Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. J. Duistermaat

La formule de Kolk et Varadarajan

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 16, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A15_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

LA FORMULE DE KOLK ET VARADARAJAN

par J. J. DUISTERMAAT

Exposé n° XVI

8 Mars 1977

Soit X une variété localement symétrique de courbure négative, compacte et connexe. Alors $X = M/\Gamma$ où M est un espace symétrique et Γ est un sous-groupe discret, co-compact, et sans torsion d'un groupe de Lie G d'isométries de M, opérant transitivement . G est semi-simple, connexe, réel et peut être choisi avec centre fini. Le stabilisateur K dans G d'un point de M est un sous-groupe maximalement compact de G et on peut écrire $M = K\backslash G$, $X = K\backslash G/\Gamma$.

Tout opérateur linéaire continu : $\mathcal{D}'(M) \to C^\infty(M)$ qui commute avec l'action de G sur M est de la forme $Op_M^\varphi : \longmapsto \varphi * f$, où $\varphi \in C_c^\infty(K\backslash G)$ et

$$(\varphi * f)(x) = \int_G \varphi(xy^{-1})\, f(y)dy \ .$$

Ici une fonction sur M est considérée comme une fonction sur G qui est constante sur les classes Kx , $x \in G$. On a $\varphi * f = 0$ pour tout $f \in \mathcal{D}'(K\backslash G)$ si et seulement si $\overline{\varphi}(x) = \int_K \varphi(xk)dk = 0$ pour tout $x \in G$, donc $\varphi \longmapsto Op_M^\varphi$ est un isomorphisme de l'algèbre $C_c^\infty(K\backslash G/K)$ des fonctions $\varphi \in C_c^\infty(G)$ telles que $\varphi(k_1 x k_2) = \varphi(x)$ pour tout $k_1, k_2 \in K$, sur l'algèbre d'opérateurs régularisants et invariants sur M. Les éléments de $C_c^\infty(K\backslash G/K)$ sont appelés les fonctions sphériques (C^∞ et à support compact) sur G; la structure multiplicative dans $C_c^\infty(K\backslash G/K)$ est la convolution. Par continuité l'application $\varphi \longmapsto Op_M^\varphi$ s'étend en un isomorphisme de l'algèbre $\mathcal{E}'(K\backslash G/K)$, * (distributions sphériques sur G à support compact) sur l'algèbre des opérateurs invariants : $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

Lorsque $f \in \mathcal{D}'(M)$ est Γ-invariant, alors $Op_M^\varphi(f)$ est Γ-invariant. Cela signifie que Op_M^φ induit un opérateur continu linéaire Op_X^φ sur X. Le noyau de Schwartz K_X^φ de Op_X^φ s'obtient par la formule

$$K_X^\varphi(x,y) = \left[Op_X^\varphi(\delta_y) \right](x) = \left[Op_M^\varphi(\pi^* \delta_y) \right](x)$$

où π est la projection : $M \to X$. Mais $\pi^* \delta_y = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{y_o \gamma}$ où $y_o \in M$ est tel que $\pi\, y_o = y$, alors

$$(1) \qquad K_X^\varphi(x,y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} K_M^\varphi(x_o, y_o \gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\underline{x}\, \gamma^{-1} \underline{y}^{-1})$$

lorsqu'on écrit $x = K\,\underline{x}\,\Gamma$, $y = K\,\underline{y}\,\Gamma$.
En effet, φ étant donné, la somme sur Γ est finie parce que $\underline{x}\,\gamma^{-1}\underline{y}^{-1}$ quitte le support compact de φ pour la plupart des $\gamma \in \Gamma$. Un opérateur avec noyau de Schwartz C^∞ sur une variété compacte est un opérateur à trace, et la trace est égale à l'intégrale du noyau sur la diagonale. Alors

$$(2) \qquad \mathrm{Tr}\ \mathrm{Op}_X^\varphi = \int_X \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi(\underline{x}\,\gamma^{-1}\underline{x}^{-1})dx = \sum \mathrm{vol}(G_\gamma/\Gamma_\gamma)\ .\ \int_{G/G_\gamma} \varphi(x\,\gamma\,x^{-1})dx\ ,$$

avec un terme dans la somme pour chaque classe de conjugaison dans Γ.
Ici G_γ, resp Γ_γ est le centralisateur de γ dans G, resp. Γ.

D'un autre côté on sait que l'algèbre $C_c^\infty(K\backslash G/K)$, $*$ est commutative et contient les adjoints, alors les Op_X^φ sont simultanément diagonalisables dans le sens qu'il existe une base orthonormale $(e_j)_{j=1,2,\ldots}$ de $L^2(X)$ tel que

$$(*) \qquad \mathrm{Op}_X^\varphi(e_j) = \lambda_j(\varphi)\,e_j \qquad \text{pour tout } j.$$

Ici $\varphi \longmapsto \lambda_j(\varphi)$ est une forme continue linéaire sur $C_c^\infty(K\backslash G/K)$ avec la propriété additionelle que

$$\lambda_j(\varphi * \psi) = \lambda_j(\varphi)\ .\ \lambda_j(\psi) \quad \text{pour } \varphi,\psi \in C_c^\infty(K\backslash G/K),$$

parce que la valeur propre de la composition de deux opérateurs est égale au produit des valeurs propres. (Autrement dit λ_j est un caractère de l'algèbre $C_c^\infty(K\backslash G/K),*$). Parce que la trace est égale à la somme des valeurs propres, on a obtenu maintenant la célèbre <u>formule de traces de Selberg</u>:

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^\infty \lambda_j(\varphi) = \sum_{\substack{\text{classes de} \\ \text{conjugaison de } \Gamma}} \mathrm{vol}(G_\gamma/\Gamma_\gamma)\ .\ \int_{G/G_\gamma} \varphi(x\,\gamma\,x^{-1})dx\ ,$$
$$\varphi \in C_c^\infty(K\backslash G/K)\ ,$$

où les λ_j forment une série de caractères de $C_c^\infty(K\backslash G/K)$, $*$ associé au quotient $X = K\backslash G/\Gamma$. Remarquons que les λ_j s'étendent par continuité à des formes continues linéaires sur $\mathcal{E}'(K\backslash G/K)$ (la topologie faible sur les espaces propres, de dimension finie, est égale à la topologie forte). De plus, les e_j sont C^∞ et on a aussi $(*)$ pour $\varphi \in \mathcal{E}'(K\backslash G/K)$. Par ailleurs

Op_X^φ n'est pas nécessairement à trace si $\varphi \in \mathcal{E}'(K\backslash G/K)$, ce qui est évident par exemple pour le cas de $Op_X^\varphi = Id$. Aussi nous ne poserons pas ici la question de savoir pour quelles fonctions $\varphi \in C^\infty(K\backslash G/K)$ la somme à droite dans la formule de Selberg converge absolument, car le cas trivial avec $\varphi \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$ donne déjà toutes les informations que l'on veut.

L'idée de la formule de Kolk et Varadarajan est de pousser toute la formule de Selberg à un espace vectoriel. Cet espace est le sous-groupe abélien A de G qui figure dans la décomposition d'Iwasawa

$$G = KAN$$

du groupe G, construite comme suit. La semi-simplicité de G veut dire que la forme de Killing B sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est non-dégénérée. L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ maximal sur lequel B est définie négative, alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp$ est complémentaire à $\mathfrak{k}$ et B est définie positive sur $\mathfrak{p}$. Dans $\mathfrak{p}$ on prend un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}$. Les opérateurs ad a : $u \mapsto [a,u] : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ se diagonalisent simultanément pour $a \in \mathfrak{a}$ avec valeurs propres réelles, alors

$$\mathfrak{g} = \dot{\Sigma}^{\oplus}\, \mathfrak{g}_\alpha \quad , \quad \text{ad } a|_{\mathfrak{g}_\alpha} = \alpha(a).\mathrm{Id}|_{\mathfrak{g}_\alpha} \quad , \quad \dim \mathfrak{g}_\alpha \neq 0,$$

où les α, appelées les racines sont éléments de l'espace dual réel $\mathfrak{a}^*$ de $\mathfrak{a}$. Pour un choix arbitraire d'un demi-espace P de $\mathfrak{a}^*$, sans racines $\neq 0$ sur le bord, on obtient que

$$\mathfrak{n} = \sum_{\substack{\alpha \in P \\ \alpha \neq 0}} \mathfrak{g}_\alpha$$

est un sous-algèbre de Lie nilpotente de $\mathfrak{g}$, en vertu de la propriété $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ et la finitude de l'ensemble des racines. On a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

et plus précisément: l'application

$$(k,a,n) \longmapsto k.\exp a.\exp n$$

est un difféomorphisme de $K \times \mathfrak{a} \times \mathfrak{n}$ sur G.

On écrit $A = \exp \mathfrak{a}$, resp. $N = \exp \mathfrak{n}$ pour le groupe de Lie abélien, resp. unipotent correspondant à $\mathfrak{a}$, resp. $\mathfrak{n}$, et par la suite j'identifie $\mathfrak{a}$ avec A par exp.

L'ensemble W des $k \in K$ tel que $k A k^{-1} = A$ est un sous-groupe discret de K, donc fini en vertu de la compacité de K. W est appelé le groupe de Weyl de M et opère sur A par conjugaison. Tous les différents choix des racines positives sont transformés entre eux par l'action duale de W sur A^*. Maintenant on peut introduire la transformation d'Abel (application horosphérique de Gelfand).

$$(4) \qquad (\mathcal{A}\varphi)(a) = e^{\rho(a)} \int_N \varphi(an)\,dn,$$

où $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \text{ racine positive}} \dim \mathfrak{g}_\alpha \cdot \alpha$

est la demie-somme des racines positives. Il est facile de vérifier que $\mathcal{A}$ est un homorphisme de $C_c^\infty(K\backslash G/K)$, dans $C_c^\infty(A)$, (homorphisme pour la convolution) mais le résultat plus fort que nous utiliserons est que $\mathcal{A}$ est en fait un isomorphisme de $C_c^\infty(K\backslash G/K)$, sur l'algèbre $C_c^\infty(A)^W$, des fonctions test qui sont invariantes pour l'action du groupe de Weyl.
Ce théorème est dû à Gangolli [2]; une première version avec les espaces C_c^∞ remplacés par des espaces de Schwartz était donnée par Harish-Chandra [5].

Alors à un caractère λ de $C_c^\infty(K\backslash G/K)$, correspond un caractère $\tilde{\lambda}$ de $C_c^\infty(A)W$, qui s'étend par continuitéen un caractère de $\mathcal{E}'(A)^W$. Restreignant aux $a \in \mathcal{E}'(A)^W$ avec supp $u \subset \{e\}$ et utilisant le fait que tout caractère de l'algèbre des polynômes W-invariants peut s'étendre à un caractère de l'algèbre de tous les polynômes, on obtient que $\tilde{\lambda}$ doit être de la forme

$$(5) \qquad \lambda(\varphi) = \tilde{\lambda}(\mathcal{A}\varphi) = \int_A \mathcal{A}\varphi(a)\, e^{i\mu(a)}\,da,$$

avec $\mu \in A_{\mathbb{C}}^*$, le dual complexe de A. Les $\mu_j \in A_{\mathbb{C}}^*$, (déterminés modulo l'action de W sur $A_{\mathbb{C}}^*$), associés de cette manière aux caractères λ_j, de $C_c^\infty(K\backslash G/K)$, sont maintenant appelés spectre S de l'espace $X = K\backslash G/\Gamma$.

Par ailleurs, pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application $C_c^\infty(A)^W \ni \psi \longmapsto \mathrm{vol}(G_\gamma/\Gamma_\gamma) \cdot \int_{G/G_\gamma} (\mathcal{A}^{-1}\psi)(x\,\gamma\,x^{-1})\,dx$ définit une distribution

T_γ dans A, invariante par l'action de W et la formule de Kolk et Varadarajan peut maintenant s'écrire comme

$$(6) \qquad \sum_{\mu_j \in S} \hat{\psi}(\mu_j) = \sum_{\substack{\text{classes de con-} \\ \text{jugaison de } \Gamma}} T_\gamma(\psi) \ , \ \psi \in C_c^\infty(A)^W$$

où $\hat{\psi}$ est la transformée de Fourier-Laplace de ψ, c'est donc une fonction de Paley-Wiener sur $A_{\mathbb{C}}^*$.

Bien sûr, le vrai travail de Kolk et Varadarajan est la détermination de S et des distributions T_γ.
En principe on obtient une formule explicite pour tous les T_γ et on peut regarder (6) comme une formule explicite pour la transformation de Fourier du spectre, donc comme l'analogue de la formule de Poisson pour les tores.

Propriétés de S. Regardant les $e_j \in C^\infty(X)$ comme fonctions sur la variété compacte G/Γ on peut définir

$$f_j(x) = \int_{G/\Gamma} e_j(x\,y)\ \overline{e_j(y)}\ dy \ , \ x \in G.$$

Il est évident que $f_j \in C^\infty(K\backslash G/K)$, $|f_j(x)| \leq 1$, $f_j(e) = 1$ et que f_j satisfait aux mêmes équations différentielles (pour des opérateurs invariants sur $K\backslash G$) que la fonction ${}^t\mathcal{H}(e^{i\mu_j})$, où $e^{i\mu_j}$ désigne la fonction $a \longmapsto e^{i\mu_j(a)}$ sur A. On obtient que $f_j = {}^t\mathcal{H}(e^{i\mu_j})$, par conséquence ${}^t\mathcal{H}(e^{i\mu_j})$ est bornée. Grâce au théorème de Helgason-Johnson [7] ceci implique que la partie imaginaire $\operatorname{Im}\mu_j$ de μ_j est contenue dans l'enveloppe convexe des points $w^*\rho$, où w parcourt le groupe de Weyl W, dans A. En particulier l'ensemble des $\operatorname{Im}\mu_j$ est borné. On pourrait craindre que les μ_j soient nécessairement réels mais ce n'est pas vrai parceque la fonction constante sur X est une fonction propre avec valeur propre associée au point $\mu = i\rho$ de $A_{\mathbb{C}}^*$; c'est alors un point extrêmalde l'ensemble donné par le théorème de Helgason-Johnson. Les $\mu \in S$ avec $\operatorname{Im}\mu \neq 0$ forment un ensemble appelé spectre complémentaire.

Une autre propriété évidente du spectre est que les valeurs propres de l'adjoint sont égales aux conjuguées complexes des valeurs propres

$$\lambda_j((\mathrm{Op}_X^\varphi)^*) = \overline{\lambda_j(\mathrm{Op}_X^\varphi)}$$

Avec la notation

$$\varphi^*(x) = \overline{\varphi(x^{-1})} ,$$

on a

$$(Op_X^{\varphi})^* = Op_X^{\varphi^*} ,$$

et grâce au facteur $e^{\rho(a)}$ dans la définition de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(\varphi^*) = (\mathcal{A}\varphi)^* .$$

En lisant la définition de (5) de μ_j on obtient que

$$\overline{\int_A \mathcal{A}\varphi(a) e^{i\mu_j(a)} da} = \int_A \overline{\mathcal{A}\varphi(-a)}\, e^{i\mu_j(a)} da$$

pour toute $\varphi \in C_c^\infty(A)^W$, et donc que nécessairement

$$\overline{\mu}_j = w^*\mu_j \quad \text{pour un} \quad w \in W$$

Pour chaque $w \in W$, l'espace

$$V_w = \{\mu \in A_{\mathbb{C}}^* \ ; \ \overline{\mu} = w^*\mu\} \tag{7}$$

est un sous-espace vectoriel réel de $A_{\mathbb{C}}^*$ de dimension réelle égale à $\dim_{\mathbb{R}} A = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} A_{\mathbb{C}}^*$. (Le nombre $r = \dim_{\mathbb{R}} A$ est appelé le rang de l'espace symétrique M). Le spectre S est alors contenu dans l'union de ces espaces V_w, où w parcourt le groupe fini W. Pour $w = id$, $V_w = A^*$ = l'espace dual réel de A. Le spectre complémentaire est alors continu dans l'union des espaces V_w, $w \in W$, $w \neq id$, et est borné dans la direction imaginaire comme décrit dans le théorème de Helgason-Johnson .
(Voir aussi Kostant [9]).

Propriétés des T_γ : Comme les T_γ sont définis par intégration invariante sur les classes de conjugaison de γ, ils ne dépendent que de ces classes de conjugaison .
Les objets naturels transversaux aux classes de conjugaison sont les

sous-groupes de Cartan H de G, définis comme il suit.
Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$ telle que ad h soit semi-simple pour tous $h \in \mathfrak{h}$, et maximal avec ces propriétés. Le sous-groupe de Cartan associé à $\mathfrak{h}$ est le centralisateur H de $\mathfrak{h}$ dans G. C'est un sous-groupe de Lie de G avec algèbre de Lie égale à $\mathfrak{h}$. Tout élément de H est semi-simple, et inversement tout élément semi-simple de G est contenu dans un sous-groupe de Cartan.

A conjugaison près il existe un nombre fini de sous-groupes de Cartan H de sorte que $H = H_I . H_R$, où $H_I \subset K$ et H_R est un sous-espace vectoriel de A. Chaque classe de conjugaison d'un élément régulier de G (pour lequel les classes de conjugaison ont une dimension maximale) ne rencontre qu'un de ces sous-groupes de Cartan et transversalement, (peut-être plusieurs fois). Les classes de conjugaison des autres éléments semi-simples (les élements semi-simples irréguliers) rencontrent plusieurs de ces sous-groupes de Cartan dans leur intersection commune, l'exemple extrémal étant l'élément neutre e qui est dans tous les sous-groupes de Cartan.

Soit maintenant $\gamma \in \Gamma$ un élément régulier, H le sous-groupe de Cartan qui coupe la classe de conjugaison de γ dans l'élément $\tilde{\gamma} = \gamma_I \gamma_R$, $\gamma_I \in H_I$, $\gamma_R \in H_R$. Alors la distribution T_γ dans A est égal à l'intégration sur la variété linéaire $\gamma_R + (H_R)^\perp$ par rapport à une densité lisse qui est une fonction rationnelle en fonctions exponentielles. Ici $(H_R)^\perp$ est le complément orthogonal de H_R dans A par rapport à la forme de Killing, qui définit un produit scalaire sur A.

Pour un élément $\gamma \in \Gamma$ irrégulier (tous les élements de Γ sont semi-simples) on doit approximer γ avec des élements réguliers h pour lesquels les dimensions de H_I sont maximales et alors on a la formule

$$T_\gamma = \lim \tilde{\omega}_\gamma T_h ,$$

où $\tilde{\omega}_\gamma$ est un opérateur différentiel à coefficients constants dans A connu. Donc le support de T_γ est toujours contenu dans $\gamma_R + (H_R)^\perp$ (où H est le groupe de Cartan avec dim H_I maximale, coupant la classe de conjugaison de γ, mais la différentiation $\tilde{\omega}_\gamma$ et aussi le passage à la limite augmente la singularité de la distribution T_γ. Le cas irrégulier extrème est $\gamma = e$, où $T_e = \mathrm{vol}(X).\hat{\beta}$, où β est une fonction analytique à croissance polynomiale (d'ordre n-r, n = dim X, r = rang) sur A, appelée la mesure de Plancherel pour l'espace symétrique M. β est donnée explicitement

par la formule de Gindikin et Karpelevitch [4] comme un produit de fonctions d'une seule variable.

Pour la démonstration des propriétés des distributions T_γ, on utilise une grande partie de l'analyse de Harish-Chandra sur les groupes de Lie semi-simples, en particulier les propriétés détaillées de ces transformations "F_f", voir Harish-Chandra [6], Varadarajan [11].

Applications : La condition que $X = M/\Gamma$ est une variété lisse entraîne que Γ n'a pas d'éléments γ elliptiques, c'est-à-dire avec $\gamma_R = 0$, autres que $\gamma = e$. Parce que le comportement asymptotique de S est déterminé premièrement par la singularité de la transformation de Fourier à l'origine, on déduit de la formule

$$\Sigma \hat{\psi}(\mu_j) = \mathrm{vol}(X) \langle \beta, \hat{\psi} \rangle + \sum_{\substack{\text{classes de con-} \\ \text{jugaison de } \Gamma \neq \{e\}}} T_\gamma(\psi)$$

que S se comporte asymptotiquement comme β. Plus précisément, lorsque U est un ensemble borné ouvert dans A^* avec bord qui n'est pas trop pathologique, on a

$$\#\{j; \mu_j \in tU\} = \mathrm{vol}(X) \cdot \int_{tU} \beta(\lambda) d\lambda + O(t^{n-1}) , \quad t \to \infty ,$$

le terme $\int_{tU} \beta(\lambda) d\lambda$ étant d'ordre t^n. Ceci est une estimation pour la partie réelle de S ; pour le spectre complémentaire on a

$$\#\{j; \mathrm{Im}\, \mu_j \neq 0, \ |\mu_j| \leq t\} = O(t^{n-2+\varepsilon}),$$

Ce terme est d'un ordre inférieur au terme du reste dans l'estimation pour le spectre réel. On peut conjecturer que le spectre complémentaire est <u>fini</u> lorsque β est un polynôme ; c'est le cas où il existe une seule classe de conjugaison des groupes de Cartan.

Le spectre complémentaire est aussi fini dans le cas où le rang $r = 1$ pour une raison plus triviale ; dans ce cas $V_W = A^*$ ou iA^*, et un ensemble discret borné dans iA^* doit être fini. Ces estimations asymptotiques pour S sont des améliorations d'une conjecture de Gel'fand [3].

Par ailleurs, on peut employer la formule (6) pour obtenir des estimations asymptotiques pour Γ en remarquant que dans la formule

$$\sum e^{i\mu_j(\alpha)} = \sum T_\gamma(a)$$

le terme dominant à gauche est égal à $e^{\rho(a)}$. Par exemple, lorsque rang $r = 1$, on obtient facilement de cette manière un comportement asymptotique précis pour les longueurs des géodésiques périodiques sur X. (En général la distance euclidienne de γ_R à l'origine est égal à la longueur de la géodésique périodique qui sur M va d'un point $m \in M$ au point $m\gamma$). Voir Huber [8].

Finalement les opérateurs différentiels invariants sur M, poussés sur X, sont de la forme Op_X^φ, où $\varphi \in \mathcal{E}'(K\backslash G/K)$ à support contenu dans K ; $\operatorname{supp} \check{\mathcal{L}}\varphi \subset \{0\}$ et $\hat{\mathcal{L}}\varphi$ est donc un polynôme p. En effet on obtient une bijection entre ces opérateurs différentiels sur X et tous les polynômes sur A^* invariants par la groupe de Weyl. Par exemple l'opérateur de Laplace Δ sur X correspond au polynôme $p(\xi) = -|\xi|^2 - |\rho|^2$. On peut obtenir l'asymptotique pour le spectre de P par intégration de S sur les hypersurfaces $p = \text{const}$. Par exemple pour $P = \Delta$ on peut obtenir une forme exacte de la formule de Duistermaat-Guillemin [1]. Aussi ceci explique pourquoi dans le cas de rang $r = 1$ l'opérateur $\Delta + |\rho|^2$ est plus facile à analyser que l'opérateur Δ, observation faite dans le cas de $G = SL(2,\mathbb{R})$ par Lax et Phillips [10].

Une annonce de la formule de Kolk et Varadarajan est à paraître dans les comptes-rendus de l'Académie des Sciences. Plus de détails seront publiés dans la thèse de Kolk (Utrecht) et dans des travaux ultérieurs avec Varadarajan.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. J. Duistermaat et V. W. Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, Invent. Math., 29, 1975, p.39-79.

[2] R. Gangolli : On the Plancherel formula and the Paley-Wiener theorem for spherical functions on semi-simple Lie groups, Ann. of Math., 93, 1971, p.150-165.

[3] I. M. Gel'fand : Automorphic functions and the theory of representations, Proc. Int. Congr. of Math., p.74-85, Stockholm, 1962.

[4] S. G. Gindikin et F. I. Karpelevič : Plancherel measure of Riemannian symmetric spaces of non-positive curvature, Doklady Akad. Nauk. SSSR, 145, 1962, p.252-255.

[5] Harish-Chandra : Spherical functions on a semi simple Lie group I, II, Amer. J. Math. 80, 1958, p.241-310, p.553-613.

[6] Harish-Chandra : Harmonic analysis on real reductive groups I. The theory of the constant term, 19, 1975, p.104-204.

[7] S. Helgason et K. Johnson : The bounded spherical functions on symmetric spaces, Advances in Math., 3, 1969, p.586-593.

[8] H. Huber : Zur analytischen Theoric hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen I. Math. Ann., 138, 1959, p.1-26.

[9] B. Kostant : On the existence and irreducibility of certain series of representations, Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1969, p.627-642.

[10] P. D. Lax et R. S. Phillips : Scattering theory for automorphic functions, Princeton University Press, 1976.

[11] V. S. Varadarajan : Harmonic analysis on real reductive groups, Springer Verlag (à paraître).