Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J. Nourrigat

Paramétrixes pour une classe d'opérateurs hypoelliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1976-1977), exp. n° 13, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1976-1977____A12_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 6 - 1 9 7 7

PARAMETRIXES POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS HYPOELLIPTIQUES

J. NOURRIGAT

Exposé n° XIII

8 Février 1977

Nous nous proposons de construire des paramétrixes pour une classe d'opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^n$ dont l'hypoellipticité a été démontrée dans [4] .

§ 1. RAPPEL DES CONDITIONS SUFFISANTES D'HYPOELLIPTICITE

Considérons tout d'abord des opérateurs différentiels dans $\mathbb{R}^2$, à coefficients polynômes, de la forme :

$$L(t,D_x,D_t) = D_t^m + \sum_{\alpha \le m} a_\alpha t^{\ell_\alpha} D_x^\alpha \tag{1}$$

où les a_α sont des nombres et les ℓ_α des entiers ≥ 0. Pour ces opérateurs, il est donné dans [4] une condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité avec régularité maximale, c'est à dire pour que l'on ait :

$$\left.\begin{array}{c} u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \\ \\ Lu \in H^s_{loc}(\mathbb{R}^2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} D_t^m u \in H^s_{loc}(\mathbb{R}^2) \\ \\ t^{\ell_\alpha} D_x^\alpha u \in H^s_{loc}(\mathbb{R}^2) \end{array}\right. \tag{2}$$

ce qui entraîne aussi

$$u \in H^{s+m'}_{loc}(\mathbb{R}^2)$$

où l'on pose

$$m' = m\theta \qquad \theta = \sup_{\alpha \le m} \frac{\alpha}{\ell_\alpha + m} \quad . \tag{3}$$

Rappelons tout d'abord ces conditions sur un exemple correspondant à $m = 2$. Soit :

$$L(t,D_x,D_t) = D_t^2 + t^{2k} D_x^2 + \lambda t^\ell D_x \tag{4}$$

où $\lambda \in C$. Il y a trois cas à distinguer suivant les valeurs de α pour

lesquelles le sup est atteint dans (3).

a) Si $\ell > k-1$, L est toujours hypoelliptique avec régularité maximale.

b) Si $\ell = k-1$, L est hypoelliptique avec régularité maximale si et seulement si l'opérateur différentiel ordinaire

$$L_o(t,\omega,D_t) = D_t^2 + t^{2k}\omega^2 + \lambda t^{\ell}\omega \tag{5}$$

est injectif dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour $\omega = \pm 1$.

c) Si $\ell < k-1$, L est hypoelliptique avec régularité maximale si et seulement si

$$\tau^2 + t^{2k}\xi^2 + \lambda t^{\ell}\xi \neq 0 \quad \text{pour } t \neq 0 \text{ et } (\xi,\tau) \neq (0,0). \tag{6}$$

Dans les cas a) et b) la condition est connue depuis Grushin [5], dans le cas $\ell = 0$ depuis Hörmander [6] et dans le cas c) en général elle a été établie par Bolley-Camus-Helffer [4] et par Menikoff [7].

On peut énoncer un système de deux hypothèses qui sont équivalentes dans les trois cas aux conditions ci-dessus. On définit un opérateur différentiel ordinaire $L_o(t,\omega,D_t)$ pour $\omega = \pm 1$ par :

$$L_o(t,\omega,\tau) = \lim_{\substack{|\xi|\to\infty \\ \xi = |\xi|\omega}} |\xi|^{-m'} L(t|\xi|^{-\theta},\xi,\tau|\xi|^{\theta}) \tag{7}$$

où m' et θ sont définis en (3). Dans les trois cas les conditions ci-dessus sont équivalentes aux suivantes :

(H1) L'opérateur différentiel ordinaire $L_o(t,\omega,D_t)$ est injectif dans $\mathcal{S}(R)$, pour $\omega = \pm 1$.

(H2) Il existe $A > 0$ et $C > 0$ tels que

$$|t||\xi|^{\theta} + |\tau||\xi|^{-\theta} > A \Rightarrow |L(t,\xi,\tau)| \geq c(|\tau|^2 + |t^{2k}\xi^2| + |t^{\ell}\xi|)$$

En effet, dans les cas a) et b) (H2) est toujours vérifiée et dans le cas c) elle est équivalente à (6). Quant à l'opérateur L_o ,

dans le cas a) $L_o(t,\omega,D_t) = D_t^2 + t^{2k}\omega^2$ et (H1) est toujours vérifiée

dans le cas c) $L_o(t,\omega,D_t) = D_t^2 + \lambda t^{\ell}\omega$ et (H1) résulte de (6)

Dans le cas plus général des opérateurs (1), la condition nécessaire et suffisante d'hypoellipticité avec régularité maximale s'énonce de façon analogue :

(H1) L'opérateur différentiel $L_o(t,\omega,D_t)$ défini en (7) est injectif dans $\mathcal{S}(R)$.

(H2) Il existe $A>0$ et $C>0$ tels que :

$$|t||\xi|^{\theta}+|\tau||\xi|^{-\theta} > A \Rightarrow |L(t,\xi,\tau)| \geq c(|\tau|^m + \sum_{\alpha \leq m} |t^{\ell_\alpha}\xi^\alpha|)$$

Cette hypothèse (H2) peut s'énoncer de manière plus explicite dans tous les cas (cf.[4]), mais contentons-nous de le faire sur un exemple :

$$L(t,D_x,D_t) = D_t^4 + a_1 t D_x + a_2 t^8 D_x^2 + a_3 t^{16} D_x^3 + a_4 t^{32} D_x^4 ,$$

où les valeurs numériques des ℓ_α sont choisies telles que le sup soit atteint pour $\alpha = 1$ dans (3), de sorte que $\theta = \frac{1}{5}$. L'hypothèse (H2) s'énonce alors :

$$\tau^2 + a_1 t\xi + a_2 t^8 \xi^2 \neq 0$$

$$\tau^2 + a_2 t^8 \xi^2 + a_3 t^{16}\xi^3 + a_4 t^{32}\xi^4 \neq 0$$

pour $t \neq 0$ et $(\tau,\xi) \neq 0$.

Considérons maintenant des opérateurs plus généraux dans R^n :

$$(8) \qquad L(x,t,D_x,D_t) = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m \\ \alpha|<m}} a_{\alpha j}(x,t) t^{\ell(\alpha,j)} D_x^\alpha D_t^j$$

On pose toujours

$$\theta = \sup_{|\alpha|\leq m} \frac{|\alpha|}{\ell(\alpha,0)+m} \qquad m' = m\theta$$

On fait l'hypothèse de convexité suivante sur les entiers $\ell(\alpha,j)$. Pour tout multi-indice (α,j) il existe deux multi indices $(\alpha_1,0)$ et $(\alpha_2,0)$ et 3 réels ≥ 0 $\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2$ tels que :

$$\lambda_o + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

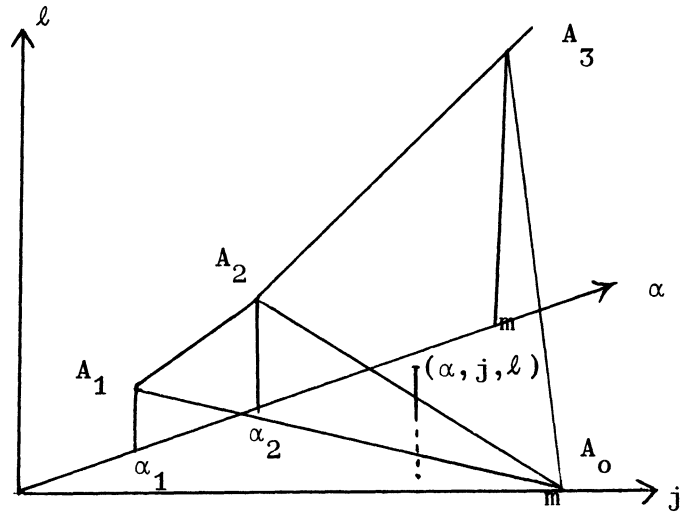
$$|\alpha| \le \lambda_1|\alpha_1| + \lambda_2|\alpha_2| \qquad\qquad j \le \lambda_o m$$

$$\ell(\alpha,j) \ge \lambda_1 \ell(\alpha_1,0) + \lambda_2 \ell(\alpha_2,0)$$

ou encore

$$|t|^{\ell(\alpha,j)}|\xi|^{|\alpha|}|\tau|^{j} \le (|t|^{\ell(\alpha_1,0)}|\xi|^{|\alpha_1|})^{\lambda_1}(|t|^{\ell(\alpha_2,0)}|\xi|^{|\alpha_2|})^{\lambda_2}(|\tau|^{m})^{\lambda_o}.$$

En représentant les points de coordonnées $(\alpha,j,\ell(\alpha,j))$ dans le graphique de Vishik-Grushin, cela signifie qu'il existe une suite croissante $\alpha_1 < \alpha_2 \ldots < \alpha_k = m_*$ telle que, en désignant par A_p le point $(\alpha_p,0,\ell(\alpha_p,0))$ et par A_o le point $(0,m,0)$ tout point $(\alpha,j,\ell(\alpha,j))$ soit au-dessus de l'un des triangles $A_o A_p A_{p+1}$.



On définit toujours un opérateur différentiel ordinaire $L_o(x,t,\omega,D_t)$ pour $\omega \in S^{n-2}(\omega = \frac{\xi}{|\xi|})$ par (7) et l'hypothèse (H1) s'énonce comme précédemment :

(H1) $\qquad \ker L_o(x,t,\omega,D_t) \cap \mathcal{S}(R) = 0 \quad \forall\, x \in R^{n-1}, \quad \forall\, \omega \in S^{n-2}$

et de même pour (H2)

(H2) Il existe $A > 0$ et $C > 0$ tels que

$$|t||\xi|^{\theta} + |\tau||\xi|^{-\theta} > A \Rightarrow |L(x,t,\xi,\tau)| \geq c \sum_{|\alpha|+j\leq m} |t|^{\ell(\alpha,j)}|\xi|^{|\alpha|}|\tau|^{j}.$$

Il est démontré dans [4] que moyennant l'hypothèse de convexité et les hypothèses (H1) et (H2) (cette dernière étant formulée d'une autre manière, plus explicite, dans [4]), l'opérateur L est hypoelliptique avec régularité maximale. Ces conditions sont nécessaires si les $a_{\alpha j}$ sont constants.

Signalons que ces résultats s'étendent à des opérateurs pour lesquels la surface $t = 0$ est caractéristique, comme l'exemple suivant :

$$L(t,D_x,D_t) = t^{\sigma}(D_t^4 + D_x^4) + \lambda D_t^2 + \mu t^2 D_x^2 + \nu D_x \qquad (\sigma > 2)$$

pour lequel les hypothèses (H1) et (H2) s'énoncent de manière analogue en posant

$$\theta = \sup\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{\sigma+2}\right) \qquad m' = 2\theta$$

Voir [4] pour la discussion complète dans tous les cas .

§ 2. ENONCE DU RESULTAT

Soit un opérateur différentiel P sur $\mathbb{R}^n$, de la forme :

$$P(x,t,D_x,D_t) = \sum_{|\alpha|+j\leq m} a_{\alpha j}(x,t)t^{\ell(\alpha,j)}D_x^{\alpha}D_t^{j}, \tag{8}$$

où $a_{\alpha j}(x,t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et $\ell(\alpha,j) \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $m' \in \mathbb{R}$ et $\theta \in]0,1[$ tels que l'opérateur différentiel $p_o(x,s,\omega,D_s)$ dont le symbole est défini pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^{n-1} \times S^{n-2}$ par

$$p_o(x,s,\omega,\sigma) = \lim_{\substack{|\xi|\to\infty \\ \xi=|\xi|\omega}} |\xi|^{-m'} p(x,s|\xi|^{-\theta},\xi,\sigma|\xi|^{\theta}) \tag{9}$$

vérifie pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^{n-1} \times S^{n-2}$:

(H1) $$\ker p_o(x,s,\omega,D_s) \cap \mathcal{S}(R) = 0$$

D'après la forme (8) de P, pour assurer l'existence de la limite dans (9) nous supposerons :

(10) $$m' = \sup_{(\alpha,j)} \{|\alpha|+\theta j - \theta\ell(\alpha,j)\}$$

En désignant par I l'ensemble des multi-indices (α,j) où le sup est atteint dans (10), on a aussi :

(11) $$P_o(x,s,\omega,D_s) = \sum_{(\alpha,j)\in I} a_{\alpha j}(x,0)\, s^{\ell(\alpha,j)}\omega^{\alpha} D_s^j$$

Nous ferons maintenant des hypothèses d'ellipticité plus faibles que (H2). Posons $r = (|\xi|^2+\tau^2)^{1/2}$. On supposera :

(H3) Pour tout compact $K \subset R^n$ il existe $A > 0$ et $C > 0$ tels que :

$$|t|r^{\theta} + |\tau|r^{-\theta} > A \Rightarrow |p(x,t,\xi,\tau)| \geq cr^{m'} \quad \text{si } (x,t) \in K$$

(H4) Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ il existe $A>0$ et $C>0$ tels que, si $|t|r^{\theta} + |\tau|r^{-\theta} > A$ et $(x,t) \in K$ on ait :

$$|\partial_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}\partial_{\xi}^{\gamma}\partial_{\tau}^{\delta} p(x,t,\xi,\tau) \leq C|p(x,t,\xi,\tau)|(|t|+r^{-\theta})^{-\beta} r^{-|\gamma|}(|\tau|+r^{\theta})^{-\delta} .$$

Voici le résultat essentiel :

<u>Théorème 1</u> : Soit P un opérateur différentiel de la forme (8). On suppose qu'il existe $m' \in R$ et $\theta \in]0,1[$ liés par (10) tels que les hypothèses (H1) (H3) et (H4) soient vérifiées. Alors P admet une paramétrixe à gauche E dans $\mathcal{L}^{-m'}_{\theta,\theta}$. De plus le symbole de E vérifie : pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ il existe $C > 0$ tel que, pour r assez grand :

(12) $$|\partial_x^{\alpha}\partial_t^{\beta}\partial_{\xi}^{\gamma}\partial_{\tau}^{\delta} e(x,t,\xi,\tau)| \leq C[|p(x,t,\xi,\tau)|+r^{m'}]^{-1}(|t|+r^{-\theta})^{-\beta} r^{-|\gamma|}(|\tau|+r^{\theta})^{-\delta}$$

Les opérateurs vérifiant l'hypothèse de convexité et l'hypothèse H2 du paragraphe 1 vérifient (H3) et (H4). Mais on ne retrouve pa sous les seules hypothèses du théorème 1 la régularité maximale. D'où :

Corollaire 1 : Si de plus il existe $A>0$ et $C>0$ tels que

$$(13)\ |t|r^{\theta}+|\tau|r^{-\theta}>A \ \Rightarrow\ |p(x,t,\xi,\tau)| \geq c\sum_{|\alpha|+j\leq m}(|t|+r^{-\theta})^{\ell(\alpha,j)}r^{|\alpha|}(|\tau|+r^{\theta})^{j}$$

alors P est hypoelliptique avec régularité maximale.

§ 3. PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION

Elle repose sur l'étude d'une classe d'opérateurs pseudo-différentiels définis à l'aide de fonctions poids Φ et φ au sens de Beals [1] . Soit $\theta \in]0,1[$. Posons

$$(14)\qquad \begin{aligned}\Phi(x,t,\xi,\tau) &= (1+|\tau|^2+r^{2\theta})^{1/2}\\ \varphi(x,t,\xi,\tau) &= (t^2+r^{-2\theta})^{1/2}\end{aligned}$$

Définition : On désigne pour tous $\mu \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$, par $S^{\mu,k}_{\theta}$ l'ensemble des fonctions $a(x,t,\xi,\tau)$ C^{∞} sur $T^*(\mathbf{R}^n)$ telles que pour tout compact $K\subset \mathbf{R}^n$, pour tout multi-indice $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, il existe $C>0$ tel que pour r assez grand et $(x,t) \in K$ on ait :

$$(15)\qquad |D_x^{\alpha}D_t^{\beta}D_{\xi}^{\gamma}D_{\tau}^{\delta}a(x,t,\xi,\tau)| \leq c\,\Phi^{k-\delta}\,\varphi^{k-\beta}\,r^{\mu-|\gamma|}$$

On notera $OPS^{\mu,k}_{\theta}$ l'ensemble des opérateurs $a(x,t,D_x,D_t)+R$, où $a \in S^{\mu,k}_{\theta}$ et R est à noyau C^{∞} .

Exemple : Si P est un opérateur de la forme (8) vérifiant (H3), il existe $k\in \mathbf{N}$ et $\varepsilon>0$ tels que

$$p(x,t,\xi,\tau) \in S^{m',k}_{\theta} \qquad m'=m\theta$$

$$p-p^{o} \in S^{m'-\varepsilon,k}_{\theta}$$

où p^o est défini par (9) ou (11). D'autre part, le symbole $p(x,t,\xi,\tau)^{-1}$,

convenablement tronqué, est dans $S_\theta^{-m',o}$.

On note l'inclusion

$$S_\theta^{\mu,o} \subset S_{\theta,\theta}^{\mu}$$

où $S_{\theta,\theta}^{\mu}$ désigne la classe usuelle de Hörmander [6]. Bien que l'une des hypothèses de Beals [1] ne soit pas vérifiée, on constate que

$$A \in OPS_\theta^{\mu,k} \qquad B \in OPS_\theta^{\mu',k'} \Rightarrow \quad A \circ B \in OPS_\theta^{\mu+\mu',k+k'}$$

De plus, en désignant par a, b et $a \circ b$ les symboles respectifs de A, B et $A \circ B$, on a pour tout N

$$a \circ b - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} (D_{\xi,\tau}^{\alpha} a)(\partial_{x,t}^{\alpha} b) \in S_\theta^{\mu+\mu',k+k'-N} .$$

Les hypothèses H2 et H3 assurent alors l'existence de $E_1 \in S_\theta^{-m',0}$ tel que

$$R_1 = E_1 P - I \in \bigcap_k S_\theta^{o,-k} \tag{16}$$

mais cet opérateur n'est pas régularisant.

L'hypothèse H1 assure que $P_0(x,s,\omega,D_s)$, qui est injectif dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ admet un inverse à gauche, qui est en fait un opérateur pseudo différentiel dont le symbole $e_o(x,s,\omega,\sigma)$ dépend de manière C^∞ de (x,ω) et vérifie

$$|\partial_x^{\alpha} \partial_\omega^{\beta} \partial_\sigma^{\delta} e_o(x,s,\omega,\sigma)| \leq c(1+|s|)^{-\alpha}(1+|\sigma|)^{-\beta}$$

si x décrit un compact de R^{n-1}, ω la sphère unité, et $(s,\sigma) \in \mathbf{R}^2$. Cette classe de symbole a été introduite par Grushin [5] puis généralisée par Boutet de Monvel-Grigis-Helffer [6]. On pose ensuite

$$E_o(x,t,\xi,\tau) = |\xi|^{-m'} e_o(x,t|\xi|^\theta, \frac{\xi}{|\xi|}, \frac{\tau}{|\xi|^\theta}) \tag{17}$$

et le symbole ainsi défini est dans $S_\theta^{-m',o}$.

On construit ensuite la paramétrixe E en 2 étapes, en combinant R_1 et E_o suivant le schéma de Boutet de Monvel [3].

§ 4. GENERALISATIONS

Les méthodes précédentes peuvent s'étendre

1) à des opérateurs du type de Fuchs en t = 0
2) à des opérateurs elliptiques hors d'une surface $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$
3) à des opérateurs quasi-elliptiques hors d'une telle surface

On énonce dans tous ces cas une hypothèse d'ellipticité générale analogue à H2 et une hypothèse d'injectivité d'un opérateur différentiel à coefficients polynômes dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Beals : Duke Math.Journal 42, n°1, mars 1975.

[2] L.Boutet de Monvel : C.P.A.M. 27 (1974) p.585-639.

[3] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer : Astérisque 34-35 (1976).

[4] P. Bolley, J. Camus, B. Helffer : C. R. A. S. t.283 (1976) p.979-982; + exposé aux journées "Equations aus Dérivées Partielles" (Rennes, 1976) à paraître aux séminaires d'analyse fonctionnelle de Rennes.

[5] V. Grushin : Mat. Sbornik 83 (125) 1970 p. 456-473.

[6] L. Hörmander : Amer. Math.Soc. Proc. of Symp. Pure Math.10 (1966) p.138-183.

[7] A. Menikoff : Séminaire Goulaouic-Schwartz (Février 1977)

[8] J. Sjöstrand : Arkiv Math. 12 (1972) p.85-130.

[9] F. Trèves, A. Gilioli : Amer. J. of Math.96, 1974, p.367-385.