SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

O. A. OLEINIK

Hypoellipticité et régularité locale des solutions faibles des équations aux dérivées partielles du second ordre

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1970-1971), exp. nº 1, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1970-1971____A1_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 0 - 1 9 7 1

HYPOELLIPTICITE ET REGULARITE LOCALE DES SOLUTIONS FAIBLES DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

par Madame O. A. OLEINIK

Exposé N° 1   30 Septembre 1970

Le problème de l'hypoellipticité des opérateurs différentiels à coefficients variables a été étudié par plusieurs auteurs depuis son introduction par L. Schwartz [1].

Les résultats obtenus pour les équations d'ordre quelconque ne donnent aucun résultat essentiel pour celles d'ordre 2.

L'hypoellipticité des équations du 2ème ordre fut étudiée pour la première fois par L. Hörmander dans [2]. Pour les opérateurs du 2ème ordre du type

$$(1) \qquad Pu = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 u + i X_o u + c u$$

où

$$X_j(x,\mathfrak{D}) = \sum_{l=1}^{m} a_j^l(x)\mathfrak{D}_l \ , \ \mathfrak{D}_l = -i \frac{\partial}{\partial x_l} \ , \ x = (x_1,\dots,x_m) \ ,$$

$j = 0,1,\dots,r$, les coefficients a_j^l, c étant réels et de classe $C^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, il démontra l'hypoellipticité en supposant que l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs $X_o,\dots,X_r$ soit de rang m en tout point de Ω. Pour cela il utilisa certains théorèmes concernant les algèbres de Lie et des normes particulières liées aux opérateurs X_o, $X_1,\dots,X_r$.

Utilisant certains résultats de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, nous donnons une autre démonstration du résultat de Hörmander et certains théorèmes plus généraux concernant l'hypoellipticité de l'opérateur P et la régularité locale des solutions faibles de l'équation $Pu = f$. Nous démontrons aussi, pour ces équations, des estimations a priori semblables aux estimations de Schauder pour les équations elliptiques.
Par la même méthode, des résultats analogues peuvent être démontrés pour les équations générales de 2ème ordre :

$$(2) \qquad Lu \equiv \sum_{j,k} a^{k,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_k b^k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u = f(x)$$

(où les coefficients sont de classe C^∞ dans Ω) et pour des équations d'ordre supérieur. Ces résultats sont contenus dans [3], [4], [5]. Les notations que nous utiliserons sont celles de [1], [6].

Le théorème 1 réduit la démonstration de l'hypoellipticité d'un opérateur A d'ordre n à celle d'estimations a priori pour des fonctions C^∞ à support compact.

Soit H^s l'espace des distributions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ telles que

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^m} (1 + |\xi|^2)^s \, |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \quad .$$

Si A est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $a(x,\xi)$, nous noterons $A^{(j)}$ et $A_{(j)}$ les opérateurs pseudo-différentiels de symbole $\frac{\partial}{\partial \xi_j} a(x,\xi)$ et $\mathfrak{D}_j a(x,\xi)$ respectivement.

<u>Théorème 1</u> : Soit A un opérateur différentiel linéaire d'ordre n, à coefficients dans $C_o^\infty(\Omega)$ et supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

1) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $s_o = s_o(K)$ telle que pour tout $N > 0$ assez grand on ait :

$$\|u\|_{s_o}^2 \leq C(K,N)(\|Au\|_o^2 + \|u\|_{-N}^2) \qquad \text{avec :}$$

$u \in C_o^\infty(K)$; $-N < s_o$, $C(K,N)$ constante dépendant de K et N.

2) Pour tout compact $K \subset \Omega$, tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $\delta > 0$, il existe une constante $C(K,s,\delta,N)$ telle que pour tout $N > 0$ assez grand on ait :

$$\sum_{j=1}^{m} \|A_{(j)}u\|_s^2 \leq \delta \|Au\|_{s+1}^2 + C(K,s,\delta,N)\, \|u\|_{-N}^2$$

avec $-N < s + s_o$; $u \in C_o^\infty(K)$.

3a) Pour tout compact $K \subset \Omega \setminus M$, où M est un ensemble fermé, borné et $M \subset \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C(K,s,N)$ telle que, pour tout $N > 0$ assez grand nous ayons :

$$\sum_{j=1}^{m} \|A^{(j)}u\|_s^2 \le C(K,s,N)\{\|Au\|_{s-\mu}^2 + \|u\|_{-N}^2\} \quad ,$$

avec $\mu = \mu(K) > 0$, $-N < s + s_0$, $u \in C_0^\infty(K)$.

3b) Pour tout compact $K \subset \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, tout $\delta > 0$ et tout $N > 0$ assez grand :

$$\sum_{j=1}^{m} \|A^{(j)}u\|_s^2 \le \delta \|Au\|_s^2 + C(K,s,\delta,N) \|u\|_{-N}^2$$

avec : $u \in C_0^\infty(K)$; $-N < s + s_0$; $C(K,s,\delta,N)$ constante >0.

Alors l'opérateur différentiel A est hypoelliptique, c'est-à-dire que, si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $Au \in H^s_{loc}(\Omega)$ nous avons l'inégalité :

$$(3) \qquad \|\varphi u\|_{s+s_0}^2 \le C_{\varphi_1} \{\|\varphi_1 Au\|_s^2 + \|\varphi_1 u\|_\gamma^2\} \qquad :$$

avec : φ, $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$: $\varphi_1 \equiv 1$ sur le support de φ ; de plus soit $\varphi \equiv 1$ sur M soit $\operatorname{supp} \varphi \cap M = \emptyset$: $\gamma < s + s_0$.
Le théorème 1 peut etre démontré, en utilisant les techniques usuelles des "mollifiers" (i.e. l'approximation de u par une suite de fonctions $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$).

Nous utiliserons une classe d'opérateurs pseudo-différentiels ainsi définie :

l'opérateur A est de la forme

$$Au = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} a(x,\xi)\, \hat{u}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi \quad , \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$$

A est appelé opérateur pseudo-différentiel ; la fonction $a(x,\xi)$ est appelée symbole de l'opérateur A. Nous supposons que le symbole $a(x,\xi)$ de l'opérateur A satisfait les conditions suivantes :

a) $a(x,\xi) = a_1(\xi) + a_2(x,\xi)$

où $a_1(\xi)$ est une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $a_2(x,\xi)$ une fonction indéfiniment différentiable de (x,ξ) et pour tout ξ la fonction $a_2(x,\xi)$, comme fonction de x a son support contenu dans un compact $K \subset \mathbb{R}^m$ (i.e. $a_2(x,\xi) \equiv 0$ pour $x \in \mathbb{R}^m - K$, $\xi \in \mathbb{R}^m$).

b) Il existe $\sigma \in \mathbf{R}$ tel que, pour tous multi-indices α, β, et pour tout $(x,\xi) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$, nous avons :

$$\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha} a_1(\xi)\right| \leq C_\alpha(1 + |\xi|^2)^{1/2(\sigma - |\alpha|)} \quad ,$$

$$\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha} \partial_x^\beta a_2(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|^2)^{1/2(\sigma - |\alpha|)} \quad ,$$

C_α dépendant de α et $C_{\alpha,\beta}$ de α et β.

Il est facile de voir que A opère de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.

Pour une telle classe d'opérateurs pseudo-différentiels, nous avons :

(4) $$\|Au\|_s \leq C_s \|u\|_{s+\sigma} \quad , \quad C_s = \text{constante}$$

avec $u \in \mathcal{S}$ et $s \in \mathbf{R}$.

Si l'opérateur A a pour symbole $a(x,\xi)$ avec $\sigma = \sigma_1$, l'opérateur B a pour symbole $b(x,\xi)$ avec $\sigma = \sigma_2$, nous noterons $(AB)_N$ l'opérateur qui a pour symbole :

$$\sum_{|\alpha| \leq N-1} \frac{1}{\alpha!} \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial\xi^\alpha} a(x,\xi)\right] D_x^\alpha b(x,\xi) \quad .$$

On sait alors que pour tout $u \in \mathcal{S}$ on a :

(5) $$AB\,u = (AB)_N u + T_N u$$

où T_N vérifie l'inégalité :

(6) $$\|T_N u\|_s \leq C_{N,s}\ \|u\|_{s+\sigma_1+\sigma_2-N}\ ,\quad (C_{N,s}\ \text{constante} > 0)\ .$$

De la relation (5) on déduit que

$$[A\ ,\ B] \equiv AB - BA = (AB)_N u - (BA)_N u + T'_N u$$

où T'_N vérifie une inégalité analogue à (6).
Notons $E_s u$ un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est de la forme

(7) $$\varphi(x)(1 + |\xi|^2)^{s/2} \quad \text{où} \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varphi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^m)\quad .$$

Il est évident que le symbole de l'opérateur E_s satisfait les conditions a) et b) avec $\sigma = s$. On peut alors montrer que pour tout domaine borné G de $\mathbb{R}^m$ pour tout N_1 assez grand et pour $s,\ s_1 \in \mathbb{R}$ il existe $C > 0$ dépendant de s, s_1, G et N_1 telle que :

(8) $$\|u\|_{s+s_1} \leq \|E_s u\|_{s_1} + C\ \|u\|_{s+s_1-N_1} \qquad \forall\ \ u \in C_o^\infty(G)$$

si $\varphi \equiv 1$ sur G.
Utilisant certaines propriétés des opérateurs pseudo-différentiels, on peut démontrer les théorèmes suivants (Th. 2 et 3) qui nous seront utiles par la suite.

<u>Théorème 2</u> : Soient A, B deux opérateurs pseudo-différentiels de symboles réels qui satisfont aux conditions a) et b) avec $\sigma = 1$. Alors pour tout $s_1 \leq 0$ et $s \in \mathbb{R}$ il existe une constante $C(s,s_1) > 0$ telle que

(9) $$\|[A,B]u\|^2_{s+\frac{s_1-1}{2}} \leq C(s,s_1)\{\|Au\|^2_s + \|Bu\|^2_{s+s_1} + \|u\|^2_s\}$$

pour toute $u \in \mathcal{S}$.

<u>Théorème 3</u> : Soient $p_j(x,\xi)$, $j=1,\dots,N_2$, les symboles des opérateurs pseudo-différentiels P_j, $j=1,\dots,N_2$, satisfaisant aux conditions a) et b) avec $\sigma=1$. Supposons que l'on ait :

$$(10) \qquad \sum_{j=1}^{N_2} |p_j(x,\xi)|^2+1 \geq Co(1+|\xi|^2) \quad , \quad Co = \text{constante} > 0 ,$$

pour tout x dans un compact G_1. Alors il existe $C>0$ telle que pour tout $u \in C_o^\infty(G)$, où $\overline{G} \subset$ Intérieur de G_1 on a :

$$(11) \qquad \|u\|_{1+s}^2 \leq C \left\{ \sum_{j=1}^{N_2} \|P_j u\|_s^2 + \|u\|_s^2 \right\} \quad .$$

Nous allons maintenant étudier plus en détail le cas de l'équation (1). Nous montrerons ensuite comment on peut obtenir des résultats analogues pour les équations générales (2).
Comme nos raisonnements sont locaux, nous pouvons supposer que les coefficients de l'équation (1) sont dans $C_o^\infty(\Omega)$.
Nous allons maintenant donner des inégalités d'énergie.

<u>Théorème 4</u> : Pour tout compact K de Ω et tout $s \leq 0$, il existe une constante $C_{K,s}>0$ telle que :

$$(12) \qquad \|X_o u\|_{s-1/2}^2 + \sum_{j=1}^{r} \|X_j u\|_s^2 \leq C_{K,s} \{\|Pu\|_o^2 + \|u\|_{2s}^2\} \quad , \quad \forall\, u \in C_o^\infty(K).$$

Pour démontrer cette inégalité nous utiliserons l'opérateur E_s dont le symbole est défini par (7) où $\varphi \in C_o^\infty(K_1)$, $K \subset K_1 \subset \Omega$, $\varphi \equiv 1$ sur K, et nous considérerons l'expression $\mathrm{Re}(PE_s u, E_s u)$.
Utilisant l'inégalité (8) et l'inégalité :

$$(13) \qquad \|PA_s u\|_{-s}^2 \leq C_{K,s}(\|Pu\|_o^2 + \|u\|_o^2) \quad , \quad u \in C_o^\infty(K),$$

qui est valable pour tout opérateur A_s pseudo-différentiel pour lequel $\delta = s$, nous obtenons l'inégalité :

$$(14) \qquad \sum_{j=1}^{r} \|X_j u\|_s^2 \leq C_{K,s}(\|Pu\|_o^2 + \|u\|_{2s}^2) \quad , \quad u \in C_o^\infty(K).$$

Pour évaluer $\|X_o u\|_{s-1/2}$ on considère le produit scalaire $(PE_s u, E^*_{-\frac{1}{2}} E_{-\frac{1}{2}} X_o E_s u)$ où E^*_s est l'opérateur adjoint de l'opérateur E_s au sens : $(E_s u, v) = (u, E^*_s v)$, $\forall$ u, $v \in \mathcal{S}$ et l'identité :

$$(15) \qquad (PE_s u, E^*_{-\frac{1}{2}} E_{-\frac{1}{2}} X_o E_s u) \equiv i\|E_{-\frac{1}{2}} X_o E_s u\|_o^2 + (c\, E_s u, E^*_{-\frac{1}{2}} E_{-\frac{1}{2}} X_o E_s u)$$

$$+ \sum_{j=r}^{..} (X_j E_s u, X^*_j E^*_{-\frac{1}{2}} E_{-\frac{1}{2}} X_o E_s u).$$

L'estimation désirée résulte de (15) en utilisant (5), (8), (13) et (14).

Considérons maintenant le système des opérateurs $\{X_o, X_1, \ldots, X_r\}$ défini par l'équation (1).

Pour tout multi-indice $I = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ où $\alpha_l = 0, 1, \ldots, r$ pour $l = 1, \ldots, t$ nous posons :

$$|I| = \sum_{l=1}^{t} \lambda_l$$

où λ_l est égal à 1 si $\alpha_l = 1, \ldots, r$ et $\lambda_l = 2$ si $\alpha_l = 0$. A tout multi-indice $I = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ nous associons l'opérateur

$$X_I = \mathrm{ad}X_{\alpha_1}, \ldots, \mathrm{ad}X_{\alpha_{t-1}} \circ X_{\alpha_t}$$

où $\mathrm{Ad}\,A.B = [A,B] = AB - BA$, pour tous opérateurs A et B. Le lemme suivant donne une estimation de l'opérateur X_I.

<u>Lemme 1</u> : Pour tout compact K de Ω, tout k entier ≥ 1 et tout $s \geq 0$ il existe une constante $C_{K,s,k} > 0$ telle que

$$(16) \qquad \sum_{|I| \leq k} \|X_I u\|^2_{s+2^{1-k}-1} \leq C_{K,s,k} \{\|Pu\|_o^2 + \|u\|^2_{2^k s}\} \quad , \; u \in C_o^\infty(K) \quad .$$

Cette inégalité se démontre par récurrence sur k. Pour k = 1 et 2, le lemme 1 résulte du théorème 4 et de l'inégalité (9). Supposons le vrai pour $k = k_o$. En utilisant l'inégalité (9), on montre que (16) est vraie pour

$k = k_o + 1$ si $X_I = [X_j, X_{I_1}]$ où $|I_1| = k_o$, $j = 1,\ldots,r$. En effet en utilisant (9) avec $A = X_j$, $j = 1,\ldots,r$, $B = X_{I_1}$ et $s_1 = 2^{1-k_o} - 1$ on obtient :

$$\sum_{|I_1|=k_o} \sum_{j=1}^{r} \|[X_j, X_{I_1}]u\|^2_{s-\frac{1}{2}+(2^{-k_o}-\frac{1}{2})} \leq C\{ \sum_{j=1}^{r} \|X_j u\|_s^2 + \sum_{|I_1|=k_o} \|X_{I_1} u\|_{s+2^{1-k_o}-1} + \|u\|_s^2 \}$$

Il suffit alors d'utiliser l'hypothèse de récurrence et le théorème 4.
Dans le cas où $X_I = [X_o, X_{I_1}]$ avec $|I_1| = k_o - 1$, nous considérons l'identité :

$$[P, X_{I_1}] = 2X_j[X_j, X_{I_1}^*] - [X_j, [X_j, X_{I_1}]] + i[X_o, X_{I_1}] + [c, X_{I_1}]$$

que nous appliquons à la fonction $E_s u$. On multiplie scalairement le résultat par $E_p^* E_p^* [X_o, X_{I_1}] E_s u$ où p est égal à $2^{-k_o} - 1$. Il apparaît alors un terme de la forme $\|E_p[X_o, X_{I_1}]E_s u\|_o^2$ qui est la quantité désirée, modulo des commutateurs que nous pouvons estimer par (8). La majoration de $\|E_p[X_o, X_{I_1}]E_s u\|_o^2$ s'obtient en utilisant (5), (13) et l'hypothèse de récurrence.

<u>Définition</u> : Le système $\{X_o, \ldots, X_r\}$ est dit système de rang m au point x_o si il existe un entier $R(x_o) > 0$ tel que :

(17) $$\sum_{|I| \leq R(x_o)} |X_I(x_o, \xi)| > 0 \quad , \quad \forall\, \xi \neq 0$$

où $X_I(x_o, \xi)$ est le symbole de l'opérateur X_I.

<u>Lemme 2</u> : Supposons que pour tout $X \in K$, où K est un sous-ensemble compact de Ω, le système des opérateurs $\{X_o, \ldots, X_r\}$ est de rang m. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe une constante $C(K,s)$ telle que

(18) $$\|u\|_{1+s}^2 \leq C(K,s)\{ \sum_{|I| \leq R(K)} \|X_I u\|_s^2 + \|u\|_s^2 \} \quad \forall \; u \in C_o^\infty(K)$$

où $R(K) = \sup\limits_{x \in K} |R(x)|$.

Ce lemme résulte aisément du théorème 3.
L'estimation (18) et l'estimation de l'énergie (12) nous permettent d'utiliser

le théorème 1 en vue d'établir le théorème principal suivant :

<u>Théorème 5</u> : On suppose que pour tout $x \in \Omega$, le système des opérateurs $\{X_0, \dots, X_r\}$ est de rang m. Alors pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $Pu \in H^s_{loc}$, on a l'estimation suivante :

$$(19) \qquad \|\varphi u\|_{s+\varepsilon(K)} \leq C\{\|\varphi_1 Pu\|_s^2 + \|\varphi_1 u\|_\gamma^2\}$$

où K compact de Ω, $\gamma = \mathrm{Const} < s + \varepsilon(K)$, les fonctions φ, $\varphi_1 \in C_0^\infty(K)$, $\varphi_1 \equiv 1$ sur un voisinage du support de φ, $\varepsilon(K) = \mathrm{Const} > 0$ et où C est une constante dépendant de K et γ. De plus l'opérateur P défini par (1) est hypoelliptique dans Ω.

Le théorème de Hörmander [2] affirme que P est hypoelliptique sous les hypothèses du théorème 5. Afin de prouver le théorème 5 nous montrons que les conditions du théorème 1 sont vérifiées avec $M = \emptyset$. D'après (18) et (16) nous avons, grâce aus hypothèse du théorème 5 : il existe une constante C telle que pour tout $u \in C_0^\infty(G)$ (où $G \subset \mathrm{Int}(K)$ est compact) :

$$(20) \qquad \|u\|_{t+1}^2 \leq C\{\sum_{|I| \leq R(K)} \|X_I u\|_t^2 + \|u\|_t^2\} \leq C\{\|Pu\|_0^2 + \|u\|^2_{2^{R(K)}(t+1-2^{1-R(K)})}\} .$$

On choisit t tel que

$$t+1 > 2^{R(K)}(t+1-2^{1-R(K)}) \quad , \quad -1 < t < -1 + \frac{2}{2^{R(K)}-1} .$$

Nous posons $t + 1 = \varepsilon$; alors il résulte de (20) que

$$(21) \qquad \|u\|_\varepsilon^2 \leq C(K,N)\{\|Pu\|_0^2 + \|u\|_{-N}^2\} \qquad u \in C_0^\infty(G)$$

où N est positif et arbitrairement grand. Utilisant l'estimation de l'énergie on obtient :

$$(22) \qquad \|X_0 u\|^2_{\frac{\varepsilon-1}{2}} + \sum_{j=1}^{r} \|X_j u\|^2_{\varepsilon/2} \leq C\{\|Pu\|_0^2 + \|u\|_{-N}^2\} \quad , \quad u \in C_0^\infty(G) .$$

De plus il est aisé de vérifier :

$$(23) \qquad \sum_{j=1}^{m} \{ \|P_u^{(j)}\|_s^2 + \|P_{(j)}u\|_{s-1}^2 \} \leq C \{ \sum_{j=1}^{r} \|X_j u\|_s^2 + \|u\|_s^2 \} \qquad u \in C_o^\infty(G) \quad .$$

Reportant dans (21) et (22) $E_s u$ au lieu de u il vient

$$(24) \qquad \|u\|_{s+\varepsilon}^2 + \sum_{j=1}^{r} \|X_j u\|_{s+\varepsilon/2}^2 \leq C \{ \|Pu\|_s^2 + \|u\|_{-N}^2 \} \quad .$$

Il résulte de (23) et (24) que

$$(25) \qquad \sum_{j=1}^{m} \{ \|P_u^{(j)}\|_s^2 + \|P_{(j)}u\|_{s-1}^2 \} \leq C \{ \|Pu\|_{s-\frac{\varepsilon}{2}}^2 + \|u\|_{-N}^2 \}$$

et ainsi les conditions du théorème 1 sont vérifiées. Le théorème 5 est démontré.

Remarquons que l'estimation (19) est encore vraie si les coefficients de P sont de classe $C^\mu(K)$ où μ dépend de $R(K) = \sup_{x_o \in K} R(x_o)$.

On peut construire aisément des opérateurs de la forme (2) qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme (1) avec des coefficients C^∞. D'après Hilbert, il existe un polynôme $B(x,y)$ non négatif, de degré 6, qui ne peut pas être représenté comme une somme finie de carrés de polynômes. Il est aisé de voir que la fonction indéfiniment dérivable

$$(26) \qquad \mathfrak{J}(x,y,z) = z^6 B\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) + B_1(x,y,z)$$

où B_1 est une fonction C^∞, nulle ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre 6 au point $x=0$, $y=0$, $z=0$, ne peut pas s'écrire comme somme finie de carrés de fonctions C^∞ (cet exemple nous a été fourni par Hörmander et Palamodov). On vérifie facilement que l'opérateur

$$Lu = \mathfrak{J}(x,y,z)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + Q^1 u$$

où Q^1 est un opérateur différentiel du premier ordre, ne peut pas se mettre sous la forme (1). Il est donc intéressant de considérer l'équation générale (2). Ecrivons (2) sous la forme

$$(27)\qquad Lu = -\sum_{j=1}^{m} \mathfrak{D}_j(a^{k,j}\mathfrak{D}_k u) + i\,Q u + \cdot u$$

où $Qu \equiv \sum_{j,k}(b^k - a^{kj}_{x_j})\mathfrak{D}_k u$. On pose $L^o(x,\xi) = \sum_{k,j=1}^{m} a^{k,j}\xi_k\xi_j$ et $L^{o(j)}$, $L^o_{(j)}$ les opérateurs de symboles respectifs $\frac{\partial L^o}{\partial \xi_j}$, $\mathfrak{D}_j L^o(x,\xi)$. On a l'estimation suivante de l'énergie qui est analogue à l'estimation (12).

<u>Lemme 3</u> : Pour tout $s \geq 0$ et tout compact $K \subset \Omega$ il existe $C(K,s)$ tel que

$$(28)\qquad \sum_{j=1}^{m}\{\|L^{o(j)}u\|_s^2 + \|L^o_{(j)}u\|_{s-1}^2\} + \|Qu\|^2_{s-\frac{1}{2}} \leq C(K,s)\,\{\|Lu\|_o^2 + \|u\|_{2s}^2\}$$

pour tout $u \in C_o^\infty(K)$.

Afin d'établir (28) nous utilisons entre autres le résultat suivant. Si pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^m$ on a $\sum_{k,j=1}^{m} a^{kj}(x)\,\xi_k\xi_j \geq 0$, alors on a

$$(29)\qquad \sum_{k,j=1}^{m}\left|\frac{\partial a^{k,j}}{\partial x_p}(x)\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_j}\right|^2 \leq M \sum_{k,j,s=1}^{m} a^{k,j}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_k\partial x_s}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_s}$$

pour tout $v \in C^{(2)}(\mathbb{R}^m)$, où la constante M dépend seulement des dérivées secondes des a^{kj}.

On considère le système des opérateurs $\{Q_o, Q_1, \dots, Q_{2m}\}$ où $Q_o = Q$, $Q_j = L^{o(j)}$ pour $j = 1,\dots,m$ et $Q_j = E_{-1}\,L^o_{(j-m)}$ pour $j = m+1,\dots,2m$. Pour tout multi-indice $I = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ où $\alpha_l = 0,1,\dots,2m$ pour $l = 1,\dots,k$ on pose

$$|I| = \sum_{l=1}^{k}\lambda_l$$

où $\lambda_l = 1$ si $\alpha_l = 1,2,\dots,2m$ et $\lambda_k = 2$ si $\alpha_l = 0$. Pour tout multi-indice I on considère l'opérateur $Q_I = \mathrm{ad}\,Q_{\alpha_1}, \dots, \mathrm{ad}\,Q_{\alpha_{k-1}} \circ Q_{\alpha_k}$.

Par une démonstration analogue à celle du lemme 1, on peut démontrer l'inégalité suivante :

$$(30) \qquad \sum_{|I|\leq k} \|Q_I u\|^2_{2^{1-k}+s-1} \leq C(K,s,k)\{\|Lu\|^2_o + \|u\|^2_{2^k s}\}$$

pour tout $u \in C_o^\infty(K)$, $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ et $k \geq 1$.
Considérons l'opérateur Q_I obtenu à partir de $Q_o,\dots,Q_{2m}$. En vertu de la propriété (5) des opérateurs pseudo-différentiels, pour tout multi-indice I l'opérateur Q_I peut être mis sous la forme :

$$(31) \qquad Q_I = Q_I^o + T_I$$

où T_I est un opérateur d'ordre ≤ 0 et Q_I^o est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $q_I^o(x,\xi)$ avec $\sigma = 1$.

<u>Définition</u> : Le système $\{Q_o,\dots,Q_{2m}\}$ est dit système de rang m sur le compact K si il existe une constante $C_o > 0$ et un entier $R(K) > 0$ tel que :

$$(32) \qquad 1 + \sum_{|I|\leq R(K)} |q_I^o(X,\xi)|^2 \geq Co\ (1+|\xi|^2) \quad \forall\ x \in K\ ;\ \xi \in \mathbb{R}^n .$$

<u>Théorème 6</u> : Supposons que le système $\{Q_o,\dots,Q_{2m}\}$ soit de rang m sur le compact K de Ω. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe une constante $C(K,s) > 0$ et $\varepsilon(K) > 0$ tels que si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et vérifie $Lu \in H^s_{loc}(\Omega)$ on a :

$$(33) \qquad \|\varphi u\|^2_{s+\varepsilon(K)} \leq C(K,s)\ \{\|\varphi_1 Lu\|^2_s + \|\varphi_1 u\|^2_\gamma\}$$

où φ et $\varphi_1 \in C_o^\infty(K_1)$, K_1 étant un compact contenu dans l'intérieur de K, $\varphi_1 \equiv 1$ sur le support de φ et $\gamma < s+\varepsilon(K)$.
De plus si le système $\{Q_o,\dots,Q_{2m}\}$ est de rang m sur tout compact de Ω alors l'opérateur L est hypoelliptique dans Ω.
Ce théorème peut être démontré à l'aide de (32), (11), (30) et (28).

Nous allons voir que les résultats des théorèmes 5 et 6 sont encore vrais sous des hypothèses plus faibles sur les opérateurs $\{X_o,X_1,\dots,X_r\}$ et $\{Q_o,Q_1,\dots,Q_{2m}\}$ respectivement.

Soit $\mathfrak{M}$ une réunion finie de variétés régulières fermées de dimension m-1 incluses dans Ω. Soit M un sous-ensemble de $\mathfrak{M}$. Soit $x_o \in M$. Supposons qu'au voisinage de x_o, $\mathfrak{M}$ peut être représentée par une équation:

$$\Phi(x_1,\dots,x_m) = 0 \quad \text{avec} \quad \operatorname{grad}\Phi \neq 0 .$$

<u>Théorème 7</u> : Supposons qu'en tout point de $\Omega\setminus M$ le système $\{X_o, X_1, \dots, X_r\}$ soit de rang m et qu'en tout point x_o de M on ait :

$$(34) \qquad \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} \left| a_j^l \frac{\partial\Phi}{\partial_l} \right|^2 + |P\Phi| \neq 0 .$$

Alors l'opérateur P donné en (1) est hypoelliptique dans Ω au sens : si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $Pu \in C^\infty(\Omega)$ alors $u \in C^\infty(\Omega)$. De plus si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi P u \in H^s(\Omega)$, pour tout $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, alors $\varphi u \in H^s(\Omega)$ et il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$(35) \qquad \|\varphi u\|_s^2 \leq C_1 \{ \|\varphi_1 P u\|_s^2 + \|\varphi_1 u\|_\gamma^2 \} ,$$

où φ, $\varphi_1 \in C_o^\infty(\Omega)$, $\varphi_1 \equiv 1$ sur le support de φ ; soit $\operatorname{supp}\varphi \cap M = \emptyset$, soit $\varphi \equiv 1$ sur M ; $\gamma < s$ et C_1 dépend de γ, s, φ.

<u>Théorème 8</u> : Supposons que le système $\{Q_o, \dots, Q_{2m}\}$ soit de rang m sur tout compact K de $\Omega\setminus M$ et qu'en tout point x_o de M on ait :

$$(36) \qquad \sum_{k,j} a^{k,j} \frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} + |L\Phi| \neq 0$$

alors l'opérateur L donné en (2) est hypoelliptique dans Ω et l'inégalité (35) est encore vraie avec P remplacé par L.

Les théorèmes 7 et 8 se démontrent de la même manière ; nous ne occupons que de celui relatif à l'opérateur P.
Tout d'abord remarquons que si M est réduite à un point x_o, alors les conditions (34) et (36) peuvent remplacées respectivement par :

$$(37)\qquad \sum_{j=o}^{r}\sum_{l=1}^{m} |a_j^l(x_o)| \neq 0$$

$$(38)\qquad \sum_{k=1}^{m} [|a^{k,k}(x_o)| + |b^k(x_o)|] \neq 0 \quad .$$

Remarquons aussi que les conditions (34) et (36) sont essentielles pour la validité des théorèmes 7 et 8. En effet la fonction $|x|^{\nu}$ est solution de l'équation :

$$(39)\qquad r^2\Delta u + (\nu m + \nu(\nu - 2))u = 0$$

et il est clair que pour ν non entier, l'équation (39) n'est hypoelliptique dans aucun domaine Ω contenant l'origine.

Nous démontrons le théorème 7 de la manière suivante :
Au voisinage d'un point x_o de M, nous écrivons l'équation (1) en coordonnées locales $(y_1,\dots,y_m)$ de telle manière que dans ce voisinage, $\mathfrak{M}$ coïncide avec l'hyperplan $y_1 = 0$. On recouvre $\mathfrak{M}$ par un nombre fini d'ouverts Ω_k, $k = 0,\dots,N$, dans chacun desquels la transformation ci-dessus est possible.
Posons : $G_{k,\beta} = \Omega_k \cap \{|y_1| \leq \beta\}$. On a alors: pour tout μ assez grand il existe $\beta > 0$ dépendant de μ tel que

$$(40)\qquad \|u\|_o \leq \frac{C_1}{\mu}\|Pu\|_o \quad . \quad \forall\, u \in C_o^{\infty}(G_{k,\beta}) \ .$$

C_1 indépendante de μ.
L'inégalité (40) s'obtient par intégrations par parties.
De la même manière on peut obtenir l'inégalité :

$$(41)\qquad \|P_{(j)}u\|_{-1} + \|P^{(j)}u\|_o \leq \frac{C_2}{\mu}\|Pu\|_o \quad . \quad \forall\ u \in C_o^{\infty}(G_{k,\beta}).$$

Utilisant alors une partition de l'unité, on peut obtenir des inégalités analogues à (40) et (41) pour des fonctions u de classe C^{∞}, à support contenu dans un β-voisinage de $\mathfrak{M}$, où $\beta = \beta(\mu)$.
On peut alors montrer que sous les hypothèses du théorème 7 les conditions 1), 2) et 3b) sont satisfaites.

D'après l'inégalité (25) utilisée dans la démonstration du théorème 5 on a : pour tout compact K de Ω, $\forall$ N assez grand, $\forall\ s \in \mathbb{R}$ et $\forall\ \beta > 0$, $\exists\ C_N > 0$, $C(K,s,\beta) > 0$ et $\varepsilon(K,\beta) > 0$ tels que

$$(42) \qquad \sum_{j=1}^{m} \{\|P^{(j)}u\|_s^2 + \|P_{(j)}u\|_{s-1}^2\} + \|u\|_s^2 \leq C(K,s,\beta)\{\|P_u\|_{s-\varepsilon}^2 + C_N\|u\|_{s-N}^2\} ,$$

$$\forall \quad u \in C_0^\infty(K-G_\beta)$$

où G_β est un β-voisinage de $\mathfrak{M}$.

De (40), (41), (42) et en utilisant une partition de l'unité, on peut montrer que $\forall\ \mu$, N assez grands il existe deux constantes $C_2(\mu,N)$, C_1 indépendantes de μ et N telles que :

$$(43) \quad \|u\|_0^2 + \sum_{j=1}^{m} \|P_{(j)}u\|_{-1}^2 + \sum_{j=1}^{m} \|P^{(j)}u\|_0^2 \leq \frac{C_1}{\mu} \|P\,u\|_0^2 + C_2(\mu,N)\,\|u\|_{-N}^2$$

$$\forall\ u \in C_0^\infty(K).$$

L'inégalité désirée découle de (43) en remplaçant u par $E_s u$ et en utilisant (8).

N.B. Je tiens à remercier MM. Brezis, Derridj et Zuily qui m'ont aidée dans la rédaction en français de ce papier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Schwartz : Théorie des distributions, Hermann 1966.

[2] L. Hörmander : Hypoelliptic Second Order Differential Equations, Acta Math. Vol. 119, 1967, p.147-171.

[3] E. V. Radkevich : Sur un théorème de L. Hörmänder, Uspehi Math. Nauk 1969, 24, n°2, p.233-234.

[4] E. V. Radkevich : Estimations a priori et opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples, Doklady Akad. Nauk SSSR (1969) Vol. 187 n°2, p.271-274.

[5] O. A. Oleinik, E.V. Radkevich : Equations du second ordre à forme caractéristique non négative, Itogi Nauki VINITI AN SSSR, Moscou, 1971.

[6] L. Hörmander : Linear Partial Differential Operators, Springer Verlag.