

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JACQUES GRAPPY

Anneaux quasi-frobéniusiens

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 2 (1967-1968), exp. n° 10, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A1_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNEAUX QUASI-FROBÉNIUSIENS

par Jacques GRAPPY

1. Rappels sur les anneaux quasi-frobénusiens.

FROBÉNIUS étudia le premier les algèbres A de dimension finie sur un corps K , telles que les modules A_s et $(A_d)^*$ soient isomorphes (A_s (resp. A_d) désigne A , muni de sa structure de A -module à gauche (resp. à droite)).

Si, pour toute partie X de A , on note $\ell(X)$ (resp. $r(X)$) l'annulateur à gauche (resp. à droite) de X dans A , on montre [14] que cette définition équivaut à :

$$\ell(r(L)) = L, \quad r(\ell(R)) = R,$$

$$[r(L) : K] + [L : K] = A : K, \quad [\ell(R) : K] + [R : K] = [A : K],$$

pour tout idéal à gauche (resp. à droite) L (resp. R) de A . De telles algèbres sont appelées frobénusiennes.

Une algèbre quasi-frobénusienne sera telle que A_s et $(A_d)^*$ aient les mêmes types de sous-modules indécomposables. On montre [14] que cela équivaut à

$$\ell r(L) = L, \quad r(\ell(R)) = R.$$

A. Anneaux quasi-frobénusiens. - Ils furent introduits par NAKAYAMA [14].

DÉFINITION 1.1. - Un anneau A unitaire est quasi-frobénusien, si :

1° A est artinien ;

2° $r\ell(R) = R$, $\ell r(L) = L$, pour tout idéal à gauche (resp. à droite) L (resp. R) de A .

La condition 2° implique que les treillis des idéaux à gauche et à droite sont anti-isomorphes. On peut donc remplacer le 1° par noethérien à gauche (ou à droite).

De nombreuses caractérisations ont été données.

Considérons les conditions suivantes :

(a) Tout homomorphisme d'un idéal à gauche de A dans A est réalisé par une multiplication à droite ;

(b) $r(I_1 \cap I_2) = r(I_1) + r(I_2)$, pour des idéaux à gauche ;

(c) $r(\ell(R)) = R$, pour tout idéal à droite R .

La condition (x^*) désignera la condition (x) pour les idéaux de type fini.

IKEDA et NAKAYAMA [9] ont prouvé les implications :

$$(a) \implies ((b) \text{ et } (c^*)) \implies (a^*) .$$

Cela permet de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1 (IKEDA [8] , IKEDA et NAKAYAMA [9] , EILENBERG et NAKAYAMA [4]) . -
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1° A est quasi-frobéniusien ;
- 2° A est noethérien à gauche, et vérifie (b) et (c) ;
- 3° A est noethérien à gauche et auto-injectif à gauche ;
- 4° A est artinien à gauche et auto-injectif à gauche ;
- 5° A est artinien à droite et auto-injectif à gauche.

FAITH [5] a complété ces caractérisations par :

- 6° A est noethérien à droite et auto-injectif à gauche.

La définition étant symétrique, on peut bien sûr obtenir d'autres caractérisations en permutant gauche et droite.

Des conditions d'un autre type ont été données :

7° (NORITA et TACHIKAWA [13]). Le dual d'un A -module à gauche (resp. à droite) simple est un A -module à droite (resp. à gauche) simple, et A est artinien.

8° (DIEUDONNÉ [3]). A est noethérien à gauche et à droite, et $M \rightarrow M^*$ est une "parfaite dualité" pour les A -modules de type fini, c'est-à-dire que $M \rightarrow M^*$ est un foncteur exact contravariant, et $M \simeq M^{***}$ pour les A -modules à gauche (resp. à droite) de type fini.

Récemment, FAITH [5] a complété par :

- 9° Tout A -module à gauche projectif est injectif.

Nous nous proposons de présenter une dernière caractérisation, due à FAITH et WALKER [6] :

- 10° Tout A -module à gauche injectif est projectif.

Dans toute la suite, A sera un anneau unitaire. Pour tout A -module à gauche

M , on notera $E_A(M)$ son enveloppe injective, ou $E(M)$ si aucune confusion n'est à craindre.

B. Exemples d'anneaux quasi-frobéniusiens.

1° L'anneau $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, ou plus généralement le quotient d'un anneau principal par un idéal propre. Comme cas particulier, signalons l'algèbre $K[T]$, où K est un corps, et T un opérateur linéaire sur un K -espace vectoriel de dimension finie.

2° L'algèbre $K[G]$ d'un groupe fini est frobéniusienne [2].

3° Si A est quasi-frobéniusien, l'anneau $A[G]$ (G groupe fini) l'est aussi.

4° Un anneau semi-simple.

5° L'anneau des matrices $M_n(A)$ sur un anneau A quasi-frobéniusien.

6° Un anneau commutatif, local, artinien, co-irréductible (c'est-à-dire dont le socle est réduit à un élément).

7° Par contre, une image homomorphe d'un anneau quasi-frobéniusien ne l'est pas nécessairement.

2. Une caractérisation des anneaux noethériens à gauche.

DÉFINITION 2.1. - Soit c un cardinal. On dira qu'un A -module à gauche est de type c , s'il possède un système générateur de cardinal inférieur ou égal à c .

Rappelons les résultats suivants :

PROPRIÉTÉ 2.1. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° A est noethérien à gauche ;

2° Toute somme directe de A -modules à gauche injectifs est un A -module à gauche injectif ([1], [15]) ;

3° Tout A -module à gauche injectif est somme directe d'injectifs indécomposables ([11], [15]).

THÉORÈME 2.1. - A est un anneau noethérien à gauche si, et seulement si, il existe un cardinal c tel que tout A -module à gauche injectif soit somme directe de A -modules à gauche de type c .

Condition nécessaire. - D'après la propriété 2.1, il suffit de montrer qu'il existe un cardinal c tel que, pour tout module injectif indécomposable M , on ait $\text{Card}(M) \leq c$. On a $M = E(C)$, où C est un sous-module monogène. Or, les

types de A -modules à gauche monogènes forment un ensemble (car $C \simeq A/I$), et il en est donc de même pour les types de A -modules à gauche injectifs indécomposables. Soit $\{M_i\}_{i \in I}$ un ensemble de représentants. Posant $c_i = \text{Card}(M_i)$, il suffit de prendre $c = \sum_{i \in I} c_i$.

Réciproque. - Montrons que, si $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, où les M_i sont des A -modules à gauche injectifs, alors M est injectif. On peut supposer que chaque M_i est de type c d'après l'hypothèse, que $c \geq \text{Card}(A)$, et que c et $d = \text{Card } I$ sont infinis.

Soit B un ensemble tel que $\text{Card}(B) \geq 2^{cd}$. Posons :

$$N_i = \prod_{b \in B} M_{i,b}, \quad \text{où } M_{i,b} \simeq M_i, \quad P = \prod_{i \in I} N_i.$$

P est injectif, donc $P = \bigoplus_{g \in G} Q_g$, où Q_g est de type c . Supposons I bien ordonné, et soit 1 son premier élément. Soit $b_1 \in B$. Tout élément de M_{1,b_1} est contenu dans une somme directe finie de Q_g . Puisque M_{1,b_1} est de type c , on a

$$M_{1,b_1} \subseteq P_1 = \bigoplus_{g \in G_1} Q_g, \quad \text{avec } \text{Card}(G_1) \leq c.$$

Montrons, par récurrence transfinie, que, pour tout $\alpha \in I$, il existe des parties G_α de G , deux à deux disjointes, avec $\text{Card}(G_\alpha) \leq c$, et que $P_\alpha = \bigoplus_{g \in G_\alpha} Q_g$ contient un sous-module M'_{α,b_α} isomorphe à M_{α,b_α} .

Pour cela, supposons la propriété vraie pour tout $\gamma < \alpha$. Posons

$$H_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} G_\gamma, \quad S_\alpha = \bigoplus_{g \in H_\alpha} Q_g = \bigoplus_{\gamma < \alpha} P_\gamma.$$

P_γ est de type c , et $\text{Card } H_\alpha \leq cd$. Donc $\text{Card } S_\alpha \leq cdc = cd$. Par suite, S_α a au plus 2^{cd} sous-ensembles. Les $M_{\alpha,b} \cap S_\alpha$, $b \in B$, sont des sous-modules de S_α distincts ou nuls. Puisque $\text{Card } B > 2^{cd}$, il existe $b_\alpha \in B$ tel que

$$M_{\alpha,b_\alpha} \cap S_\alpha = 0.$$

Soit φ la projection de M_{α,b_α} dans $\bigoplus_{g \notin H_\alpha} Q_g$ parallèlement à S_α . φ est injective, et $M'_{\alpha,b_\alpha} = \varphi(M_{\alpha,b_\alpha})$ est isomorphe à M_{α,b_α} . Un argument semblable à celui utilisé au début montre que

$$M'_{\alpha,b_\alpha} \subseteq P_\alpha = \bigoplus_{g \in G_\alpha} Q_g, \quad \text{Card}(G_\alpha) \leq c, \quad \text{et } G_\alpha \cap G_\gamma = \emptyset, \quad \forall \gamma < \alpha.$$

Posant $H = \bigcup G_\alpha$, on a

$$P = \left(\bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha \right) \oplus \left(\bigoplus_{g \in H} Q_g \right).$$

M'_{α, b_α} , étant injectif, est facteur direct de P_α , et $\bigoplus_{\alpha \in I} M'_{\alpha, b_\alpha}$ est facteur direct de P , donc injectif puisque P est injectif. Alors $H \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} M'_{\alpha, b_\alpha}$ est injectif.

COROLLAIRE 2.1. - A est noethérien à gauche si, et seulement si, il existe un cardinal d tel que tout A-module à gauche injectif soit somme directe des enveloppes injectives de modules de type d.

La condition est nécessaire, par la propriété 2.1.

Réciproquement, soit L un A -module à gauche libre de rang d . Tout injectif est somme directe de $E(L/K)$, K sous-module de L . Les L/K forment un ensemble. Il suffit de prendre $c = \sum_K c_K$, où $c_K = \text{Card } E(L/K)$, et d'appliquer le théorème 2.1.

COROLLAIRE 2.2. - Si tout A-module à gauche injectif est somme directe de modules injectifs indécomposables, A est noethérien à gauche.

En effet, tout injectif indécomposable est enveloppe injective d'un sous-module monogène.

3. Enveloppes injectives de type fini.

LEMME 3.1. - Soit A un anneau noethérien à gauche semi-premier. Si $E(A)$ est de type fini, $A = E(A)$, et par suite A est un anneau semi-simple.

D'après le théorème de Goldie [7], il suffit de montrer que A coïncide avec son anneau de fractions à gauche $Q = E(A)$. Q est un A -module à gauche noethérien. Soit b régulier dans A . On a

$$A \subseteq Ab^{-1} \subseteq \dots \subseteq Ab^{-n} \subseteq \dots$$

Il existe n tel que $Ab^{-n} = Ab^{-(n+1)}$. Alors $b^{-(n+1)} = ab^{-n}$, $a \in A$, d'où $b^{-1} \in A$, et $A = Q$.

THÉORÈME 3.1. - Soient A un anneau noethérien à gauche, N son idéal nilpotent maximum. Si $E_A(A/N)$ est de type fini sur A, alors R est artinien à gauche.

Soit $Q = E_{A/N}(A/N)$. Q est aussi un A -module, extension essentielle du A -module A/N , et par suite $Q \subseteq E_A(A/N)$. D'après l'hypothèse, Q est donc un A -mo-

dule de type fini, donc un (A/N) -module de type fini. Le lemme 3.1 montre que A/N est un anneau semi-simple. A est donc semi-primaire et noethérien à gauche. Il est, par suite, artinien à gauche.

COROLLAIRE 3.1. - Soit A un anneau noethérien à gauche tel que l'enveloppe injective de tout A -module à gauche monogène soit de type fini. Alors A est artinien à gauche.

PROPOSITION 3.1. - Soient a et b deux cardinaux, $a > b$, et C un A -module à gauche de type b tel que $E(C)$ soit contenu dans une somme directe de modules de type $< a$.

(a) Si $a = \aleph_0$, $E(C)$ est de type fini ;

(b) Si $b \geq \aleph_0$, $E(C)$ est de type a .

On a $E(C) \subseteq \bigoplus_{i \in I} M_i$, où M_i est de type a . Tout générateur de C est contenu dans une somme directe finie, et par suite

$$C \subseteq M = \bigoplus_{i \in I'} M_i.$$

Si $b < \aleph_0$, alors $c = \text{Card}(I') < \aleph_0$.

Si $b \geq \aleph_0$, alors $c = \text{Card}(I') = b$.

Soit φ la projection de $\bigoplus_{i \in I} M_i$ sur M . $\text{Ker}(\varphi) \cap C = (0)$ implique

$$\text{Ker}(\varphi) \cap E(C) = (0),$$

et $\varphi(E(C))$ est isomorphe à $E(C)$.

Si $a = \aleph_0$, alors $b < \aleph_0$ et $c < \aleph_0$. M est de type fini, donc $\varphi(E(C))$, qui est facteur direct, est de type fini.

Si $b \geq \aleph_0$, alors $c = b$, M est de type a , et aussi $\varphi(E(C))$.

COROLLAIRE 3.2. - Soit A un anneau. Tout A -module à gauche projectif, injectif, et indécomposable, est isomorphe à un facteur direct de A .

Soit M un tel module. $M = E(C)$, où C est monogène. M , étant projectif, est contenu dans une somme directe de modules isomorphes à A . D'après la proposition, on a donc $E(C) \subseteq A_1 \oplus \dots \oplus A_n$, $A_i \simeq A$. Soit k le plus petit entier tel que A^k contienne un sous-module N isomorphe à M . $A^k = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$, $A_i \simeq A$. N étant co-irréductible, on ne peut avoir $N \cap A_i \neq (0)$, $\forall i$, sinon $N \cap A_i \cap N \cap A_j \neq (0)$. Supposons $N \cap A_k = 0$, alors la projection φ de A^k sur $A_1 \oplus \dots \oplus A_{k-1}$, parallèlement à A_k , injecte N dans A^{k-1} . On a donc $k = 1$.

4. Caractérisation des modules artiniens à gauche.

On utilisera un théorème de Kaplansky [10].

THÉOREME 4.1. - Si un A -module à gauche M est somme directe de modules de type dénombrable, alors tout facteur direct de M a la même propriété.

THÉOREME 4.2. - Si tout A -module à gauche est contenu dans une somme directe de modules de type fini, A est artinien à gauche.

Soit M un A -module à gauche injectif. M est facteur direct d'une somme directe de modules de type fini. D'après le théorème 4.1, M est somme directe de modules de type dénombrable. Le théorème 2.1 prouve que A est noethérien à gauche.

Soit C un module monogène. $E(C)$, étant contenu dans une somme directe de modules de type fini, est de type fini, d'après la proposition 3.1. Le corollaire 3.1 implique que A est artinien à gauche.

COROLLAIRE 4.1. - Soit A un anneau commutatif. A est artinien si, et seulement si, tout module injectif est somme directe de modules de type fini.

En effet, tout injectif indécomposable sur A noethérien est de type fini [12].

La réciproque du théorème 4.2 n'est pas vraie, en général [16].

5. Cogénérateurs.

Soit $\mathcal{M}$ la catégorie des A -modules à gauche.

DÉFINITION 5.1. - Un A -module à gauche C est un cogénérateur dans $\mathcal{M}$ si tout A -module à gauche M est isomorphe à un sous-module d'un produit de modules isomorphes à C .

Cette définition équivaut à :

Pour tout homomorphisme $f \neq 0$, $f : M \rightarrow N$, $M, N \in \text{Ob}(\mathcal{M})$, il existe $g : N \rightarrow C$ tel que $g \circ f \neq 0$.

C injectif est un cogénérateur, si, et seulement si, il contient un sous-module isomorphe à tout module simple.

DÉFINITION 5.2. - Un A -module à gauche G est un générateur dans $\mathcal{M}$ si tout A -module à gauche M est le quotient d'une somme directe de modules isomorphes à G .

Cette définition équivaut à :

Pour tout $f : M \rightarrow N$, $f \neq 0$, il existe $g : G \rightarrow M$, $f \circ g \neq 0$.

G projectif est générateur, si tout module simple est un quotient de G .

THÉOREME 5.1. - Si A_s est un cogénérateur dans $\mathcal{M}$, et si $A/\text{rad}(A)$ est un anneau semi-simple, alors A est auto-injectif à gauche.

$J = \text{rad}(A)$ est le radical de Jacobson de A .

Soient S un module à gauche simple, et f l'injection $f : S \rightarrow E(S)$. A_s étant cogénérateur, il existe $g : E(S) \rightarrow A$, $g \circ f \neq 0$. On a $\text{Ker}(g) \cap f(S) = 0$, d'où $\text{Ker}(g) = 0$.

A/J étant semi-simple, il n'y a qu'un nombre fini de types de A -modules à gauche simples. Soit $\{S_1, \dots, S_n\}$ des représentants de ces types. On peut, d'après ce qui précède, supposer $E(S_i) \subseteq A$, et la somme des $E(S_i)$ est directe.

Soit $G = \bigoplus_{i=1}^n E(S_i)$. G est injectif, et projectif. $E(S_i)$ étant indécomposable et facteur direct de A , on a $E(S_i) = Ae_i$, où e_i est un idempotent primitif de A . Alors $E(S_i)/JE(S_i) = Ae_i/Je_i \simeq (A/J)\bar{e}_i$, où $\bar{e}_i$ est la classe de e_i dans A/J . A/J étant semi-simple, $(A/J)\bar{e}_i$ est un (A/J) -module semi-simple.

$$\text{End}((A/J)\bar{e}_i) \simeq \bar{e}_i(A/J)\bar{e}_i \simeq e_i Ae_i / e_i Je_i.$$

Or, puisque Ae_i est injectif indécomposable, $\text{End}(Ae_i) \simeq e_i Ae_i$ est un anneau local, dont le radical est $e_i Je_i$. $\text{End}(A/J \bar{e}_i)$ est donc un corps, et par suite $(A/J)\bar{e}_i$ est un (A/J) -module simple, donc un A -module simple. De plus, $(A/J)\bar{e}_i \simeq (A/J)\bar{e}_j$ implique $Ae_i \simeq Ae_j$. Tout module simple est isomorphe à un $E(S_i)/JE(S_i)$, et est donc isomorphe à un quotient de G . G est un générateur dans $\mathcal{M}$. Il existe un épimorphisme $\bigoplus_{\alpha} G_{\alpha} \rightarrow A_s$, où $G_{\alpha} \simeq G$. A_s , étant projectif, est isomorphe à un facteur direct de $\bigoplus_{\alpha} G_{\alpha}$, et l'on peut supposer cette somme directe finie. Or G est injectif, donc A_s est injectif à gauche.

6. Caractérisation des anneaux quasi-frobeniusiens.

PROPOSITION 6.1. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1° Tout A -module à gauche monogène est contenu dans un module projectif ;
- 2° Tout idéal à gauche de A est l'annulateur à gauche d'une partie finie de A .

Alors tout A -module à gauche monogène est contenu dans un module libre de type fini.

1° implique 2° : - Soit I un idéal à gauche. A/I est un A -module à gauche monogène qui est contenu dans un module projectif, donc dans un module libre L , que l'on peut supposer de rang fini, $L \simeq A^n$. Soient 1 l'élément neutre de A , $\bar{1}$ sa classe dans A/I . $\bar{1} = (x_1, \dots, x_n) \in A^n$. Pour tout $a \in A$,

$$\bar{a} = (ax_1, \dots, ax_n) .$$

Il en résulte que $a \in I$ si, et seulement si, $ax_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, et $I = \mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_n\})$.

2° implique 1°. - Tout A -module à gauche monogène est isomorphe à A/I . $I = \mathcal{L}(\{x_1, \dots, x_n\})$. L'application $\bar{a} \mapsto (ax_1, \dots, ax_n)$ injecte A/I dans A^n .

On démontre de même la proposition suivante :

PROPOSITION 6.2. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Tout A -module à gauche monogène est contenu dans un produit de modules isomorphes à A_s ;

2° Tout idéal à gauche est un annulateur à gauche.

THÉORÈME 6.1. - Un anneau A est quasi-frobénusien si, et seulement si, tout A -module à gauche injectif est projectif.

Condition nécessaire. - A étant noethérien, il suffit (propriété 2.1) de montrer que tout injectif indécomposable est projectif. Un tel module M s'écrit $M = E(C)$, où C est monogène. D'après la proposition 6.1, il existe un monomorphisme $C \rightarrow A_s^n$ qui s'étend, puisque A_s est injectif, en un monomorphisme $E(C) \rightarrow A_s^n$. $E(C)$ est donc projectif.

Réciproque. - La condition implique que tout A -module à gauche est contenu dans un module libre, donc dans une somme directe de A -modules à gauche monogènes. D'après le théorème 4.2, A est artinien à gauche. De plus, A_s est un cogénérateur, et $A/\text{rad}(A)$ est semi-simple. Le théorème 5.1 prouve que A est auto-injectif à gauche, et par suite quasi-frobénusien.

COROLLAIRE 6.1. - A est quasi-frobénusien, si, et seulement si, A est artinien à gauche (ou à droite), et A_s est un cogénérateur de $\mathcal{M}$.

THÉORÈME 6.2. - A est quasi-frobénusien si, et seulement si, tout A -module à gauche injectif est somme directe de modules monogènes, chacun isomorphe à un idéal à gauche principal et indécomposable de A .

Cela résulte du corollaire 3.2 et du théorème 6.1.

COROLLAIRE 6.2. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1° A est quasi-frobéniusien ;
- 2° Tout A -module est contenu dans un A -module libre.

COROLLAIRE 6.3. - A est quasi-frobéniusien si, et seulement si, A est noethérien à droite, et si A_s est un cogénérateur de $\mathcal{M}$.

Si A_s est cogénérateur, d'après la proposition 6.2, tout idéal à gauche est un annulateur à gauche. Puisque A est noethérien à droite, il est alors artinien à gauche, et le corollaire 6.1 donne le résultat.

COROLLAIRE 6.4. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1° A est quasi frobéniusien ;
- 2° Tout A -module à gauche (resp. à droite) monogène est contenu dans un module projectif ;
- 3° Tout idéal à gauche (resp. à droite) de A est l'annulateur à gauche (resp. à droite) d'une partie finie de A .

Les 2° et 3° sont équivalents d'après la proposition 6.1, et le 1° implique le 2° d'après le théorème 6.1.

Le 3° implique le 1°. Il suffit de prouver que A est noethérien. Soit I un idéal à gauche. $Q = r(I)$ est un idéal à droite, et $Q = r(J)$, où J est un idéal à gauche de type fini. Puisque tout idéal à gauche est annulateur à droite, il en résulte $I = J$. A est noethérien à gauche, et aussi à droite par le même argument.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHASE (Stephen U.). - Direct products of modules, Trans. Amer. math. Soc., t. 97, 1960, p. 457-473.
- [2] CURTIS (Charles W.) and REINER (Irving). - Representation theory of finite groups and associative algebras. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Pure and applied Mathematics, 11).
- [3] DIEUDONNÉ (Jean). - Remarks on quasi-frobenius rings, Illinois J. of Math., t. 2, 1958, p. 346-354.
- [4] EILENBERG (Samuel) and NAKAYAMA (Tadasi). - On the dimension of modules and algebras, II, Nagoya math. J., t. 9, 1955, p. 1-16.

- [5] FAITH (Carl). - Rings with ascending condition on annihilators, Nagoya math. J., t. 27, 1966, p. 179-191.
 - [6] FAITH (Carl) and WALKER (Elbert A.). - Direct-sum of injective modules, J. of algebra, t. 5, 1967, p. 203-221.
 - [7] GOLDIE (A. W.). - Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 10, 1960, p. 201-220.
 - [8] IKEDA (Masatosi). - A characterization of quasi-frobenius rings, Osaka math. J., t. 4, 1952, p. 203-209.
 - [9] IKEDA (Masatosi) and NAKAYAMA (Tadasi). - On some characteristic properties of quasi-frobenius and regular rings, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 15-19.
 - [10] KAPLANSKY (I.) and COHEN (I. S.). - Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules, Math. Z., t. 54, 1951, p. 97-101.
 - [11] MATLIS (Eben). - Injective modules over noetherian rings, Pacific J. of Math., t. 8, 1958, p. 511-528.
 - [12] MORITA (Kiiti). - Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum conditions, Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A, t. 6, 1958, p. 83-142.
 - [13] MORITA (Kiiti) and TACHIKAWA (Kiyoyuki). - Character modules, submodules of a free module, and quasi-frobenius rings, Math. Z., t. 65, 1956, p. 414-428.
 - [14] NAKAYAMA (Tadasi). - On frobeniusean algebras, Ann. of Math., 2nd series, t. 40, 1939, p. 611-633 ; t. 42, 1941, p. 1-21.
 - [15] PAPP (Zoltan). - On algebraically closed modules, Publ. Math., Debrecen, t. 6, 1959, p. 311-327.
 - [16] ROSENBERG (Alex) and ZELINSKY (Daniel). - Annihilators, Portug. Math., t. 20, 1961, p. 53-65.
-