Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

S. Alinhac

Solution explicite du problème de Cauchy pour un opérateur hyperbolique à caractéristiques non régulières

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 17, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A16_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

SOLUTION EXPLICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR UN OPERATEUR HYPERBOLIQUE A CARACTERISTIQUES NON REGULIERES

par S. ALINHAC

Exposé N° XVII

8 Mars 1977

§ 0. INTRODUCTION

Il s'agit d'écrire, modulo C^∞, la solution du problème de Cauchy pour l'opérateur (dans $\mathbb{R}^3$)

$$P = \partial_t^2 - t^2\partial_x^2 - \partial_y^2 + \Lambda(t,x,y,\partial_x,\partial_y)$$

à l'aide d'intégrales de Fourier, lorsque les données de Cauchy sur $\{t = 0\}$ ont leurs singularités proches du point ($x = 0$, $y = 0$, $\xi = +1$, $\eta = 0$).

L'opérateur est hyperbolique strict en dehors de la variété $\Sigma = \{t = \eta = 0\}$, et le calcul direct permet de préciser les phases et les symboles près de Σ.

Les résultats, plus que les méthodes, sont à rapprocher des travaux de L. Boutet de Monvel et ses élèves sur l'hypoellipticité des opérateurs à caractéristiques doubles.

§ 1. ETUDE D'UN CAS PARTICULIER ; QUELQUES NOTATIONS.

Pour motiver les notations du cas général, étudions l'opérateur $P = \partial_t^2 - t^2\partial_x^2 - \partial_y^2 + \lambda\partial_x$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Il se traite sans difficulté à l'aide d'une transformation de Fourier partielle en (x,y) : posons, quand c'est licite,

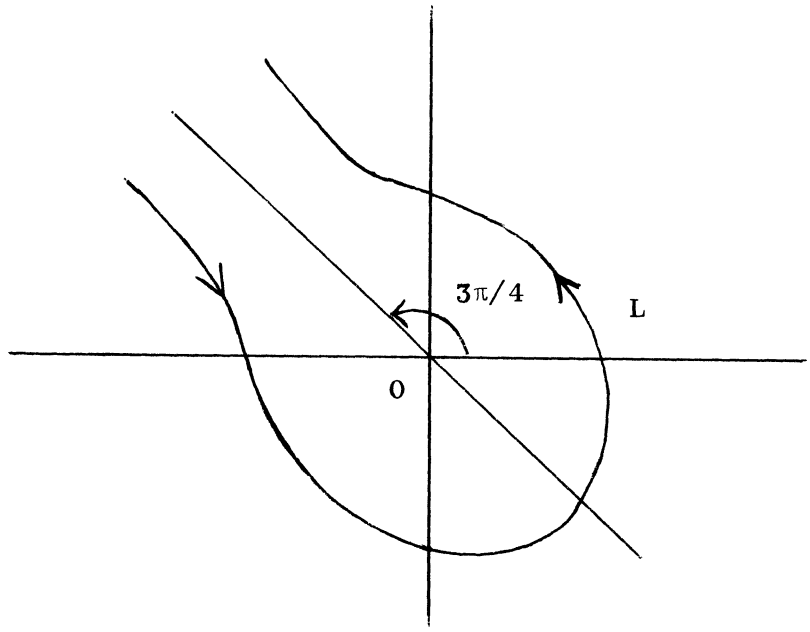
$$T(A) = e^{5i\frac{\pi}{4}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}A}\, 2^{A+1}(\sin \pi A)\, \Gamma\left(\frac{A+1}{2}\right),$$

$$A_\varepsilon = -1/2 - \frac{i\varepsilon}{2}(i\lambda + \eta^2/\xi) \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

$$N(A_\varepsilon) = \frac{1}{T(A_\varepsilon)}\, e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi} \left(\int_L e^{\sqrt{\varepsilon}t\xi^{1/2}z}\, e^{-iz^2/4}\, z^{A_\varepsilon}\, dz\right)$$

$$\left(\text{resp. } \widetilde{N}(A_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\,\xi^{1/2}T(A_\varepsilon+1)}\, e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi} \left(\int_L e^{\sqrt{\varepsilon}\,t\,\xi^{1/2}z}\, e^{-i\,z^2/4}\, z^{A_\varepsilon}\, dz\right)\right),$$

où L désigne le contour complexe suivant :



L'intérêt des fonctions $N(A_\varepsilon)(t,\xi,\eta)$(resp.$\tilde{N}$) est indiqué dans la

Proposition 1 : Si $\mathrm{Re}\lambda \neq \pm 3, \pm 7, \ldots, \pm(4p-1), \ldots$(resp. $\mathrm{Re}\lambda \neq \pm 5, \pm 9, \ldots, \pm(4p+1), \ldots$), alors

i) $P(e^{ix\xi+iy\eta}N(A_\varepsilon)) = 0$ (resp. $P(e^{ix\xi+iy\eta}\tilde{N}(A_\varepsilon)) = 0$).

ii) $N(A_\varepsilon)|_{t=o} = 1$ (resp. $\partial_t \tilde{N}(A_\varepsilon)|_{t=o} = 1$) .

Cette proposition résulte aisément de travaux classiques (par exemple [1], [6] ; voir aussi [2]).
En fait, les solutions $N(A_\pm)$ sont "oscillantes pures" (et par conséquent indépendantes) en un sens que l'on va présicer.

§ 2. CLASSES DE SYMBOLES ET COMPORTEMENT DES $N(A_\pm)$

Posons $\eta/\xi = \omega$, $\theta = \eta\xi^{-1/2}$, $s = t\xi^{1/2}$, $r = \sqrt{s^2+\theta^2}$, $d_\omega = |\omega| + \xi^{-1/2}$, $d_r = \sqrt{t^2+\omega^2} + \xi^{-1/2}$. En suivant L. Boutet de Monvel [3], nous dirons que $a(t,x,y,\xi,\eta)$, fonction C^∞ (pour $t \geq 0$) définie dans un voisinage conique de $(0,0,0,+1,0)$ est un symbole de classe $S^{m,\varkappa,\mu}$. Si, pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,

$$|\partial_{x,y}^{\alpha}\, \partial_t^{\beta}\, \partial_\xi^{\gamma}\, \partial_\eta^{\delta}\, a| \leq C\, \xi^{m-(\gamma+\delta)}\, d_r^{\varkappa-\beta}\, d_\omega^{\mu-\delta}$$

dans les conditions usuelles.

On dira que $a \in S^{m,\mu}_{\omega}$ si on a les majorations

$$|\partial^{\alpha}_{x,y}\,\partial^{\beta}_{t}\,\partial^{\gamma}_{\xi}\,\partial^{\delta}_{\eta}\,a| \le C\,\xi^{m-(\gamma+\delta)}\,d^{\mu-\delta}_{\omega}$$

Grâce à ces notions, on précise le comportement des $N(A_{\pm})$ dans la

Proposition 2 : Si C est une constante > 0 assez grande,

i) pour $|\eta|\xi^{-1/2} \le C$, $N(A_{\varepsilon}) = e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi}\,p_{\varepsilon}$

(resp. $\tilde{N}(A_{\varepsilon}) = e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi}\,\tilde{p}_{\varepsilon}$), et $p_{\varepsilon} \in S^{-\frac{\varepsilon\mathrm{Re}\lambda+1}{4},\,-\frac{\varepsilon\mathrm{Re}\lambda+1}{2},\,0}$

(resp. $\tilde{p}_{\varepsilon} \in S^{-\frac{\varepsilon\mathrm{Re}\lambda+1}{4}-1/2,\,-\frac{\varepsilon\mathrm{Re}\lambda+1}{2},\,0}$)

ii) pour $|\eta|\xi^{-1/2} \ge C$, $N(A_{\varepsilon}) = e^{i\varepsilon\phi}\,q_{\varepsilon}$ (resp. $\tilde{N} = e^{i\varepsilon\phi}\,\tilde{q}_{\varepsilon}$)

et $q_{\varepsilon} \in S^{o,\,-\frac{\varepsilon\mathrm{Re}\lambda+1}{2},\,\frac{\varepsilon\mathrm{Re}\lambda+1}{2}}$ (resp. $\tilde{q}_{\varepsilon} \in S^{-1,\,-\frac{\varepsilon\mathrm{Re}\lambda+1}{2},\,+\frac{\varepsilon\mathrm{Re}\lambda+1}{2}-1}$),

où $\phi(t,\xi,\eta) = \int_{o}^{t}\sqrt{u^2\xi^2+\eta^2}\,du$.

La conjonction des propositions 1 et 2 permet d'élucider la forme de la solution du problème de Cauchy dans le cas particulier envisagé en 1, en admettant que l'indépendance de $N(A_{+})$ et $N(A_{-})$ permette d'obtenir par combinaison ,une solution du noyau de P de traces données. Ce dernier point sera précisé en même temps que le cas général.

§ 3. LE CAS GENERAL

C'est celui où $P = \partial_t^2 - t^2\partial_x^2 - \partial_y^2 + \Lambda(t,x,y,D_x,D_y)$ où $\Lambda \sim \sum_{j\ge o}\Lambda_{1-j/2}$, Λ_h étant un symbole homogène de degré h en (ξ,η), dépendant de façon C^{∞} de t. On note $\lambda = \lambda(x,y) = \frac{1}{i}\Lambda_1(0,x,y,+1,0)$, $\lambda^o = \lambda(0,0)$, $A_{\varepsilon}(x,y) = A_{\varepsilon} = -1/2 - i\frac{\varepsilon}{2}(i\lambda + \eta^2\xi^{-1})$.
La solution du problème apparaît comme une "perturbation" de celle du problème du paragraphe 1 avec $\lambda = \lambda^o$.

Supposons $\mathrm{Re}\,\lambda^o \neq \pm 3, \pm 7, \ldots$ et définissons localement en (x,y) près de (0,0), $N(A_{\varepsilon})$ par la formule du § 1 (resp. $\mathrm{Re}\,\lambda^o \neq \pm 5, \pm 9, \ldots$ et définissons $\tilde{N}(A_{\varepsilon})$). On a alors le

Théorème : i) Les fonctions $N(A_\varepsilon)(t,x,y,\xi,\eta)$ jouissent des propriétés indiquées dans la proposition 2, où l'on doit prendre $\lambda = \lambda^o$, et ajouter $+0$ aux ordres de tous les symboles (on dit que $a \in S^{m+o,K+o,\mu+o}$ si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \mathcal{U}_\varepsilon$ voisinage de (0,0) tel que $a|_{\mathcal{U}_\varepsilon} \in S^{m+\varepsilon,K+\varepsilon,\mu+\varepsilon}$).

ii) Pour toute $\chi \in C_o^\infty(\mathbf{R})$, égale à 1 sur un voisinage de 0 assez grand, il existe

- un symbole $w \in S^{+o,1+o,+o}$
- un symbole $w_1 \in S_\omega^{-1/4(\varepsilon \mathrm{Re}\lambda^o + 1)+o,+o}$, plat sur $t = 0$
- un symbole $w_2 \in S_\omega^{+o,1/2(\varepsilon \mathrm{Re}\lambda^o + 1)+o}$, plat sur $t = \eta = 0$,

nul sur $t = 0$, tels que, en posant

$$E_\varepsilon(t,x,y,\xi,\eta) = N(A_\varepsilon)(1+w) + e^{i\varepsilon \frac{t^2}{2}\xi} w_1 \chi(\theta) + e^{i\varepsilon\phi} w_2 (1-\chi(\theta)) ,$$

$P(e^{ix\xi + iy\eta} E_\varepsilon)$ soient des symboles tangentiels d'ordre $-\infty$, dépendant de façon C^∞ de t.

iii) En notant $\varepsilon'_+(\mathbf{R}^2)$ l'espace des $u \in \varepsilon'(\mathbf{R}^2)$, avec WF(u) contenu dans un voisinage conique assez petit de (0,0,+1,0), définissons $E_\varepsilon = \varepsilon'_+(\mathbf{R}^2) \to C_t^\infty(\mathbf{R}_+, \mathcal{D}'_{x,y}(\Omega))$ par

$$(E_\varepsilon \varphi)(t,x,y) = \int e^{ix\xi + iy\eta} E_\varepsilon(t,x,y,\xi,\eta) \hat{\varphi}(\xi,\eta) d\xi \, d\eta$$

(Ω petit voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^2$; l'intégrale est "bscillante", cf. [5])

Il existe alors des opérateurs pseudo-différentiels tangentiels $\Sigma_\pm$, de symboles $\sigma_\pm \in S_\omega^{+o,+o}$, et M, de symbole $\mu \in S_\omega^{-1/2+0,+0}$, tels que

$$\begin{cases} (E_+\Sigma_+ + E_-\Sigma_-)|_{t=o} = \mathrm{id}, \ \partial_t(E_+\Sigma_+ + E_-\Sigma_-)|_{t=o} = 0 , \\ (E_+ - E_-)M|_{t=o} = 0, \quad , \partial_t(E_+ - E_-)M|_{t=o} = \mathrm{id}. \end{cases}$$

Enfin, lorsque $\mathrm{Re}\lambda^o \neq \pm 5, \pm 9, \ldots$, on obtient un théorème complètement analogue en utilisant $\tilde{N}(A_\varepsilon)$ en place de $N(A_\varepsilon)$. L'intérêt de ce théorème est de montrer :

i) Quelles phases sont "responsables" de la propagation des singularités (près et en dehors de Σ).
ii) Comment les symboles se comportent près de Σ.

On espère, à partir de ce cas particulier, pouvoir aborder l'étude du cas général des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles.
Une conséquence facile est la suivante :

Soit $C_{\pm}$ la relation canonique homogène définie par $(t,x,y,\tau,\xi,\eta)(x',y',\xi',\eta') \in C_{\pm}$ si $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ et (t,x,y,τ,ξ,η) appartient à l'arc de bicaractéristique nulle du symbole $\tau \mp \sqrt{t^2\xi^2 + \eta^2}$ issu de $(0,x',y',\mp|\eta|,\xi,\eta)$. Alors, pour toute $u \in \mathcal{E}'_+(\mathbf{R}^2)$, $WF(E_{\pm} u) \subset C_{\pm} \circ WF(u)$.

§ 4. SCHEMA DE LA CONSTRUCTION

Elle s'effectue essentiellement en deux étapes :

Etape I : on résoud le problème "infiniment près" de la singularité Σ, i.e. on construit des opérateurs "indépendants" $F_{\pm}$ tels que $R_{\pm} = PF_{\pm}$ soient des opérateurs de symboles à décroissance rapide dans des zones $t \leq Cte\ \xi^{-1/2}$, $|\eta| \leq Cte\ \xi^{1/2}$.

Etape II : On résoud le problème "à l'extérieur" des singularités, i.e. on utilise la construction standard "phase-équations de transport" pour obtenir des opérateurs $G_{\pm}$ tels que $PG_{\pm} = R_{\pm}$.

§ 5. ETAPE I

Elle utilise la notion suivante de quasi-homogénéité (q.h.) : $f(t,x,y,\xi,\eta)$ est q.h. de degré k si, pour $\lambda > 0$,

$$f(\lambda^{-1/2}t,x,y,\lambda\xi,\lambda^{1/2}\eta) = \lambda^k f(t,x,y,\xi,\eta).$$

On cherche une solution u de $Pu = 0$ sous la forme $u = e^{ix\xi + iy\eta} v(t,x,y,\xi,\eta)$, et

$$e^{-ix\xi - iy\eta} Pu = P'v = v''_{tt} - t^2\left[-\xi^2 v + 2i\xi v'_x + v''_{xx}\right] - \left[-\eta^2 + 2i\eta v'_y + v''_{yy}\right] +$$

$$+ \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \Lambda^{(\alpha)} D^{\alpha} v \ .$$

On prendra $v = \sum_{k \geq o} v_k$, où v_k est q.h. de degré $-k/2$, en sorte que $P'v = 0$ équivaut formellement à la suite des équations $\{P_o v_o = 0,\ P_o v_1 + P_1 v_o = 0$, etc... où

$$\begin{cases} P_o = \partial_t^2 + t^2\xi^2 + \eta^2 + \Lambda_1(0,x,y,\xi,0), \\ P_1 = -2i\eta\,\partial y + t\,\Lambda_{1,1}(0,x,y,\xi,0) + \eta\,\Lambda_1^1(0,x,y,\xi,0) + \Lambda_{1/2} \\ \text{etc...} \end{cases}$$

Les opérateurs P_j sont obtenus en remplaçant les symboles Λ_h par leurs développements de Taylor (formels) en $t = \eta = 0$, puis en regroupant les termes par degré de q.h., en sorte que P_j est de degré $1 - j/2$.

a) Noyau de P_o

Il a été étudié aux paragraphes 1 et 2 ; on prendra donc $v_o = N(A_\varepsilon)$ (qui est bien q.h. de degré 0), avec $\lambda = \lambda(x,y)$ (voir notations du début du paragraphe 3). La preuve de la proposition 2 du § 2 est assez délicate, et repose sur les résultats du chapitre X de Sibuya [6] .

b) Résolution de $P_o v = w$

Nous utilisons ici les variables (q.h. de degré 0) s et θ (cf. § 2). Observons d'abord qu'appliquer un opérateur P_j, c'est effectuer certaines dérivations en x et y (non en t!), et multiplier par des puissances de t ou des constantes (pour l'équation différentielle P_o).
Dériver $N(A_\varepsilon)$ fait apparaître sous $\int_L$ certaines puissances de log z et modifie le "facteur de normalisation" $T(A_\varepsilon)$. On note :

$$N_k(A_\varepsilon) = \frac{1}{T(A_\varepsilon)}\ e^{i\varepsilon s^2/2} \int_L e^{\sqrt{\varepsilon}\, sz}\ e^{-i\, z^2/4} (\operatorname{Log} z)^k z^{A_\varepsilon}\, dz \ ,$$

et on observe que

$$sN_k(A_\varepsilon) = \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon}} \frac{T(A_\varepsilon+1)}{T(A_\varepsilon)} N_k(A_\varepsilon+1) - \frac{k}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{T(A_\varepsilon-1)}{T(A_\varepsilon)} N_{k-1}(A_\varepsilon-1) - \ldots$$

$$- \frac{A_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{T(A_\varepsilon-1)}{T(A_\varepsilon)} N_k(A_\varepsilon-1).$$

Il est possible d'établir les points techniques suivants :

α) Les intégrales $N_k(A_\varepsilon)$ jouissent des propriétés indiquées dans la proposition 2 pour les $N(A_\varepsilon)$ (avec ici $\lambda = \lambda(0,0)$), à ceci près que l'on doit ajouter + 0 aux ordres de tous les symboles (cf. point i) du théorème § 3).

β) En rappelant la notation $A_\varepsilon = -1/2 - i\frac{\varepsilon}{2}(i\lambda + \theta^2)$, on a pour $|\theta| \geq$ Cte, $\frac{1}{T(A_\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial\lambda} T(A_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} \mathrm{Log}\,|\theta| + \Sigma_o$, où Σ_o désigne un symbole d'ordre 0 en θ.

γ) Avec les notations de β), $\frac{T(A_\varepsilon-1)}{T(A_\varepsilon)}$ est un symbole d'ordre -1 en θ.

Le point crucial de la résolution de $P_o v = w$ est donc de pouvoir résoudre lorsque $w = N_k(A_\varepsilon + \ell)$ ($\ell \in \mathbb{Z}$). C'est l'objet du

<u>Lemme</u> : Soit $E = \partial_s^2 + s^2 + i\lambda + \theta^2$ ($= \xi^{-1} P_o$ dans les variables s, θ) et $w = N_k(A_\varepsilon + \ell)$. L'équation $Ev = w$ admet comme solution particulière la fonction

$$v = \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j k(k-1)\ldots(k-j+1)}{\ell^{j+1}} N_{k-j}(A_\varepsilon+\ell)$$

(si $\ell = 0$, $v = \frac{i}{2(k+1)} N_{k+1}(A_\varepsilon)$).

On note que v est "oscillante pure" comme w, et que son comportement est connu (cf. α) ci-dessus).

Le lemme résulte du fait qu'après le changement de fonctions $v = e^{i\varepsilon s^2/2} u$, l'équation E devient $\partial_s^2 + 2i\varepsilon s\partial_s + \mathrm{Cte}$, laquelle se réduit, par transformation de Laplace le long de L, à une équation du premier ordre pour laquelle il est aisé de choisir des solutions (pour tout détail voir [2]).

Si l'on convient de choisir les v_k $(k \geq 1)$ successifs conformément au lemme, on peut alors établir par récurrence que $v_k = \xi^{-1/2}|\theta|^k \sum_{\ell=-k}^{+k} [N(A_\varepsilon + \ell)]$. On a convenu ici de noter $[N(A_\varepsilon + \ell)]$ une quantité telle que $\Sigma \times N_k(A_\varepsilon + \ell)$, où $k \in \mathbf{N}$ et Σ est un symbole en r ou θ (dépendant C^∞ de x et y) d'ordre $+0$ (on "néglige" de mentionner k conformément au point α) ci-dessus).

La solution (formelle) v de $P'v = 0$ sera écrite sous la forme $v_o(1 + \frac{v_1}{v_o} + \ldots + \frac{v_k}{v_o} + \ldots)$, et on peut montrer que $\frac{v_k}{v_o} \in S^{+o,k+o,+o}$.

c) Passage du "formel" au "vrai"

Il s'effectue en deux temps :

. on remplace la somme $\frac{v_1}{v_o} + \ldots + \frac{v_k}{v_o} + \ldots$ par un symbole $w \in S^{+o,1+o,+o}$ qui lui est asymptotiquement équivalent en ce sens que $\forall N$, $w - \sum_{k<N} \frac{v_k}{v_o} \in S^{+o,N+o,+o}$. Pour une telle construction, voir [3].

. on calcule $P'v_o(1+w)$. Si on note $S^{m,+\infty,\mu} = \bigcap_N S^{m,N,\mu}$, on trouve $P'v_o(1+w) = v_o R$, où $R \in S^{1+o,+\infty,+o}$.

L'étape I est alors terminée, $F_\pm$ étant les opérateurs de noyaux $\int e^{i(x-x')\xi + i(y-y')\eta} N(A_\varepsilon)(1+w)\, d\xi\, d\eta$ (comparer avec les points ii) et iii) du théorème du § 3).

§ 6. ETAPE II

Précisons d'abord qu'un symbole a d'une certaine classe S est dit "plat" sur une variété $\{u = 0\}$ si, $\forall N$, $u^{-N} a \in S$ (par exemple, si $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\varphi = 0$ près de 0, $\varphi = 1$ hors d'un compact, le symbole $\varphi(\eta\, \xi^{-1/2}) \in S^{o,o}_\omega$ n'est pas plat sur $\eta = 0$).

Pour appliquer la méthode standard, il faut "faire sortir" la phase de v_o, comme dans la proposition 2 ; si χ est choisie comme au point ii) du théorème (§ 3), on écrit

$$v_o R = \chi(\theta) v_o R + (1 - \chi(\theta)) v_o R .$$

Analysons chacun des deux termes :

1er terme : Modulo un symbole régularisant, il s'écrit $\chi(\theta)v_o R = e^{i\varepsilon s^2/2}\,\chi(\theta)R_1$, où R_1 est un symbole plat sur $t=0$ de la classe $S^{1-1/4(\varepsilon \mathrm{Re}\,\lambda^o+1)+o,+o}_{\omega}$.

2ème terme : Modulo un symbole régularisant, il s'écrit $(1-\chi(\theta))v_o R = (1-\chi(\theta))e^{i\varepsilon\phi}R_2$, où R_2 est un symbole plat sur $t=\eta=0$ de la classe $S^{1+o,\frac{\varepsilon \mathrm{Re}\lambda^o+1}{2}+0}_{\omega}$.

On cherche donc le noyau de $G_{\pm}$ sous la forme

$$\int e^{i(x-x')\xi+i(y-y')\eta}\left[e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi}\,w_1\chi(\theta) + e^{i\varepsilon\phi}\,w_2(1-\chi(\theta))\right]d\xi\,d\eta$$

où $(2i\varepsilon t\xi\partial_t + \partial_t^2 + i\varepsilon\xi - 2i\xi t^2\partial_x - t^2\partial_x^2 + \eta^2 - 2i\eta\partial_y - \partial_y^2 + \Lambda')w_1 = R_1$,

et $\left[\xi(\varepsilon\sqrt{t^2+\omega^2}\,\partial_t - t^2\partial_x - \omega\partial_y - \frac{i}{2}\Lambda_1(t,x,y,1,\omega)) + \xi^{1/2}(\ldots)+\ldots\right]w_2 = R_2$.

Pour résoudre ces équations, il suffit de pouvoir résoudre l'équation de transport (coefficient de ξ) dans une classe de symboles convenable. Pour le premier terme, c'est aisé, car on a une équation du type de Fuchs avec un second membre plat.
Pour le deuxième terme, on peut réduire l'équation de transport à une équation du type $\sqrt{T^2+\omega^2}\,\partial_T u + Au = f$, avec f plat sur $T=\omega=0$, laquelle se résoud " à la main" (et l'on peut imposer $u|_{T=o} = 0$) .

§ 7. LA QUESTION DES TRACES

. On peut choisir les v_k $(k \geq 1)$ en sorte que $v_k|_{t=o} = 0$, dans l'étape I (il suffit de les modifier par Cte × v_o). Les opérateurs $F_{\pm}$ sont alors "indépendants" avec pour trace (sur $t=0$) l'identité.
. Les "termes complémentaires" de l'étape II sont l'un, plat, l'autre nul sur $t=0$.

Le point iii) du théorème suit alors sans grosses difficultés d'une façon analogue à celle de [2], par exemple.

§ 8. PROPAGATION DES SINGULARITES

Pour la partie de $E_{\pm}$ qui fait intervenir la "phase" $e^{i\varepsilon\frac{t^2}{2}\xi}$ on peut appliquer les théorèmes habituels (cf. par exemple [5]).

Pour la partie du type $e^{i\varepsilon\phi}(1-\chi(\theta))s$ (s symbole), on note que ϕ n'est pas régulière sur le support conique du symbole, mais seulement sur son support.
C'est une situation analogue à celle qu'on rencontre par exemple dans [4], [7]. Il est possible alors d'utiliser la procédure habituelle d'intégrations par parties, à ceci près que les coefficients de l'opérateur L tel que ${}^tL\, e^{i\varepsilon\phi} = e^{i\varepsilon\phi}$ seront des symboles de type (1/2, 1/2) et non des symboles "classiques".

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Abramowitz et I. A. Stegun : Handbook of mathematical functions, Dover Publ., New York, 1965.

[2] S. Alinhac : Parametrix pour un système hyperbolique à multiplicité variable, à paraître in Comm. in P.D.E. 1977).

[3] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators, C.P.A.M. 27, 1974.

[4] Friedlander : The wave front set of the solution of a simple initial boundary value problem with glancing rays, Proc. of the Cambridge phil. Soc. vol. 79, 1976.

[5] L. Hörmander : Fourier Integral operators I, Acta Math. 127, 1971.

[6] Y. Sibuya : Global theory of a second order ordinary differential equation with a polynomial coefficient, North Holland 18.

[7] M. Taylor : Grazing rays and reflection of singularities of solutions to wave equations, C. P. A. M. 29, 1976.