Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

N. Lohoué

La dualité $(H^1(\mathbb{R}^n_+), BMO)$ et ses applications, d'après Ch. Feffermann et E. M. Stein

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 6, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1973-1974____A5_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 3 - 1 9 7 4

LA DUALITE $(H^1(\mathbb{R}^n_+), BMO)$ ET SES APPLICATIONS
D'APRES CH. FEFFERMANN ET E. M. STEIN

par N. LOHOUÉ

Exposé N° VI

21 Novembre 1973

§ 0. Le but de l'exposé qui va suivre sera d'essayer de dégager les idées directrices de la théorie des $H^p(\mathbb{R}^n_+)$, telles qu'elles sont exposées dans le récent article de Ch. Fefferman et E. M. Stein [4].

Nous insisterons particulièrement sur la dualité $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, BMO. Faute de temps, nous ne pourrons pas entrer dans les détails des démonstrations ; on pourra consulter l'article sus-cité.

§ 1. L'ESPACE $H^1(\mathbb{R}^n_+)$

1) Dans la théorie classique des classes de Hardy, on travaille essentiellement sur le disque-unité du plan complexe, ou bien, via la transformation conforme évidente sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{P}$.

On considère un nombre réel $q > 0$, une fonction $F : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ et on désigne par $\|F\|_{H^p(\mathbb{P})}$ la quantité :

$$\sup_{y>0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^q dx\right]^{1/q}$$

On note alors $H^q(\mathbb{P})$, l'espace vectoriel complexe des fonctions analytiques $F : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$, telles que $\|F\|_{H^q(\mathbb{P})}$ soit fini.

Le résultat le plus frappant dans la théorie classique qui rentre dans l'optique que nous considérons ici est le suivant :

Théorème 0 : Soit $q > 0$ et soit F une fonction de la classe $H^q(\mathbb{P})$. Alors il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que :

i) $\lim_{y \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy) - f(x)|^q dx = 0$

ii) f est la limite non tangentielle (p.p.) de F.

Dans la théorie classique, on démontre ce théorème en utilisant les produits de Blaschke et donc les propriétés des fonctions analytiques d'une variable complexe.

Pour obtenir une bonne généralisation de la classe $H^q(P)$ à $\mathbb{R}^n_+$, il est important de disposer d'un équivalent de ce résultat.

Nous verrons qu'elle forme prendra le théorème 0, dans $\mathbb{R}^n_+$; contentons-nous, pour le moment d'en déduire quelques conséquences.

2) Si $q \geq 1$, le théorème dit qu'à toute fonction $F = U + iV$ de $H^q(P)$, on peut associer une fonction $f = u_o + iv_o$ sur la droite ; il est facile de s'apercevoir, car F est analytique, que $V_o = H * U_o$, où H est la transformation de Hilbert.

Réciproquement, à toute fonction $f = u_o + iv_o$. $V_o = H * U_o$, qui est dans $L^q(\mathbb{R})$ $(q \geq 1)$, on peut associer la fonction F :

$$F(x+iy) = f * P_y(x) \qquad \text{où} \quad P_y(x) = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{qui}$$

est dans la classe $H^q(P)$.

La classe $H^q(P)$ s'identifie, pour $q \geq 1$, à la classe des fonctions sur $\mathbb{R}$ limites au bord des fonctions de $H^q(P)$.

En dimension n, nous adopterons les définitions suivantes ;

3) <u>Définitions</u> : Posons $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$; le point générique de cet espace est (x,y). Soit $U_j : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq n$, $n+1$ fonctions harmoniques. On dit que la fonction $F = (U_o, \ldots, U_n)$ satisfait l'équation de Cauchy-Riemann généralisé si :

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad \text{ici, on a posé } x_o = y$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

La fonction $F = (U_o, \ldots, U_n)$ est dans la classe $H^+(\mathbb{R}^n_+)$ $p > \frac{n-1}{n}$, si de plus on a :

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|^p dx < \infty \quad .$$

Le théorème 0 se généralise bien dans ce cadre :

Théorème 1 : Soit $F = (U_o,\dots,U_n)$ une fonction de la classe $H^p(\mathbb{R}^n_+)$, alors il existe une fonction $f = U^o_o,\dots,U^o_n)$, $U^o_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, telle que :

i) $\lim_{y\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y) - f(x)|^p dx = 0$

ii) f est la limte non-tangentielle, p.p, de F.

Remarque : Lorsque $p \leq \frac{n-1}{n}$, nous n'avons pas défini de classe $H^p(\mathbb{R}^n_+)$. On peut en donner une définition, qui est malheureusement un peu plus compliquée (voir [4]). Le théorème 1 est lui-même une conséquence facile de trois résultats suivants, qu'on trouvera dans [5].

Théorème 2 : Soit $F = (U_o,\dots,U_n)$ une solution de l'équation de Cauchy-Riemann généralisée ; pour tout $q \geq \frac{n-1}{n}$, $|F|^q$ est une fonction sous-harmonique.

Théorème 3 : Soit $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^+$, une fonction sous-harmonique. Supposons qu'il existe un nombre réel $p > 1$, tel que :

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}^n} |U(x,y)|^p dx = C < \infty .$$

Alors il existe une fonction g de $L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que :

i) $\|g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C$

ii) $U(x,y) \leq g * P_y(x)$, $\left(P_y(x) = \dfrac{C_n y}{[|x|^2 + y^2]^{\frac{n+1}{2}}}\right.$ où C_n est une constante de normalisation).

Théorème 4 : Soit $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique ; U admet des limites non-tangentielles, presque sur $\mathbb{R}^n$, si et seulement si U est non-tangentiellement bornée presque partout sur $\mathbb{R}^n$.

La preuve du théorème 1 se fait alors comme suit :

Soit $F = (U_o,\dots,U_n)$ dans $H^p(\mathbb{R}^n_+)$, $p > \frac{n-1}{n}$; d'après le théorème 2, $|F|^{\frac{n-1}{n}}$ est une fonction sous-harmonique ; d'une part, puisque.

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}^n} |F|^p(x,y)\,dx < C,$$

le théorème 2, prouve l'existence d'une fonction g dans $L^r(\mathbb{R}^n)$ $r = \frac{pn}{n-1} > 1$ telle que

$$|U_j(x,y)| \leq A\ g * P_y(x).$$

Il est alors facile de voir que chaque U_j est non tangentiellement bornée presque partout, d'où les conclusions du théorème, grâce au théorème 4.

4) <u>Intéressons-nous au cas où $p \geq 1$</u>. Notons R_j, l'opérateur de convolution avec la distribution tempérée V.P. $\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$, dont on sait [5] qu'il se prolonge en un opérateur de convolution sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$.

Il est encore facile de voir que si F est dans $H^p(\mathbb{R}^n_+)$ pour $p \geq 1$. Les valeurs au bord $\{U^o_j \quad 1 \leq j \leq n\}$ sont données par :

$$U^o_j = R_j * U^o_o ,$$

On voit aussi qu'à tout système $(U^o_o, R_1 * U^o_o, \dots, R_n * U^o_o)$ de fonctions de $L^p(\mathbb{R}^n)$ $p \geq 1$ correspond une fonction $F = (U_o,\dots,U_n)$ de $H^p(\mathbb{R}^n_+)$ où $U_j = R_j * U^o_o * P_y(x)$. En particulier on peut définir $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, comme le sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^n)$ des fonctions f telles que $R_j * f$ soit dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, pour chaque j ; la norme étant :

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)} = \|f\|_1 + \sum_{i=1}^{n} \|R_j * f\|_1$$

5) Toutes les démonstrations des résultats énoncés dans cette partie se trouvent dans [5].

§ 2. QU'EST-CE QUE BMO

1) **Définitions** : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable ; soit

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x)\,dx \quad \text{où } Q \text{ est un cube dans } \mathbb{R}^n;$$

on pose :

$$\|f\|_* = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|\,dx$$

et on note BMO $= \{f,\ \|f\|_* < \infty\}$.

Si l'on identifie deux fonctions de BMO, qui diffèrent d'une constante, munie de la norme précédente, BMO est un espace de Banach.

2) **Remarques** :

a) On voit facilement que $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset$ BMO ; mais la fonction, un peu plus pathologique $\operatorname{Log}|x|$ est dans BMO.

b) BMO est un cas limite des classes de Lipschitz $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$. En effet, on peut montrer qu'une fonction f est dans la classe $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \int_Q |f(x) - f_Q|\,dx < \infty .$$

c) Duren , Shields et Romberg [1] avaient obtenu la représentation suivante des formes linéaires sur $H^q(\mathbb{P})$: $0 < q < 1$:

Toute forme linéaire Φ sur $H^q(\mathbb{P})$ s'écrit :

$$\Phi(F) = \lim_{y \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x+iy) \quad (x)\,dx \quad \text{où } \Phi \in \Lambda_{\frac{1}{p}-1}(\mathbb{R})$$

3) **Quelques propriétés de BMO**

a) Si f est dans BMO, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f_Q|}{1 + |x|^{n+1}}\,dx < \infty$$

(Q est le cube unité).

b) <u>Théorème</u> : (John-Nirenberg) [voir 3] : Soit f une fonction de BMO, alors :

$$\operatorname{mes}\{x \in Q,\ |f(x) - f_Q| > \alpha\} \leq e^{-c\,\alpha/\|f\|_*}$$

où c est une constante absolue.

Ce résultat permet alors de prouver :

c) Soit Φ une fonction de BMO, pour tout cube Q de hauteur h, dans $\mathbb{R}^n_+$, basé sur $\mathbb{R}^n$,

$$\int_Q t\,|\nabla\Phi * P_t|^2(x)\,dx\,dt \leq C(\Phi)\,h^n$$

$C(\Phi)$ est une constante qui ne dépend que de Φ.

d) Soit K une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et soit $0 \leq \theta < 1$;

i) Si $\theta = 0$, on suppose que :

$$\sup_y \int_{|x| > 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\,dx < B < \infty$$

et

$$|\hat{K}(\xi)| < B.$$

ii) Si $0 < \theta < 1$, on suppose que K est à support dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et que :

$$\sup_y \int_{|x|>2|y|^{1-\theta}} |K(x-y) - K(x)|\,dx < B < \infty$$

$$|\hat{K}(\xi)| \leq B[1 + |\xi|]^{-\frac{n\theta}{2}}$$

alors $\|K * f\|_{BMO} \leq C(B)\,\|f\|_\infty$ pour toute $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

On voit ainsi que si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $R_j * f \in BMO$.

Le résultat fondamental sur BMO est qu'il est l'espace dual de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, plus précisément on a le :

§ 3. THEOREME

Il existe un sous-espace dense $H^1_o(\mathbb{R}^n_+)$ de $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ tel que :
i) pour toute forme linéaire continu F sur $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, il existe une fonction Φ_F de BMO qui vérifie la relation suivante sur $H^1_o(\mathbb{R}^n_+)$:

$$\langle F,f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_F(x)\; f(x)\, dx \quad .$$

ii) Si Φ est dans BMO, l'application : $f \to \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\, f(x) dx$ définie à priori sur $H^1_o(\mathbb{R}^n)$, se prolonge en une forme linéaire continue sur $H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

Idée de la preuve du théorème :

La démonstration de i) découle du théorème de Hahn-Banach et de la propriété II.3.d. des transformations de Riesz ; le résultat le plus profond est la seconde assertion.

Il s'agit ici d'estimer, pour f une très bonne fonction,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) f(x) dx = 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} y\, \Phi * P_y(x) f * P_y(x) dxdy.$$

On vérifie que la valeur absolue du second membre ne dépasse pas $A \,||\Phi||_* \,||f||_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$, grâce à la propriété II.3.c de Φ.

On pourra consulter les détails des démonstrations dans [4].

Une des conséquences les plus frappantes de ce théorème est le :

Théorème : Soit $B = \{ Z \in \mathbb{C},\ 0 \le \mathrm{Re} Z \le 1\}$; soit $F : B \to \mathcal{L} L^2(\mathbb{R}^n)$ une application fortement continue sur B, analytique à l'intérieur et bornée ; on suppose qu'il existe deux constantes M_0 et M_1 telles que :

i) $\sup\limits_{-\infty<y<\infty} \|T_{iy}f\|_1 \leq M_o \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^n_+)}$, $\forall f \in L^2 \cap H^1$.

ii) $\sup\limits_{-\infty<y<\infty} \|T_{1+iy} f\|_2 \leq M_1 \|f\|_2$.

alors pour toute $f \in L^p \cap L^2$ $1/p = 1 - \frac{t}{2}$, $0 < t < 1$,

$$\|T_t(f)\|_p \leq M_t \|f\|_p,$$

M_t étant une constante qui ne dépend que de t.

Pour prouver ce théorème, on est ramené grâce à la dualité à prouver le :

<u>Théorème</u> : Les notations sont les mêmes qu'à l'énoncé précédent, mais on suppose qu'il existe deux constantes M_o et M_1 telles que :

i) $\sup\limits_{-\infty<y<\infty} \|T_{iy}(f)\|_{BMO} \leq M_o \|f\|_\infty$, si $f \in L^\infty \cap BMO$.

ii) $\sup\limits_{-\infty<y<\infty} \|T_{1+iy}(f)\|_2 \leq M_1 \|f\|_2$ si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

alors $\|T_t(f)\|_{p'} \leq M_t \|f\|_{p'}$, si $f \in L^2 \cap L^{p'}$, $(1/p + 1/p' = 1)$.
Le preuve de ce résultat exige quand même des nouvelles idées. Comme corollaire, on peut prouver le :

<u>Théorème</u> : Soit m un mulitplicateur de $\mathfrak{F} H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Supposons que $|m(\xi)| \leq A|\xi|^{-\delta}$, $\delta > 0$. Alors $|\xi|^\gamma m(\xi)$ est un multiplicateur de $\mathfrak{F} L^p(\mathbb{R}^n)$, pour tout p tel que : $|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}| \leq \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2\delta}$, $\gamma \geq 0$.

On voit ainsi, que si Σ_{n-1} est la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$ et si σ est la masse uniforme répartie sur Σ_{n-1} , pour $n \geq 4$ et $p = \frac{n-1}{n-2}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}$ est un convoluteur de $L^p(\mathbb{R}^n)$, ce qui résoud une question posée par P. Eymard [2]

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. L. Duren, B. W. Romberg and A. L. Shields : Linear functionals on H^p spaces with $0 < p < 1$. J. Reine Angew. Maths. 238, 1969, 32-60.

[2] P. Eymard : Algèbres A_p et convolutions de L^p, Séminaire N. Bourbaki, 367, 1969/70.

[3] F. John and L. Nirenberg : On functions of bounded mean oscillation, Communication, Pure, App. Maths. 14 1961, 415-426.

[4] Ch. Fefferman and E. M. Stein : H^p spaces of several variables. Acta Mathematica 129, 1972, 137-193.

[5] E. M. Stein and G. Weiss : On the theory of harmonic functions of several variables I. The theory of H^p spaces. Acta Mathematica 103, 1960, 25-62.
Introduction to Fourier Analysis on euclidean spaces, Princeton, 1971.