

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

THÉRÈSE MERLIER

**Sous-demi-groupes convexes des demi-groupes totalement ordonnés. Erratum et compléments**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 24, n° 1 (1970-1971), exp. n° 2, p. 1-3

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1970-1971\\_\\_24\\_1\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_1_A2_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SOUS-DEMI-GROUPES CONVEXES DES DEMI-GROUPES TOTALEMENT ORDONNÉS.

ERRATUM ET COMPLÉMENTS

par Thérèse MERLIER

Nous voulons donner ici une correction à un théorème inexact de l'exposé fait à Nice [1] en 1970, et apporter en même temps quelques compléments (théorèmes 4 et 5).

Si  $S$  est un demi-groupe totalement ordonné, ses sous-demi-groupes convexes forment un treillis  $T(S)$ , si nous admettons  $\emptyset$  comme sous-demi-groupe convexe impropre.  $T(S)$  est évidemment un sous-inf-demi-treillis de  $\mathcal{P}(S)$ , mais en général la réunion ensembliste de deux sous-demi-groupes convexes n'appartient pas à  $T(S)$ .

Le plus petit élément de  $T(S)$  est évidemment  $\emptyset$ , mais  $S$  peut admettre un sous-demi-groupe convexe propre minimum (l'intersection de tous les sous-demi-groupes convexes propres de  $S$ ). Nous avons énoncé dans [1], les théorèmes suivants ( $S$  désigne un demi-groupe totalement ordonné) :

THÉORÈME 1. -  $T(S)$  est une chaîne si, et seulement si,  $S$  est archimédien et positivement ordonné (ou négativement ordonné).

THÉORÈME 2. -  $S$  admet un sous-demi-groupe convexe propre minimum, et  $T(S)$  est un sous-treillis de  $\mathcal{P}(S)$  si, et seulement si,  $S$  est un nil-demi-groupe.

Le théorème 3 était le suivant : Si  $S$  n'admet pas de sous-demi-groupe convexe propre minimum, et si  $T(S)$  est un sous-treillis de  $\mathcal{P}(S)$ , alors  $T(S)$  est une chaîne.

Ce théorème 3 est inexact. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la bande  $S = \{e, f\}$  avec  $ef = fe = e$  et  $e < f$ , par exemple. En effet, dans ce cas,  $S$  n'admet pas de sous-demi-groupe convexe propre minimum,  $T(S) = \mathcal{P}(S)$ , et  $\mathcal{P}(S)$  n'est pas une chaîne.

Nous avons cependant, avec les notations et définitions utilisées dans [1], le résultat suivant.

THÉORÈME 3'. - Soit  $S$  un demi-groupe totalement ordonné, sans idempotent. Si  $T(S)$  est un sous-treillis de  $\mathcal{P}(S)$ ,  $T(S)$  est une chaîne.

Démonstration. - Pour que ce treillis soit une chaîne, il suffit de montrer (théorème 1) que  $S$  est archimédien et positivement (ou négativement) ordonné. Supposons

qu'il existe  $a \in N - P$  (i. e.  $a^2 < a$ ) et  $b \in P$  (i. e.  $b \leq b^2$ ) : si  $a < b$ ,  $S_a^2 \cup S_b$  n'est pas convexe ( $a^2 < a < b$  et  $a \notin S_a^2 \cup S_b$ ). le cas  $b < a$  n'est pas à considérer, car alors  $ab$  est un idempotent. Donc  $S = P$  par exemple. Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $S$ , avec  $a < b$ ,  $a < a^2$ ,  $b < b^2$  : si  $a^n < b$  pour tout entier  $n$ ,  $S_a \cup S_b^2$  n'est pas convexe, donc il existe  $p$  tel que  $a < b \leq a^p$ . Par suite,  $S$  est archimédien, et étant  $f$ -positivement ordonné, il est positivement ordonné.

Nous avons, de plus, démontré les théorèmes suivants.

**THÉOREME 4.** - Si  $T(S)$  est un sous-treillis de  $\mathcal{P}(S)$ ,  $S$  admet au plus deux idempotents.

En effet, si  $e, f, g$  étaient trois idempotents de  $S$ , on aurait, par exemple,  $e < f < g$  puisque  $S$  est supposé totalement ordonné, et  $S_e \cup S_g = \{e, g\}$  ne serait pas convexe.

**THÉOREME 5.** - Soit  $S$  un demi-groupe totalement ordonné, et soit  $E$  l'ensemble de ses idempotents.  $T(S)$  est un sous-treillis de  $\mathcal{P}(S)$ , et  $S$  n'admet pas de sous-demi-groupe convexe propre minimum si, et seulement si,

1°  $E = \emptyset$ , et  $T(S)$  est une chaîne ;

ou

2°  $E = \{z\}$ ,  $z$  est zéro de  $S$ , la section commençante [finissante] de  $z$  est un nil-demi-groupe, la section strictement finissante [commençante] de  $z$  est un demi-groupe non vide dont le treillis des sous-demi-groupes convexes est une chaîne ;

ou

3°  $E = \{e, f\}$ , où  $f$  couvre  $e$  et où les sections commençante de  $e$  et finissante de  $f$  sont des nil-demi-groupes.

Condition nécessaire. - D'après le théorème 4,  $E = \{\emptyset\}$  ou  $E = \{z\}$  ou  $E = \{e, f\}$ .

- Si  $E = \emptyset$ , on a bien le 1° d'après le théorème 3'.

- Si  $E = \{z\}$  ; soient  $z^{\leq} = \{x ; x \leq z\}$  et  $z^{\geq} = \{x ; x \geq z\}$  les sections commençante et finissante de  $z$ . Si  $x < z$ , alors  $x < x^2$ , sinon  $S_x^2 \cup S_z$  n'est pas convexe ; de même, si  $z < x$ ,  $x^2 < x$ . Si  $x < z < y$ , et si  $x^p < z < y^q$  pour tout entier  $p$  et  $q$ ,  $S_x \cup S_y$  ne contient pas  $z$ , donc n'est pas convexe. Donc, si  $z^{\leq}$  et  $z^{\geq}$  [sections strictement commençante et finissante] ne sont pas vides,  $z^{\leq}$ , par exemple, est tel qu'il contient un élément  $x$  vérifiant  $x^p = z$ .

Dans ce cas,  $z^{\leq}$  est un nil-demi-groupe. En effet, si  $x'$  est un autre élément de  $z^{\leq}$ , si  $x \leq x' \leq z$ , alors  $x^p = x'^p = z$  et, si  $x' < x$ , comme  $S_{x'} \cup S_z$  est

convexe, il contient  $x$ , et par suite,  $x' < x \leq x'^q \leq z$ , donc  $z = x^p = x'^{pq}$ . Mais  $z^{\leq}$  et  $z^{\geq}$  ne peuvent être simultanément deux nil-demi-groupes, car alors  $\{z\}$  serait minimum parmi les sous-demi-groupes convexes propres; donc, si  $z^{\leq}$  est un nil-demi-groupe,  $z^{\geq} = \{x; x > z\}$  ne peut être vide, et est un sous-demi-groupe. Enfin, si  $z < x^2 < x$ ,  $zx$  est un idempotent, donc  $zx = z$ , et  $z$  est zéro du demi-groupe  $S$ ; de plus, d'après le théorème 3',  $T(z^{\geq})$  est une chaîne, donc la condition 2° est satisfaite.

- Si  $E = \{e, f\}$  avec  $e < f$ ; s'il existait  $x$  tel que  $e < x < f$ , la convexité de  $S_e \cup S_{x^2}$  impliquerait  $e \leq x^2 < x$ , et la convexité de  $S_f \cup S_{x^2}$ ,  $x < x^2 \leq f$ ; donc  $f$  couvre  $e$  dans  $S$ . Enfin, si  $x < e$ ,  $x < x^2$ , sinon  $S_{x^2} \cup S_e$  n'est pas convexe et, de plus, il existe  $p$  tel que  $x < x^p = e$ , sinon  $S_x \cup S_f$  n'est pas convexe. Ainsi, la section commençante de  $e$  est un nil-demi-groupe. Même raisonnement par  $f^{\geq}$ .

Condition suffisante. - Il est facile de vérifier que, dans chacun des trois cas,  $S_x \cup S_y$  est un sous-demi-groupe convexe pour tout  $x$  et tout  $y$ ; donc,  $T(S)$  est un sous-treillis de  $\mathcal{P}(S)$ .

De plus, si  $S$  admet un sous-demi-groupe convexe minimum propre, on sait (cf. la démonstration du théorème 2) que ce dernier est un idempotent. Donc, si  $E = \emptyset$ , on a le résultat cherché. Dans le second cas,  $S_z \cap S_x = \emptyset$  pour tout  $x$  de la section strictement finissante [commençante] de  $z$ ; dans le dernier cas,  $S_e \cap S_f \neq \emptyset$ , donc  $S$  ne peut admettre de sous-demi-groupe convexe minimum propre.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] MERLIER (Thérèse). - Sous-demi-groupes convexes des demi-groupes totalement ordonnés, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 23e année, 1969/70, fasc. 2 : Demi-groupes [1970. Nice], n° 7, 5 p.

(Texte reçu le 15 novembre 1971)

Thérèse MERLIER  
15 boulevard de la République  
92260 FONTENAY AUX ROSES