Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

R. Beals

Opérateurs invariants hypoelliptiques sur un groupe de Lie nilpotent

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 19, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A18_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

OPERATEURS INVARIANTS HYPOELLIPTIQUES SUR UN GROUPE DE LIE NILPOTENT

par R. BEALS

Exposé n° XIX

19 Avril 1977

Nous esquissons une généralisation et une amélioration du théorème de Rockland sur les opérateurs invariants homogènes sur le groupe de Heisenberg.

Soit G un groupe de Lie, réel, connexe, avec algèbre de Lie $\underline{G}$. Il y a une action de G sur $\mathcal{E}(G)$ par translations à gauche : $u_g(h) = u(g^{-1}h)$. Un opérateur linéaire différentiel $P : \mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(G)$ est dit <u>invariant</u> (à gauche) si $P(u_g) = (Pu)_g$, pour chaque $u \in \mathcal{E}(G)$ et $g \in G$. On peut identifier $\underline{G}$ avec l'algèbre de Lie de champs de vecteurs invariants sur G par

$$(Xu)(g) = \frac{d}{dt} u(g \exp(tX))\Big|_{t=0} .$$

Celle-ci étend à une identification de l'algèbre universelle enveloppante $\underline{U}$ de $\underline{G}$ avec l'algèbre de tous les opérateurs invariants.

Soit $\pi : G \to L(H)$ une représentation unitaire (fortement continue) de G dans l'algèbre d'opérateurs sur un espace hilbertien H. Celle-ci étend à $\underline{G}$: π_X est le générateur infinitésimal du groupe unitaire $(\pi_{\exp(tX)})_{t \in \mathbb{R}}$. Soit $\mathcal{S}_\pi$ le plus grand sous-espace de H contenu dans le domaine de π_X pour chaque $X \in \underline{G}$ et invariant pour π_X. $\mathcal{S}_\pi$ est un sous-espace dense dans H, et l'application $X \mapsto \pi_X$ étend à une application $P \mapsto \pi_P$ de $\underline{U}$ dans l'algèbre d'opérateurs de $\mathcal{S}_\pi$ dans $\mathcal{S}_\pi$.

Soit $(\delta_\rho)_{\rho>0}$ un groupe d'automorphismes de G tel que $\delta_\rho \delta_\sigma = \delta_{\rho\sigma}$ et tel que l'application $(\rho, g) \mapsto \delta_\rho(g)$ est continue de $\mathbb{R}_+ \times G$ dans G. Il existe alors un groupe d'automorphismes de $\underline{G}$, notés aussi par δ_ρ, tel que

$$\delta_\rho(\exp X) = \exp(\delta_\rho X).$$

On dit que $(\delta_\rho)_{\rho>0}$ est un groupe de <u>dilatations</u> sur G si le générateur de ce groupe est diagonalisable avec spectre positif ; autrement dit, il existe une base (X_j) pour $\underline{G}$ tel que $\delta_\rho(X_j) = \rho^{\delta_j} X_j$, avec $\delta_j > 0$. Si G admet un groupe de dilatations, alors G est nilpotent et l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\underline{G}$ sur G. On va appeler l'ensemble des δ_j les <u>poids</u> du groupe (δ_ρ) ; après un changement d'échelle on peut toujours supposer que le poids minimal soit 1.

Les automorphismes δ_ρ de $\underline{G}$ étendent à $\underline{U}$. On dit que $P \in \underline{U}$ est homogène de degré m si

$$\delta_\rho(P) = \rho^m P \ , \quad \forall \rho > 0.$$

Ceci équivaut à

$$P(u \circ \delta_\rho) = \rho^m (Pu).\delta_\rho \ , \ u \in \mathcal{E}(G).$$

Exemple : $G = N_{2n+1}$, le groupe de Heisenberg. C'est le groupe de matrices $(2n+2) \times (2n+2)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ & 1 & & 0 & y_n & \\ & & 1 & & \vdots & \\ & & & & y_1 & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (x,y,z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

Alors $\underline{G}$ a une base $(X_1,\ldots,X_n, Y_1,\ldots,Y_n,Z)$ avec

$$[X_i,Y_i] = -[Y_i,X_i] = Z$$

et les autres crochets de Lie = 0. G a un groupe de dilatations avec poids $\{1,2\}$:

(1) $$\delta_\rho(x,y,z) = (\rho x, \rho y, \rho^2 z)$$

Chaque $P \in \underline{U}$ est de la forme

$$P = \Sigma \, a_{\alpha\beta k} \, X^\alpha \, Y^\beta \, Z^k \ , \ a_{\alpha\beta k} \in \mathbb{C} \ .$$

Cet opérateur est homogène de degré $m \Leftrightarrow a_{\alpha\beta k} = 0$ sauf pour $|\alpha|+|\beta| + 2k = m$.

Pour cet exemple on a le théorème suivant, de Rockland [2].

Théorème : Soit $G = N_{2n+1}$ avec les dilatations (1), et soit $P \in \underline{U}$ homogène de degré m. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) P et ${}^tP$ sont hypoelliptiques ;

b) pour chaque représentation unitaire irréductible non triviale π de G, π_P et π_{t_P} sont injectifs dans $\mathcal{S}_\pi$.

Nous donnons une généralisation très simple de l'implication (a) $\Rightarrow$ (b), et une généralisation et amélioration assez spéciale et assez simple de l'implication (b) $\Rightarrow$ (a).

Théorème 1 : Soit G un groupe de Lie avec groupe de dilatations, et soit $P \in \underline{U}$ homogène de degré $m > 0$ et hypoelliptique. Alors pour chaque représentation unitaire irréductible non triviale π de G, π_P est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, posons $\underline{G}_\alpha = \{X \in \underline{G} : \delta_\rho(X) = \rho^\alpha X, \ \forall \rho\}$. Puisque les δ_ρ sont automorphismes de l'algèbre de Lie, on a

$$[\underline{G}_\alpha, \underline{G}_\beta] \subset \underline{G}_{\alpha+\beta} .$$

En particulier, si l'ensemble des poids est $\{1,\beta\}$ avec $\beta \neq 2$, alors G est abélien. Donc le premier cas intéressant et le cas de poids $\{1,2\}$. Dans ce cas

$$\underline{G} = \underline{G}_1 \oplus \underline{G}_2 \quad , \quad \underline{G}_2 \supset [G,G] \ ,$$

et $\underline{G}_2 \subset \underline{Z}$ (le centre). On va supposer aussi que $\dim[\underline{G},\underline{G}] = 1$; alors $G = N_{2n+1} \times \mathbb{R}^k$ pour quelques n, k.

Théorème 2 : Soit G un groupe de Lie avec groupe de dilatations ayant poids $\{1,2\}$, tel que $\dim[\underline{G},\underline{G}] = 1$. Soit $P \in \underline{U}$ homogène de degré m, tel que π_P est injectif dans $\mathcal{S}_\pi$ pour chaque représentation unitaire irréductible non triviale π. Alors P est hypoelliptique. De plus, si $Q \in \underline{U}$ est une somme d'opérateurs homogène de degré $< m$, alors $P + Q$ est hypoelliptique avec paramétrix à gauche appartenant à $S^{-m/2}_{1/2,1/2}$.

Preuve du théorème 1 : On va utiliser, au lieu de l'hypoellipticité de P, la propriété plus faible : si $u \in C_b(G)$, l'espace de fonctions continues et bornées sur G, et $Pu = 0$, alors $u \in C^1(G)$. Comme d'habitude, on déduit de cette propriété que pour chaque $X \in \underline{G}$, il existe une constante C telle que si $u \in C_b(G)$ et $Pu = 0$, alors

$$|(Xu)(e)| \leq C_X \sup_G |u| . \tag{2}$$

Supposons π une représentation unitaire et $v \in \mathcal{H}_\pi$ tel que $\pi_P v = 0$. Posons $u(g) = (\pi_g v, v)$. Alors $u \in C_b(G)$. Soit $X \in \underline{G}$. Alors $v \in \mathrm{dom}(\pi_X)$, donc on voit que

$$Xu(g) = \frac{d}{dt}(\pi_g \exp(tX)^v, v)\Big|_{t=o} = (\pi_g \pi_X v, v).$$

Donc $u \in C^1(G)$. Par récurrence, $u \in \mathcal{E}(G)$ et

$$Qu(g) = (\pi_g \pi_Q v, v), \quad Q \in \underline{U} .$$

En particulier, $Pu = 0$. Grâce à l'homogénéité, on a aussi $Pu_\rho = 0$, $u_\rho = u \circ \delta_\rho$. Pour $X \in \underline{G}$, tel que $\delta_\rho X = \rho^\delta X$ avec $\delta > 0$, on a

$$\rho^\delta |(Xu)(e)| = |(Xu_\rho)(e)| \leq C_X \sup_G |u_\rho| = C_X \sup_G |u| .$$

Prenant $\rho \to +\infty$ on obtient $(Xu)(e) = 0$. On peut construire une base de $\underline{G}$ avec des éléments tels que X, et le même raisonnement s'applique aux translatés de u, donc $Xu \equiv 0$, $X \in \underline{G}$, donc u est constante. Alors

$$\|v\|^2 \geq |(\pi_g v, v)| \equiv |(\pi_e v, v)| = \|v\|^2 .$$

Donc $\pi_g v \equiv v$ et si π est irréductible et non triviale, ceci implique $v = 0$.

Preuve du théorème 2 : Considérons d'abord le cas $G = N_{2n+1}$ avec les dilatations et la coordination ci-dessus. Pour $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on a une représentation unitaire scalaire

$$\pi^{\xi,\eta}_{(x,y,z)} = \exp i(x.\xi + y.\eta).$$

Si

$$Q = q(X,Y,Z) = \sum_{|\alpha+\beta|+2k=m} b_{\alpha\beta k} X^{\alpha} Y^{\beta} Z^{k},$$

alors

$$\pi_Q^{\xi,\eta} = q(i\xi, i\eta, 0),$$

un polynôme homogène de degré m. En particulier, puisque $\pi_P^{\xi,\eta} \neq 0$ pour $(\xi,\eta) \neq (0,0)$, on a

$$|\xi|^m + |\eta|^m \leq C|P(i\xi, i\eta, 0)| . \tag{3}$$

En remplaçant P par P^2 ou P*P, on peut supposer que m soit pair. Il suffit à démontrer que pour chaque $Q \in \underline{U}$, homogène de degré $\leq m$, on a

$$\|Qu\| \leq C_Q(\|Pu\| + \|u\|), \quad u \in \mathcal{D}(G).$$

(En effet, on utilise le calcul d'opérateurs pseudodifférentiels avec les fonctions poids

$$\Phi = |\xi| + |\eta + \zeta x| + |\zeta|^{1/2} + 1, \quad \varphi = \Phi(\Phi + |\zeta|)^{-1}).$$

En effet, il suffit à montrer pour Q de degré m justement,

$$\|Qu\| \leq C_Q\|Pu\|, \quad u \in \mathcal{D}(G) ; \tag{4}$$

les normes sont toujours les normes L^2 (mesure de Haar).

Prenons les transformées de Fourier par rapport aux variables y, z. Alors

$$(Qu)^{\wedge}(x,\eta,\zeta) = (Q_{\eta,\zeta}\hat{u})(x,\eta,\zeta),$$

où

$$Q_{\eta,\zeta}v(x) = q(\partial/\partial x, \ i\eta + i\zeta x, \ i\zeta)v(x).$$

Donc il suffit de montrer

$$\|Q_{\eta,\zeta}v\| \leq C_Q\|P_{\eta,\zeta}v\|\,, \qquad v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n_x), \tag{5}$$

pour p.t. $(\eta,\zeta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. On peut supposer $\zeta \neq 0$. Mettons $V_a v(x) = a^{n/2}v(ax)$, $a > 0$. Alors V_a est unitaire dans $L^2(\mathbf{R}^n)$, et grâce à l'homogénéité de Q,

$$V_a^{-1}Q_{\eta,\zeta}V_a = a^m Q_{a^{-1}\eta,a^{-2}\zeta}\,.$$

On peut donc supposer $\zeta = \pm 1$. Mettons $T_s v(x) = v(x-s)$, $x,s \in \mathbf{R}^n$. Alors

$$T_s^{-1}Q_{\eta,\pm 1}T_s = Q_{\eta \pm s,\pm 1}$$

et on peut supposer $\eta = 0$, $\zeta = \pm 1$ dans (5).

Dans ces cas, on prend les fonctions poids dans $T^*(\mathbf{R}^n)$,

$$\Psi(x,\xi) = |\xi| + |x| + 1\,, \quad \Psi(x,\xi) = 1.$$

Grâce à (3), le symbole de $P_\pm = P_{0,\pm 1}$ satisfait à

$$|P_\pm(x,\xi)| \geq C_o(|\xi|^m + |x|^m + 1) \text{ si } |\xi| + |x| \geq C_1\,,$$

où $C_o > 0$. En revanche, le symbole de $Q_\pm = Q_{o,\pm 1}$ satisfait à

$$|q_\pm(x,\xi)| \leq C(|\xi|^m + |x|^m + 1).$$

Donc (voir e.g., [3], § 7), l'inéqualité (5) est satisfaite si $P_\pm$ est injectif dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n_x)$. Mais ceci est vrai par hypothèse, parce que on peut considérer la représentation de G dans $L^2(\mathbf{R}^n_x)$:

$$\pi^\pm_{(x,y,z)}v(s) = \exp i(\pm s.y \pm z)\, v(s+x).$$

Parmi les opérateurs $\pi^\pm_g$ sont toutes les translations et les multiplications par caractères, donc $\pi^\pm$ est irréductible. Aussi

$$\pi^\pm_{X_j} = \partial/\partial X_j\,, \quad \pi^\pm_{Y_j} = \pm iX_j\,, \quad \pi^\pm_Z = \pm i\,,$$

donc $\mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}(\mathbf{R}^n_x)$, et $\pi^\pm_P = P_\pm$.

Enfin, considérons le cas général avec $\dim[\underline{G},\underline{G}] = 1$. Alors $G \approx N_{2n+1} \times \mathbf{R}^k$ et on peut prendre les coordonnées (x,y,z,t), $t = (t',t'') \in \mathbf{R}^k$, tel que

$$\delta_\rho(x,y,z,t) = (\rho x, \rho y, \rho^2 z, \rho t', \rho^2 t'').$$

Comme ci-dessus, on peut montrer que

$$\|Q_{\eta,\zeta,\tau} v\| \leq C_Q \|P_{\eta,\zeta,\tau} v\|, \quad v \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n_x), \tag{6}$$

où Q est homogène de degré m (pair) et

$$Q_{\eta,\zeta,\tau} = q(\partial/\partial x, i(\xi + \zeta x), i\zeta, i\tau).$$

Avec homothéties et translations on réduit le problème au cas $\eta = 0$, $\zeta = \pm 1$, et on peut supposer $\zeta = +1$. Pour chaque $\tau \in \mathbf{R}^k$, fixé, il existe une représentation unitaire de G dans $L^2(\mathbf{R}^n_x)$,

$$\pi^\tau_{(x,y,z,t)} v(s) = \exp i(z + s\cdot y + \tau\cdot t)\, v(s + x),$$

telle que

$$\pi^\tau_Q = Q_\tau = Q_{0,1,\tau}.$$

Alors comme ci-dessus il existe pour chaque τ fixé une constante $C_Q(\tau)$ telle que (6) est vrai pour $(\eta,\zeta,\tau) = (0,1,\tau)$. On voit sans peine que cette constante peut être choisie à varier continuement avec τ. Donc il reste à montrer (6) pour $\eta = 0$, $\zeta = 1$, $|\tau|$ grand. Mais le symbole de P_τ satisfait à

$$|P_\tau(x,\epsilon)| \geq C_o(|x|^m + |\xi|^m + |\tau'|^m + |\tau''|^{m/2} + 1)$$

pour

$$\Psi_\tau = |X| + |\xi| + |\tau'| + |\tau''|^{1/2} + 1 \geq C_1.$$

Alors la construction standard d'une paramétrix pour P_τ dans le cadre des fonctions poids Ψ_τ, $\Psi_\tau = 1$ montre l'inégalité désirée.

Remarques

1. La question d'existence d'une solution fondamentale invariante pour un opérateur sur $N_{2n+1} \times \mathbb{R}^k$, pas forcément hypoelliptique ou homogène a été abordée par Gérard Lion [1].

2. Parmi les nombreuses questions ouvertes est de caractériser les opérateurs hypoelliptiques non homogènes, en généralisant le théorème d'Hörmander pour le cas abélien (coefficients constants), s'agit-il de regarder les prolongements analytiques non unitaires des représentations unitaires ? Un exemple sur N_3 : $P = X + Y^2 - YZ$ n'est pas hypoelliptique, mais c'est injectif sur $\mathcal{S}_\pi$ pour tous ces prolongements non triviaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Lion : Solutions élémentaires d'opérateurs différentiels invariants sur certains groupes nilpotents-Résolubilité de l'équation des ondes sur le groupe de Heisenberg, Preprint.

[2] C. Rockland : Hypoelliptic operators on the Heisenberg group - Representation theoretic criteria, Preprint.

[3] R. Beals : A general calculus of pseudodifferential operators, Duke Math. J. 42 (1975), 1-42.