness of the equations of a non-homogeneous perfect fluid. Comm. in P. D. E. 1 (1976) 215-230.

[3] L. Nirenberg : An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kovalewsky theorem ; J. Diff. Geometry 6 (1972) 561-576.

[4] T. Nishida : A note on the Nirenberg's theorem as an abstract form of the non linear Cauchy-Kowalevski theorem in a scale of Banach space. To appear in J. of Diff. Geom.