Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean Marot

Sur les anneaux universellement japonais

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, n° 1 (1974-1975), exp. n° 24, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A18_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, n° 24, 6 p.

12 mai 1975

SUR LES ANNEAUX UNIVERSELLEMENT JAPONAIS

par Jean MAROT

1. Introduction.

Dans EGA IV, n° (7.4.8) [3], A. GROTHENDIECK pose la question suivante : "Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A . Si $A/\mathfrak{J}$ est un P-anneau, en est-il de même de A ?" Dans le cas particulier où P est la propriété des fibres formelles d'être géométriquement réduites, le problème posé est le suivant : "Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A . Si les fibres formelles de $A/\mathfrak{J}$ sont géométriquement réduites, en est-il de même de celles de A ?" Dans cet exposé, nous montrons que la réponse est affirmative lorsque A est semi-local, puis nous donnons quelques applications.

2. Le résultat essentiel.

Nous allons établir la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Soient A un anneau noethérien semi-local, et $\mathfrak{J}$ un idéal de A ; on suppose que A est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique. Alors, si les fibres formelles de $A/\mathfrak{J}$ sont géométriquement réduites, il en est de même des fibres formelles de A .

Compte tenu du théorème suivant dû à Zariski et Nagata,

THÉORÈME (EGA IV, n° (7.6.4) [3]). - Soit A un anneau semi-local noethérien. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1° Pour toute A-algèbre finie réduite C , le complété $\hat{C}$ est un anneau réduit,

2° Les fibres formelles de A sont géométriquement réduites,

3° L'anneau A est universellement japonais [c'est-à-dire, tout quotient intègre de A est un anneau japonais, ou encore, toute A-algèbre intègre de type fini est un anneau japonais].

la proposition 1 est un cas particulier du résultat plus général suivant [qui peut être considéré comme la bonne généralisation du lemme classique de TATE (EGA 0_{IV}, n° (23.1.3) [3])].

PROPOSITION 2. - Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A . Alors, si l'anneau $A/\mathfrak{J}$ est universellement japonais, A est aussi universellement japonais.

3. Démonstration de la proposition 2.

3.1 : La démonstration utilise de façon fondamentale les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME de Chevalley (EGA 0_I n° (7.2.7) [2]). - Soient A un anneau de Zariski complet, $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A, et M un A-module tel que le A-module (canonique) $M/\mathfrak{J}M$ soit de type fini. Alors le A-module $\hat{M}$ est de type fini.

THÉORÈME de J. Nishimura [5]. - Soit A un anneau de Krull tel que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de A, l'anneau $A/\mathfrak{p}$ soit noethérien. Alors l'anneau A est noethérien.

Il suffit de montrer que, pour tout élément non nul a de A, l'anneau A/Aa est noethérien. Désignons par $(v_i)_{i\in I}$ la famille des valuations essentielles de A, par $(\mathfrak{p}_i)_{i\in I}$ la famille correspondante des idéaux premiers de hauteur 1 de A, et posons $v_i(a) = n_i \geq 0$. Il existe une partie finie J de I telle que $n_i = 0$ pour tout $i \in I - J$; alors $Aa = \bigcap_{i\in J} \mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ où $\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ est l'idéal des $x \in A$ tels que $v_i(x) \geq n_i$. Il suffit donc de montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de A et pour tout entier $n \geq 1$, l'anneau $A/\mathfrak{p}^{(n)}$ est noethérien. Soit v_{i_0} la valuation associée à $\mathfrak{p}$; d'après le théorème d'approximation de Krull, il existe $x \in K$ (corps des fractions de A) tel que

$$v_{i_0}(x) = 1 \quad \text{et} \quad v_i(x) \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad i \neq i_0 .$$

Désignons par φ_n l'homomorphisme canonique fini $\varphi_n : A \longrightarrow A[x]/x^n A[x]$. Pour tout $a \in \operatorname{Ker} \varphi_n$, il existe un polynôme

$$P(x) = \sum_{k=n}^{k=m\geq n} b_k x^k$$

à coefficients dans A tel que $a = P(x)$. Soit V un anneau de valuation de K contenant A ; si $x \in V$, $b_m x \in V$; si $x \notin V$, $b_m x^m = a - \sum_{k=n}^{k=m-1} b_k x^k$ appartient à Vx^{m-1}, donc $b_m x \in V$. Ainsi $b_m x$ appartient à tout anneau de valuation de K contenant A ; donc $b_m x$ appartient à A. En prenant P de degré minimal, on voit que $\operatorname{Ker} \varphi_n = A \cap Ax^n$; d'autre part, en vertu du choix de x, $A \cap Ax^n = \mathfrak{p}^{(n)}$. Ainsi φ_n induit un homomorphisme injectif fini

$$(1) \qquad \overline{\varphi}_n : A/\mathfrak{p}^{(n)} \longrightarrow A[x]/x^n A[x] ;$$

de plus $\overline{\varphi}_1$ est bijectif. Par hypothèse, l'anneau $A[x]/xA[x]$ est noethérien ; il en est de même de $A[x]/x^n A[x]$, d'après le théorème de Cohen, donc de $A/\mathfrak{p}^{(n)}$ d'après (1) et EGA 0_I, n° (6.4.9) [2].

3.2 : Lemmes préliminaires. - Dans les trois lemmes qui suivent, A est un anneau noethérien intègre de corps des fractions K, K' une extension finie de K, et A' la fermeture intégrale de A dans K'.

LEMME 1. - Soient $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A'$, et $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A \in \operatorname{Spec} A$. Si l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est japonais, alors le $(A/\mathfrak{p})$-module $A'/\mathfrak{p}'$ est de type fini.

Comme K' est une extension finie de K , il existe une sous-A-algèbre finie B de A' ayant K' comme corps des fractions. L'homomorphisme $A/\mathfrak{p} \longrightarrow B/\mathfrak{q}$, où $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}' \cap B$, est injectif et fini ; donc l'anneau $B/\mathfrak{q}$ est japonais comme $A/\mathfrak{p}$; nous pouvons donc supposer $K' = K$. Soient k et k' les corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$ et $A'/\mathfrak{p}'$. D'après [4] (33.10), k' est une extension finie de k . Le $A/\mathfrak{p}$-module $A'/\mathfrak{p}'$ est contenu dans la fermeture intégrale de $A/\mathfrak{p}$ dans k' . Comme l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est noethérien et japonais, le $A/\mathfrak{p}$-module $A'/\mathfrak{p}'$ est de type fini.

LEMME 2. - Si, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(K/A)$, l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est japonais, alors l'anneau A' est noethérien.

L'anneau A' est un anneau de Krull ; d'après le théorème de Nishimura, il suffit de montrer que $A'/\mathfrak{p}'$ est un anneau noethérien pour tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de hauteur 1 de A' . Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$; d'après le théorème de Cohen-Seidenberg, il existe $x \in \mathfrak{p}$, $x \neq 0$. Désignons par C la clôture intégrale de A ; les anneaux C et A' sont des anneaux de Krull. D'après la proposition 12 de [1] (ch. 7, §1, n° 8), $\mathfrak{p}' \cap C$ est un idéal premier de hauteur 1 de C , contenant x ; d'après [4] (33.11), l'idéal premier $\mathfrak{p}$ appartient à $\operatorname{Ass}_A(A/xA)$. L'anneau $A/\mathfrak{p}$ est alors japonais ; on conclut par le lemme 1.

LEMME 3. - Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de A , distinct de A , tel que :

(i) A est complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique,

(ii) l'anneau $A/\mathfrak{J}$ est universellement japonais,

(iii) l'anneau A' est noethérien.

Alors le A-module A' est de type fini.

L'idéal $\mathfrak{J}A'$ de A' est distinct de A' , puisque $\mathfrak{J}$ est distinct de A , et que A' est entier sur A ; soient r sa racine, et $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ la famille de ses idéaux premiers minimaux, en nombre fini puisque A' est noethérien. Le A-module A'/r est un sous-A-module du A-module $\prod_{i=1}^{i=m} A'/\mathfrak{p}_i'$; ce dernier est de type fini, d'après le lemme 1 ; donc le A-module A'/r est de type fini puisque A est noethérien. Pour tout entier $n \geqslant 1$, r^n/r^{n+1} est un (A'/r)-module de type fini puisque A' est noethérien, donc un A-module de type fini. Comme A est noethérien, la suite exacte de A-modules :

$$0 \longrightarrow r^n/r^{n+1} \longrightarrow A'/r^{n+1} \longrightarrow A'/r^n \longrightarrow 0$$

montre alors par récurrence que A'/r^n est un A-module de type fini, pour tout entier $n \geqslant 1$. Comme A' est noethérien, il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $r^p \subseteq \mathfrak{J}A'$; le A-module $A'/\mathfrak{J}A'$ est quotient du A-module A'/r^p , il est donc de type fini. D'après le théorème de Chevalley, le séparé complété $\hat{A}'$ du A-module

A' pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique est un A-module de type fini. Le A-module A' est séparé pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique, puisque l'anneau A' est noethérien intègre, et que $\mathfrak{J}A'$ est distinct de A'. Le A-module A' est alors un sous-A-module de $\hat{A}'$; il est de type fini puisque l'anneau A est noethérien.

3.3 : Fin de la démonstration. - Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 2. Il faut établir que l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est japonais, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. En vertu du principe de récurrence noethérienne, il suffit de montrer que l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ tel que $A/\mathfrak{p}$ est japonais possède la propriété suivante : "Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ est tel que $A/\mathfrak{q}$ est japonais pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ contenant strictement $\mathfrak{p}$, alors $A/\mathfrak{p}$ est japonais". Posons $B = A/\mathfrak{p}$; par hypothèse, l'anneau $B/\mathfrak{q}$ est japonais, pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$.

Soient K le corps des fractions de B, K' une extension finie de K, et B' la fermeture intégrale de B dans K'. D'après le lemme 2, l'anneau B' est noethérien. D'autre part, B est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{J}B$-adique, d'après le théorème 3 de [1] (ch. 3, §3, n° 4) ; et l'anneau $B/\mathfrak{J}B$ est universellement japonais, puisque tout quotient intègre de $B/\mathfrak{J}B$ est un quotient intègre de $A/\mathfrak{J}$. Le lemme 3 montre alors que B' est un B-module de type fini ; donc l'anneau B est japonais.

4. Applications.

PROPOSITION 3. - *Soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{J}$ un idéal de A distinct de A, et $\hat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique. Alors si l'anneau $A/\mathfrak{J}$ est universellement japonais, l'anneau $\hat{A}$ est aussi universellement japonais.*

Ceci découle de la proposition 2, compte tenu de l'isomorphisme canonique

$$A/\mathfrak{J} \xrightarrow{\sim} \hat{A}/\mathfrak{J}\hat{A} .$$

PROPOSITION 4. - *Soient A un anneau noethérien semi-local, $\mathfrak{J}$ un idéal de A distinct de A, et $\hat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique. Alors, si les fibres formelles de A sont géométriquement réduites, il en est de même de celle de $\hat{A}$.*

PROPOSITION 5. - *Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A. Alors, si l'anneau $A/\mathfrak{J}$ est universellement japonais, tout anneau de séries formelles restreintes à un nombre fini de variables $A\{T_1, \dots, T_n\}$ est aussi universellement japonais.*

Posons $A' = A\{T_1, \dots, T_n\}$. D'après EGA 0_I, n° (7.5.2) [2], l'anneau A' est noethérien complet pour la topologie $\mathfrak{J}A'$-adique. D'autre part, l'anneau $A'/\mathfrak{J}A'$ est isomorphe à l'anneau de polynômes $(A/\mathfrak{J})[T_1, \dots, T_n]$; donc, d'après l'hypothèse et [3] (7.7.2), l'anneau $A'/\mathfrak{J}A'$ est universellement japonais. La proposition 2 permet de conclure.

PROPOSITION 6. - Soit A un anneau noethérien universellement japonais. Alors tout anneau de séries formelles à un nombre fini de variables $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ est universellement japonais.

On applique la proposition 2 à l'anneau $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ et à l'idéal $(X_1, \ldots, X_n)\, A[[X_1, \ldots, X_n]]$.

Comme dernière application, signalons la variante suivante du lemme classique de Tate [3] (23.1.3). On en trouvera la démonstration dans [6].

PROPOSITION 7. - Soient A un anneau noethérien intègre, de corps des fractions K, p l'exposant caractéristique de K, xA un idéal principal de A distinct de A, et $\overline{A}$ la cloture intégrale de A. On suppose que

(i) A est complet pour la topologie xA-adique.

(ii) Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A/xA)$, l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est japonais.

(iii) L'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(a) les idéaux premiers minimaux de $x\overline{A}$ sont principaux.

(b) les idéaux premiers minimaux de $x\overline{A}$ sont de type fini, et $(K : K^p) < +\infty$.

Alors l'anneau A est japonais.

5. Conclusions.

Il reste encore des questions ouvertes, en particulier les deux suivantes.

Question 1. - Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A. Si l'anneau $A_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{J}A_{\mathfrak{M}}$ est universellement japonais pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A, en est-il de même de $A_{\mathfrak{M}}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A ? Une réponse positive permettrait de résoudre totalement la question de A. GROTHENDIECK.

Question 2. - Trouver un anneau universellement japonais, dont les fibres formelles ne sont pas toutes géométriquement régulières. Il n'en existe ni dans EGA, ni dans "Local rings" de NAGATA.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, chap. 1-2, 3-4, 5-6, 7. - Paris, Hermann, 1961-1965 (Act. scient. et ind., 1290, 1293, 1308, 1314 ; Bourbaki, 27, 28, 30 et 31).

[2] GROTHENDIECK (A.). - Eléments de géométrie algébrique, I [EGA I]. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 166).

[3] GROTHENDIECK (A.). - Eléments de géométrie algébrique, IV [EGA IV]. - Paris, Presses universitaires de France, 1964 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 20 et 24).

[4] NAGATA (M.). - Local rings. - New York Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 13).

[5] NISHIMURA (J.). - Note on Krull domains (à paraître).

[6] MAROT (J.). - Sur les anneaux universellement japonais, Bull. Soc. math. France, t. 103, 1975, p. 103-111.

(Texte reçu le 6 juin 1975)

Jean MAROT
Mathématiques
Université de Bretagne occidentale
6 avenue Victor Le Gorgeu
29283 BREST CEDEX