B. Malgrange

Sur les points singuliers des équations différentielles (suite)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. nº 21, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A21_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 1 - 1 9 7 2

SUR LES POINTS SINGULIERS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

(Suite)

par B. MALGRANGE

Exposé N° XXI   15 Mars 1972

§ 5. IRREGULARITE D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL FORMEL

Soit $D = x^{k+1}\frac{d}{dx} - M$, avec $M \in \mathrm{End}(\hat{K}^m)$ $k \in \mathbb{Z}$; on va définir l'irrégularité de D par une adaptation des calculs des § 1 - 3. Tout d abord on se ramène à k = 0 en posant pour $l \in \mathbb{Z}$: $i(x^l D) = i(D)$. Dans toute la suite du paragraphe, on supposera donc k = 0.

Rappelons qu'on appelle réseau dans $\hat{K}^m$ un sous-$\hat{\mathcal{O}}$-module E de type fini tel qu'on ait $E \underset{\hat{\mathcal{O}}}{\otimes} \hat{K} = \hat{K}^m$; il est connu qu un tel E est libre sur $\hat{\mathcal{O}}$, donc est de la forme $A\hat{\mathcal{O}}^m$, avec $A \in Gl(m,\hat{K})$ et réciproquement. Si l'on a deux réseaux $E \subset E_1$, il existe $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $x^k E_1 \subset E$; on en déduit immédiatement que E_1/E est de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Proposition 5.1 : Soient E et E_1 deux réseaux vérifiant $DE \subset E_1$. Alors l'application $D : E \to E_1$ est à indice.
Dans la suite, cet indice sera noté $\chi(D;E,E_1)$.

Démonstration : Supposons d'abord la proposition démontrée pour un couple particulier (E,E_1), et démontrons-là pour un autre couple (E',E_1'). Prenons un troisième couple (E'',E_1'') vérifiant $E'' \supset E \cup E'$, $E_1'' \supset E_1 \cup E_1'$. $DE'' \subset E_1''$.

Considérons la suite exacte de morphismes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & E & \to & E'' & \to & E''/E & \to & 0 \\ & & \downarrow D & & \downarrow D & & \downarrow D & & \\ 0 & \to & E_1 & \to & E_1'' & \to & E_1''/E_1 & \to & 0 \end{array}$$

La première flèche verticale est à indice par hypothèse, et la troisième l'est aussi puisqu elle va d'un espace de dimension finie dans un autre. Par suite la seconde est à indice; de plus, on a

(5.2) $$\chi(D;E'',E''_1) = \chi(D;E,E_1) + \dim E''/E - \dim E''_1/E_1$$

On opère ensuite de même avec les couples (E',E'_1) et (E'',E''_1).

Reste à trouver un couple particulier (E,E_1) tel que $D : E \to E_1$ soit à indice; pour cela, en utilisant le théorème (3.1) (qui est vrai aussi pour $\hat{K}$ au lieu de K), on se ramène au cas où M a la forme suivante

(5.3) $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ \lambda_o & \cdots & \lambda_{m-2} & \lambda_{m-1} \end{pmatrix}$$

Posons comme au paragraphe 3, $\Delta = \partial^m - \lambda_{m-1}\,\partial^{m-1} - \dots - \lambda_o$, avec $\partial = x\frac{d}{dx}$; posons encore $i = i(\Delta) = \sup(0, \sup - v(\lambda_p))$ et prenons $E = \hat{\mathcal{O}}^m$, $E_1 = \hat{\mathcal{O}}^{m-1} \oplus x^{-i}\hat{\mathcal{O}}$; les raisonnements des § 1 - 3 montrent que l'application $D : E \to E_1$ a un noyau (resp. un conoyau) isomorphe au noyau (resp. ou conoyau) de l'application $\Delta : \hat{\mathcal{O}} \to x^{-i}\hat{\mathcal{O}}$, et que cette dernière application est d'indice nul. D'où la proposition.

Considérons maintenant tous les couples de réseaux (E,E_1) avec $E \subset E_1$, $DE \subset E_1$; je dis que le nombre $\chi(D;E,E_1) + \dim E_1/E$ est indépendant du couple (E,E_1). Pour établir ce résultat, il suffit de raisonner comme à la proposition précédente, et d'utiliser 5.2. Cela justifie la définition suivante :

<u>Définition 5.3</u> : <u>On appelle irrégularité de</u> D <u>le nombre</u> $\chi(D:E,E_1) + \dim E_1/E$. E et E_1 <u>étant deux réseaux vérifiant</u> $E \subset E_1$, $DE \subset E_1$.

Le calcul fait à la fin de la proposition précédente, montre immédiatement que si M est de la forme 5.3, on a, comme en 3.2.

$$(5.4) \qquad i(D) = \sup(0, \sup - v(\lambda_p))$$

Par conséquent, notre définition coïncide dans le cas analytique avec celle du § 3; et l on a encore $i(D) \geq 0$.

On définit encore les points singuliers réguliers comme au § 3, avec $\hat{K}$ au lieu de K (il est équivalent de dire qu'il existe un réseau E tel qu'on ait $DE \subset E$). La proposition suivante se démontre alors comme 3.4.

<u>Proposition 5.5</u> : <u>Pour que 0 soit un point singulier régulier, il faut et il suffit qu'on ait</u> $i(D) = 0$.

<u>Proposition 5.6</u> : <u>Si l'on a</u> $M = \sum_{-k}^{+\infty} M_p x^p$ $(k \geq 1)$, <u>on a</u> $i(D) \leq km$; <u>pour qu'on ait</u> $i(D) = km$, <u>il faut et il suffit que</u> M_{-k} <u>soit inversible</u>.

Pour démontrer cette proposition, nous allons appliquer la définition 5.3, avec $E = \hat{\mathcal{O}}^m$ $E_1 = x^{-k}\hat{\mathcal{O}}^m$; en remplacant D par $x^k D$, il revient au même de démontrer l'assertion suivante :
L'indice de l'application $x^k D : \hat{\mathcal{O}}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m$ est ≤ 0; cet indice est nul si et seulement si M_{-k} est inversible.

Supposons d'abord M_{-k} inversible; pour tout monôme Ax^p, $A \in \mathbb{C}^m$, on a $(x^k D)(Ax^p) = M_{-k}Ax^p$ +(termes d'ordre $\geq p + 1$); donc, de proche en proche, on voit que $x^k D : \hat{\mathcal{O}}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m$ est bijectif, donc d'indice nul.

Dans le cas général, prenons un p entier ≥ 0; les arguments de suite exacte déjà utilisés en 5.1 montrent que l'application précédente a même indice que

$$x^k D : \hat{\mathfrak{m}}^p(\hat{\mathcal{O}}^m) \to \hat{\mathfrak{m}}^p(\hat{\mathcal{O}}^m) \qquad (\hat{\mathfrak{m}}, \text{ l'idéal maximal de } \hat{\mathcal{O}}).$$

Cette dernière application est injective pour p assez grand, puisque $\ker(x^k D, \hat{\mathcal{O}}^m)$ est de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Donc son indice est ≤ 0, et il est nul si et seulement si l'application est surjective. Dans ce dernier cas, par passage au quotient, l'application $x^k D$ de

$\hat{\mathfrak{m}}^p(\hat{\mathcal{O}}^m)/\hat{\mathfrak{m}}^{p+1}(\hat{\mathcal{O}}^m)$ dans lui-même sera encore surjective; or dans la base évidente la matrice de cette application est précisément M_{-k}; donc M_{-k} doit être surjective, donc inversible. D'où la proposition.

Signalons pour terminer, sans démonstration, une autre manière de définir $i(D)$, due à Gérard et Levelt [1]. On prend un réseau E et on forme la suite de réseaux E_p définie par $E_o = E, \ldots E_p = E_{p-1} \oplus DE_{p-1}$ (le fait qu'on obtienne bien ainsi deux réseaux résulte facilement de la formule $D(\varphi F) = \varphi DF + (\partial\varphi)F$, $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}$); posons ensuite $\overline{E}_p = E_p/E_{p-1}$. L'application D induit une application surjective $\overline{D} : \overline{E}_p \to \overline{E}_{p+1}$, donc $\dim_{\mathbb{C}} \overline{E}_p$ est décroissante, et indépendante de p pour p assez grand. On démontre que cette dimension ne dépend pas non plus de E, et qu'elle est précisément égale à $i(D)$.

Supposons en particulier que 0 soit un point singulier régulier: on aura alors $\overline{E}_p = 0$ pour p assez grand; en fait, on démontre même qu'on a nécessairement, quel que soit E : $\overline{E}_m = 0$, donc $DE_{m-1} \subset E_{m-1}$; ceci donne un critère simple pour reconnaître effectivement si l'on est dans le cas d'un point singulier régulier (le seul autre critère connu, pour autant que je sache est dû à Moser [1]).

§ 6. POINTS SINGULIERS REGULIERS

Ce paragraphe est en grande partie composé de rappels, empruntés à Wasow [1].

Traitons d'abord le cas formel; soit $D = x\frac{d}{dx} - M$, avec,

$M \in \mathrm{End}\,(\hat{\mathcal{O}}^m)$ (i.e. $M \in \mathrm{End}\,(\hat{K}^m)$, sans pôle).

Proposition 6.1 : Supposons que deux valeurs propres distinctes de $M(0)$ ne diffèrent jamais d'un entier. Il existe alors un et un seul $A \in \mathrm{End}(\hat{\mathcal{O}}^m)$. avec $A(0) = I$ tel que la transformation $F = AG$ transforme D en $D' = x\frac{d}{dx} - M(0)$.

Posons en effet $M = \sum_0^\infty M_p x^p$ $A = \sum_0^\infty A_p x^p$, avec $A_o = I$; on doit résoudre l'équation

$$x\frac{dA}{dx} = MA - AM_o$$

en égalant les coefficients de x^p dans les deux membres, on trouve d'abord $M_oA_o - A_oM_o = 0$ qui est vérifié, et ensuite, pour $p \geq 1$

$$(pI - M_o)A_p + A_pN_o = \Phi(A_o, \ldots A_{p-1}; M_o, \ldots, M_p)$$

On pourra résoudre ces équations par récurrence, d'une manière et d'une seule, en vertu du lemme suivant, qu'on laisse au lecteur à titre d'exercice.

Lemme 6.2 : Soient $P \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^p$ et $Q \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^q$ donnés; pour que l'équation $PX - XQ = Y$, avec $X, Y \in \mathrm{End}\,(\mathbb{C}^q, \mathbb{C}^p)$ ait une solution X et une seule quelque soit Y il faut et il suffit que P et Q n'aient pas de valeur propre commune.

La proposition résulte immédiatement de là. Remarquons aussi que l'opérateur différentiel $A \mapsto x\frac{dA}{dx} - M\,A - A\,M_o$ a un point singulier régulier en 0; par suite, en vertu des théorèmes de comparaison (ou d'un résultat classique, dans ce cas particulier), si M est convergente, A sera aussi convergente.

Montrons ensuite comment on peut ramener le cas général au cas où $M(0)$ satisfait les hypothèses de la proposition 6.1; soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$

les valeurs propres distinctes de M_o; il suffit de montrer qu'on peut faire une transformation $A \in Gl(m,\hat{K})$ telle que $N = A^{-1}MA - xA^{-1}\frac{dA}{dx}$ soit sans pôle et ait comme valeurs propres $(\lambda_1 - 1), \lambda_2, \ldots, \lambda_p$: en appliquant par récurrence ce procédé, on amènera les valeurs propres de $M(0)$ qui diffèrent d'un entier à être égales.

Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer qu'on a $M(0) = \begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix}$, avec P et Q triangulaires inférieures, P ayant pour valeurs propres $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$, et Q ayant l'unique valeur propre λ_1; soient p et q respectivement l'ordre de P et l'ordre de Q; on prend avec des notations évidentes

$$A = \begin{pmatrix} I_p & O \\ O & xI_q \end{pmatrix}.$$

En posant $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on trouve $N(0) = \begin{pmatrix} P & O \\ \gamma & Q-I \end{pmatrix}$; cette matrice est encore triangulaire inférieure, et a visiblement les valeurs propres cherchées; d'où le résultat.

Passons maintenant au cas $\mathcal{C}^\infty$; nous emploierons les notations suivantes, dans la fin de ces exposés : $\mathcal{E}$ désigne l'espace des germes de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ en $0 \in \mathbb{R}$, à valeurs complexes (ou à valeurs réelles, dans quelques cas où ce sera explicitement mentionné); l'application $\mathcal{E} \to \hat{\mathcal{O}}$ qui à f associe sa série de Taylor en 0 sera notée $f \to \hat{f}$. On pose encore $K\mathcal{E} = K \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$, espace des germes en 0 de "fonctions semi-méromorphes"; l'application $\mathcal{E} \to \hat{\mathcal{O}}$ s'étend alors en une application $K\mathcal{E} \to \hat{K}$, et il est bien connu que ces applications sont surjectives. Si $f \in K\mathcal{E}$, $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}$, on a $f \in \mathcal{E}$ à cause du lemme élémentaire suivant : soit $g \in \mathcal{E}$, avec $g(0) = 0$; alors $\frac{g}{x} \in \mathcal{E}$. Les $f \in \mathcal{E}$ qui vérifient $\hat{f} = 0$ seront dites "plates".

Si l'on a $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - M$, M à coefficients dans $K\mathcal{E}$, on posera $\hat{D} = x^{k+1} \frac{d}{dx} - \hat{M}$, $i(D) = i(\hat{D})$; si $i(D) = 0$, on dira que 0 est un point singulier régulier de D.

La proposition suivante est un cas particulier d'un théorème qui sera démontré par la suite.

<u>Proposition 6.3</u> : <u>Soit</u> $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - M$, <u>avec</u> $M \in End(K\mathcal{E}^m)$ $k \in \mathbb{Z}$ et $i(D) = 0$; <u>soit</u> $G \in K\mathcal{E}^m$ <u>donné</u>; <u>supposons qu'il existe</u> $H \in \hat{K}^m$, <u>avec</u> $\hat{D}H = G$. <u>Alors il existe</u> $F \in K\mathcal{E}^m$ <u>vérifiant</u> $DF = G$, $\hat{F} = H$, <u>et un tel F est unique.</u>

Prenons $F_1 \in K\mathcal{E}^m$ tel qu'on ait $\hat{F}_1 = H$, et cherchons F sous la forme $F_1 + F_2$, avec F_2 plat; on doit aussi avoir $DF_2 = G - DF_1$, et le second membre est plat par hypothèse. Par conséquent, on peut supposer qu'on est dans le cas suivant : G est plat et H = 0 (i.e. on cherche F plat).

Comme une fonction plate le reste après multiplication par $x^l (l \in \mathbb{Z})$, on peut d'abord se ramener à k = 1; on peut ensuite, au moyen d'une transformation $F = AF'$, $A \in Gl(m, K\mathcal{E})$ (ensemble des matrices d'ordre m inversibles à coefficients dans $K\mathcal{E}$), et en utilisant les transformations formelles qui précèdent, se ramener au cas où l'on a $M = M_0 + M_\infty$, M_0 constante et M_∞ plate.

Enfin, il suffit de trouver F à droite de 0 et tendant vers 0 ainsi que toutes ses dérivées en 0 (nous dirons qu'une telle F est "plate à droite en 0"); on fera ensuite la même opération à gauche, en changeant x en -x.

Posons alors $F = \exp(M_0 \log x) F_1$, $G = \exp(M_0 \log x) G_1$; il est clair par l'expression explicite de $\exp(M_0 \log x)$ pour M_0 triangulaire, que F et F_1 seront simultanément plates à droite en 0, et de même pour G et G_1. On est ramené à l'équation

$$x \frac{dF_1}{dx} - N_\infty F_1 = G_1, \text{ avec } N_\infty = \exp(-M_0 \log x)\, M_\infty \exp(M_0 \log x),$$

donc N_∞ est plate à droite en 0; en divisant par x, on est ramené au théorème d'existence et d'unicité usuel. D'où la proposition.

<u>Corollaire 6.4</u> : <u>Soit</u> $D = x \frac{d}{dx} - M$, <u>avec</u> $M \in \mathrm{End}(K\,\mathcal{E}^m)$, <u>et supposons que</u> 0 <u>soit un point singulier régulier. Il existe alors</u> $A \in Gl(m, K\,\mathcal{E})$ <u>tel que la transformation</u> $F = AF'$ <u>transforme</u> D en $D' = x \frac{d}{dx} - N$, <u>avec</u> N <u>constant</u>.

Comme ci-dessus, on peut supposer $M = M_0 + M_\infty$, avec M_0 constant M_∞ plat. Considérons alors l'équation

$$x \frac{dA}{dx} = MA - AM_0, \quad \text{avec } A \text{ à coefficients dans } \mathcal{E},\ A(0) = I.$$

Cette équation admet pour solution formelle I; d'après 6.3, elle admet donc une solution A, avec $\hat{A} = I$; d'où le résultat.

On déduit immédiatement de ce corollaire, l'expression générale d'une matrice fondamentale d'un système à points singuliers réguliers, et à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.