

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

GUY RENAULT

Anneaux self-injectifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 1 (1965-1966), exp. n° 11,
p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_1_A9_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNEAUX SELF-INJECTIFS

par Guy RENAULT

Le but de cet exposé est de donner une démonstration plus simple d'un théorème de Y. UTUMI [1] : Si A est un anneau self-injectif à gauche, et si R désigne son radical de Jacobson, alors l'anneau-quotient A/R est self-injectif. Cette nouvelle rédaction annule une rédaction antérieure.

1. Anneau des endomorphismes d'un module injectif.

Soit A un anneau unitaire. Tous les modules considérés sont des A -modules à gauche. Rappelons le résultat classique suivant :

THÉOREME 1.1. - Le radical de Jacobson $R(B)$ de l'anneau des endomorphismes B d'un A -module injectif E , est l'ensemble des endomorphismes φ de B tels que $\text{Ker } \varphi$ soit un sous-module essentiel de E ; l'anneau-quotient $B/R(B)$ est régulier (au sens de Von NEUMANN).

Nous allons nous préoccuper de l'étude du relèvement des idempotents de l'anneau $B/R(B) = C$; si $x \in B$, on désignera par \bar{x} son image canonique dans C .

LEMME 1.1. - Soient e et f deux idempotents de B tels que $\bar{e}\bar{f} = 0$; il existe un idempotent p de B tel que :

- (a) $ep = 0$,
- (b) $Bp = Bf$.

Par hypothèse, $ef = \varphi$, où φ est un élément de $R(B)$. On en déduit $\varphi \circ f = \varphi$. Soit ψ la restriction de f à $\text{Ker } \varphi$ qui est essentiel dans E ; ψ est un projecteur, et on a : $\text{Ker } \varphi = \text{Im } \psi \oplus \text{Ker } \psi$.

$$ef(\text{Ker } \varphi) = 0 \implies \text{Im } \psi \subset \text{Ker } e.$$

Soit $E(\text{Im } \psi)$ une enveloppe injective de $\text{Im } \psi$ contenue dans $\text{Ker } e$. E peut s'écrire :

$$E = E(\text{Im } \psi) \oplus E(\text{Ker } \psi) ;$$

on désignera par p (resp. q) la projection canonique de E sur $E(\text{Im } \psi)$.

$$\text{Ker } q \subset \text{Ker } e \implies e = \lambda q ,$$

et par suite $ep = 0$. D'autre part, p et f coïncident sur $\text{Ker } \varphi$, d'où

$$p - f = \lambda \varphi ;$$

de la relation $\varphi = \varphi \circ f$, il résulte que

$$p = (1 + \lambda \varphi)f , \quad \varphi \in R(B) \implies 1 + \lambda \varphi \text{ inversible et } Bp = Bf .$$

LEMME 1.2. - Soit A un anneau régulier ; si $x, y \in A$ sont tels que

$$Ax \cap Ay = (0) ,$$

il existe un idempotent e tel que :

$$(a) \quad Ax = Ae ,$$

$$(b) \quad ye = 0 .$$

On a $Ax + Ay = Aq$, où q est un idempotent, avec $q = \alpha x + \beta y$, si $u \in Aq$, alors $u = uq$, d'où les relations :

$$y \cdot \alpha x = 0 , \quad (\alpha x)^2 = \alpha x ,$$

il suffit de poser $e = \alpha x$.

LEMME 1.3. - Soient e, f deux idempotents de B , tels que $C\bar{e} \cap C\bar{f} = (0)$. Alors $Be \cap Bf = (0)$, et il existe un idempotent p tel que $Bf = Bp$, avec $e \cdot p = 0$ et $Be + Bf = B(e + p - pe)$.

D'après le lemme 1.2, on peut trouver un élément idempotent \bar{g} tel que $C\bar{g} = C\bar{f}$ et $\bar{e}\bar{g} = 0$, $g \in Bf$. D'après le lemme 1.1, il existe un idempotent p de Bf tel que $\bar{p} = \bar{g}$, avec $ep = 0$.

Nous allons montrer que $Bf = Bp$. Supposons $Bp \subsetneq Bf$, alors $\text{Ker } p \supsetneq \text{Ker } f$.

$$E = \text{Ker } f \oplus I_1 \oplus \text{Im } p , \quad \text{avec } \text{Ker } f \oplus I_1 = \text{Ker } p .$$

Soit f_1 un idempotent tel que

$$\text{Ker } f = \text{Ker } f_1 , \quad \text{Im } f_1 = I_1 \oplus \text{Im } p ,$$

et soit q un autre idempotent avec

$$\text{Ker } q = \text{Ker } f \oplus \text{Im } p , \quad \text{Im } q = I_1 .$$

$$Bf_1 = Bf \quad \text{et} \quad f_1 = p + q , \quad \text{avec } pq = qp = 0 .$$

On en déduit

$$\overline{f_1} = \overline{p} + \overline{q} ; C\overline{f_1} = C\overline{f} = C\overline{p} \implies \overline{f_1} = \overline{\lambda p} ,$$

d'où $\overline{\lambda p} = \overline{p} + \overline{q}$ et $\overline{q}^2 = 0$, ce qui est absurde.

$$Be + Bf = Be + Bp = B(e + p - pe) ,$$

car $ep = 0$.

2. Le théorème d'Utumi.

PROPOSITION 2.1. - Soit $(e_i)_{i \in I}$ un ensemble d'idempotents de B tel que la somme $\sum_i Ce_i$ soit directe ; alors la somme $\sum_i Be_i$ est directe.

Il suffit de le prouver lorsque I est fini, et on le démontre par récurrence en utilisant le lemme 1.3.

LEMME 2.1. - Soit A un anneau régulier ; si J est un idéal à gauche de A , il existe un ensemble d'idempotents $(e_i)_{i \in I}$ tel que J soit extension essentielle de la somme directe $\sum_i Ae_i$.

Il suffit d'appliquer le théorème de Zorn !

THÉORÈME [1]. - Soit B un anneau injectif à gauche. Si $R(B)$ désigne le radical de Jacobson de B , l'anneau-quotient $A = B/R(B)$ est injectif à gauche.

Il est suffisant de montrer que tout B -homomorphisme f d'un idéal à gauche I de A dans A est donné par la multiplication à droite d'un élément de A .

D'après le lemme 2.1 et le théorème 1.1, on peut trouver un système $(x_i)_{i \in I}$ d'idempotents de B tel que la somme $\sum_i Ax_i$ soit essentielle dans A . La proposition 2.1 montre que la somme $\sum_i Bx_i$ est directe dans B . Pour chaque i , la restriction de f à Ax_i est donnée par la multiplication à droite par un élément $\overline{y_i}$ de A . On en déduit un homomorphisme g de $\sum_i Bx_i$ dans B défini par $g(x_i) = x_i y_i$. B est injectif, il existe $y \in B$ tel que $x_i y_i = x_i y$ pour tout $i \in I$. \overline{y} définit un homomorphisme h de A dans A tel que $f = h$ sur $\sum_i Ax_i$. Soit $a \in I$; il existe un idéal essentiel P de A tel que

$$Pa \subset \sum_i Ax_i ,$$

et on a

$$P(f - h)a = 0 ;$$

on sait que dans un anneau régulier l'annulateur d'un élément non nul n'est pas un idéal essentiel, il en résulte que $f(a) = h(a)$, et h prolonge f à A .

Le théorème précédent suggère le problème suivant (compte-tenu du paragraphe 1) :

PROBLÈME I. - Si B désigne l'anneau des endomorphismes d'un module injectif E , et si $R(B)$ désigne son radical, l'anneau-quotient $B/R(B)$ est-il injectif ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] UTUMI (Y.). - On continuous rings and self injective rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 118, 1965, p. 158-173.
-