

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

DANIÈLE LAMBOT DE FOGÈRES

Propriétés géométriques liées aux parenthésages d'un produit de m facteurs. Application à une loi de composition partielle

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 2 (1964-1965), exp. n° 20, p. 1-21

http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_2_A1_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES LIÉES AUX PARENTHÉSAGES D'UN PRODUIT
DE m FACTEURS
APPLICATION À UNE LOI DE COMPOSITION PARTIELLE

par Mme Danièle LAMBOT de FOUGÈRES

Introduction.

Considérons un ensemble E muni d'une loi de composition T notée multiplicativement. Cette opération pourra être partout définie ou non, associative ou non. Soit un "mot" $M = a_0 a_1 \dots a_i \dots a_{n+1}$ de $n + 2$ lettres ; $a_i \in E, i = 1, 2, \dots, n + 1$. Pour donner un sens, par multiplications binaires successives, à cette écriture formelle, il faut grouper les lettres dans un système de parenthèses.

On appellera "parenthésage" tout système de parenthèses donnant un sens au mot M .

On appellera "monôme" tout ensemble $a_i a_{i+1} \dots a_{i+j}$ de lettres contenues dans une parenthèse notée

$$\rho_i^j, \text{ avec } \begin{cases} i \geq 0 \\ i + j \leq n + 1 \end{cases},$$

l'une des inégalités au moins étant stricte.

On appellera $\{\mathcal{N}\}$ l'ensemble des parenthésages de $n + 2$ lettres, et on se propose ici de représenter géométriquement $\{\mathcal{N}\}$ et d'examiner l'influence sur l'associativité d'un produit de m lettres d'une opération non partout définie.

1. Repérage d'un parenthésage de $\{\mathcal{N}\}$.

1° Dans $\{\mathcal{N}\}$, considérons le parenthésage dont toutes les fermetures de parenthèses sont à la fin du mot : exemple $a_0(a_1(a_2(a_3 a_4)))$. On peut, par déplacement de ces parenthèses vers la gauche, obtenir de nouveaux éléments de $\{\mathcal{N}\}$ (dans l'exemple, de nouveau élément de $\{3\}$). Par des déplacements successifs, on obtiendra ainsi tous les éléments de $\{\mathcal{N}\}$. Les éléments de $\{\mathcal{N}\}$ ont tous le même nombre de parenthèses et ne diffèrent entre eux que par la position des parenthèses ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Dov TAMARI et Mrs Haya FREEDMAN ont montré que la relation R :

$$A_1(A_2 A_3) R (A_1 A_2)A_3,$$

A_1, A_2, A_3 étant des monômes de M , induisait sur $\{\mathcal{N}\}$ une relation d'ordre partiel et que $\{\mathcal{N}\}$ avait une structure de treillis pour cette relation R : treillis T_n .

2° Nombre de parenthèses nécessaires pour parenthéser un élément de $\{N\}$.

Conventions : Dans ce paragraphe, et sauf mention du contraire, on utilisera, en plus des parenthèses indispensables, une parenthèse extérieure :

Exemple : $\langle \rangle$ dans $\langle a_0[a_1(a_2 a_3)] \rangle$.

Pour parenthéser 2 lettres, il faut donc 1 parenthèse. Pour parenthéser 3 lettres, il faut donc 2 parenthèses.

Supposons que pour m lettres, il faille $m - 1$ parenthèses. Ajoutons la lettre a_m à la droite du mot $M' = \{a_0 a_1 \dots a_{m-1}\}$ supposé parenthésé : une parenthèse extérieure est alors nécessaire $\langle \{a_0 a_1 \dots a_{m-1}\} a_m \rangle$. Il faudra donc $m + 1$ parenthèses pour chaque parenthésage.

Donc, pour chaque parenthésage de $\{N\}$, il faudra employer $n + 1$ parenthèses.

3° Nombre de parenthésages de m lettres, k_m .

Les opérations de multiplication sur un mot M s'effectuent successivement en tenant compte des parenthèses. La dernière opération est de la forme $A_1 A_2$, où A_1 , A_2 désignent des monômes ou des lettres.

On a évidemment $k_2 = 1$ et $k_3 = 2$. Pour calculer k_m , il suffit de faire la somme des nombres de parenthésages de la forme $A_1 A_2$. Isolons une lettre à la fin du mot, c'est-à-dire considérons les parenthésages $A_1 A_2$ avec $a_{m-1} = A_2$: le nombre de tels parenthésages est k_{m-1} .

Isolons maintenant $a_{m-2} a_{m-1}$; à la fin du mot, le nombre de tels parenthésages est $k_{m-2} \cdot k_2$. Si on isole j lettres à la fin du mot, le nombre de parenthésages est alors $k_{m-j} \cdot k_j$. On a donc

$$k_m = k_{m-1} + k_{m-2} \cdot k_2 + \dots + k_{m-j} \cdot k_j + \dots + k_{m-1}$$

$$k_m = \sum_{j=1}^{m-1} k_{m-j} \cdot k_j$$

en posant $k_1 = 1$ par convention (2).

(2) JACOBSON "Lectures in abstract algebra" [3], vol. 1, p. 19, a donné une autre formule pour ce nombre

$$k_m = \prod_{p=1}^m \frac{4p-2}{p+1}$$

(démonstration en utilisant les séries formelles). Dov TAMARI a retrouvé la formule ci-dessus par un procédé purement algébrique : nous donnons ici une autre démonstration de cette même formule.

Remarquons que ce nombre k_m est aussi le nombre de puissances m^e distinctes d'un élément lorsque T n'est pas associative.

4° Coordonnées d'un parenthésage.

Soit $M = a_0 a_1 \dots a_{n+1}$. J'appelle place k la place qui précède immédiatement la lettre a_k , et e_k le nombre des ouvertures de parenthèses à la place k .

A tout parenthésage de $\{N\}$, on peut faire correspondre une suite e_0, e_1, \dots, e_n de $n + 1$ nombres entiers non négatifs, satisfaisant aux relations :

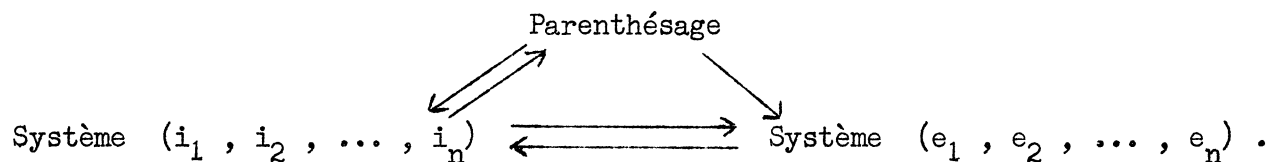
$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{v=j}^n e_v \leq n - j + 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{v=0}^n e_v = n + 1 \end{array} \right.$$

La dernière relation a déjà été démontrée, les autres se démontrent par récurrence.

Réciproquement. - Etant donnés n nombres, satisfaisant aux relations

$$(1') \quad \sum_{v=j}^n e_v \leq n - j + 1 \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

on peut faire correspondre à cette suite e_1, e_2, \dots, e_n un parenthésage de $n + 2$ lettres. Il suffit pour cela de savoir où se ferment les parenthèses ouvertes aux places $1, 2, \dots, n$. La démonstration est assez longue et nécessite un second système de parenthésage avec i_1, i_2, \dots, i_n et $i_k =$ place de la k -ième parenthèse. On montre par récurrence, qu'à tout système i_1, i_2, \dots, i_n , on peut faire correspondre un parenthésage : d'où le schéma de démonstration



Définition. - On appelle coordonnée d'un parenthésage toute suite de n nombres, e_1, e_2, \dots, e_n entiers, non négatifs, satisfaisant (1').

2. Interprétation géométrique de $\{N\}$ par un polyèdre.

A tout parenthésage, on peut faire correspondre un point de R^n , défini par ses coordonnées satisfaisant (1').

A $\{\pi\}$, on peut faire correspondre un polyèdre de \mathbb{R}^n défini par les relations

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{v=j}^n e_v \leq n - j + 1, & j = 1, 2, \dots, n \\ e_j \geq 0 \end{cases}$$

et noté H_n .

Les images des parenthésages sont alors les points à coordonnées entières satisfaisant (2). Ces points sont appelés sommets du polyèdre.

1° Représentation géométrique des polyèdres H_1 , H_2 , H_3 .

(a) H_1 . - H_1 est défini par :

$$0 \leq e_1 \leq 1.$$

Sur un axe muni d'une unité, Oe_1 , on peut donc le représenter par le segment OA

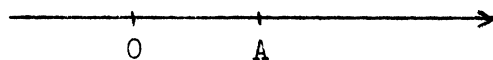


Figure 1

Les sommets sont les points 0 (0) et A (1), et chaque sommet est l'image d'un parenthésage de 3 lettres.

(b) H_2 . - H_2 est défini par

$$\begin{cases} e_2 \leq 1 & e_1 \geq 0 \\ e_1 + e_2 \leq 2 & e_2 \geq 0. \end{cases}$$

Considérons deux axes concourants, munis d'une unité Oe_1 , Oe_2 ; le polyèdre H_2 est représenté par OBAD :

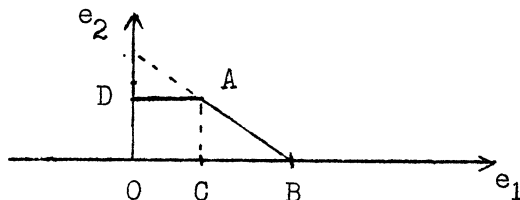


Figure 2

Les sommets sont les points à coordonnées entières situées à l'intérieur ou sur la frontière de ce polygone : soient les points O, C, B, A, D. H_2 est un pentagone convexe.

(c) H_3 est défini par

$$\begin{cases} e_3 \leq 1 & e_1 \geq 0 \\ e_2 + e_3 \leq 2 & e_2 \geq 0 \\ e_1 + e_2 + e_3 \leq 3 & e_3 \geq 0. \end{cases}$$

On peut représenter H_3 par rapport à trois axes concourants, munis d'une unité, sous forme d'un polyèdre à 3 dimensions :

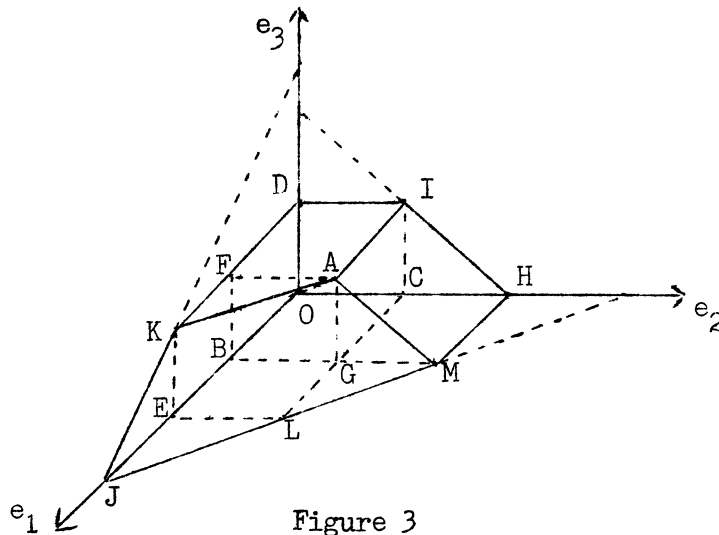


Figure 3

Les 14 sommets sont :

O	(0, 0, 0)
B	(1, 0, 0)
C	(0, 1, 0)
D	(0, 0, 1)
E	(2, 0, 0)
F	(1, 0, 1)
G	(1, 1, 0)
H	(0, 2, 0)
I	(0, 1, 1)
J	(3, 0, 0)
K	(2, 0, 1)
L	(2, 1, 0)
M	(1, 2, 0)
A	(1, 1, 1)

Ce polyèdre H_3 est également convexe, et nous définirons plus loin ses faces.

2° Polyèdre H_n .

Il est défini par les relations (2). On peut le représenter dans un espace à n dimensions, et ses sommets sont les points à coordonnées entières satisfaisant (2).

(a) Frontière de H_n . - Tout polyèdre H_n est défini par (2), c'est-à-dire par $2n$ inégalités non strictes supposées numérotées de 1 à $2n$. On appellera hyperplan-frontière $\mathcal{H}_n^{(i)}$ l'ensemble des points de \mathbb{R}^n obtenus en remplaçant dans (2) la i -ième inégalité par une égalité :

$$(2') \quad i \leq n \begin{cases} \sum_{v=j}^n e_v \leq n - j + 1, & j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ \sum_{v=i}^n e_v = n - i + 1 \\ e_j \geq 0, & \forall j \end{cases}$$

$$\text{ou } i > n \begin{cases} \sum_{v=j}^n e_v \leq n - j + 1, & j = 1, \dots, n \\ e_j \geq 0, & j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ e_i = 0 \end{cases}$$

L'ensemble de tous les $\mathcal{H}_n^{(i)}$, lorsque i varie de 1 à $2n$, constitue la frontière de H_n , notée \mathcal{H}_n .

Par exemple, l'ensemble \mathcal{H}_3 est constitué des polygones KAMLJ : $[\mathcal{H}_5^{(3)}]$, AIHM : $[\mathcal{H}_3^{(2)}]$, DIAKF : $[\mathcal{H}_3^{(1)}]$, DIHCO : $[\mathcal{H}_3^{(4)}]$, DOBEJKF : $[\mathcal{H}_3^{(5)}]$, OBEJLMHC : $[\mathcal{H}_3^{(6)}]$ (voir figure 3).

(b) Convexité des polyèdres H_n .

Définitions :

Côté d'un hyperplan. - Considérons dans l'espace R^n un hyperplan, c'est-à-dire l'ensemble des points dont les coordonnées sont liées par une relation linéaire :

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i - \beta = 0, \quad \alpha_i, \beta \in R.$$

On dit que des points sont du même côté de l'hyperplan si leurs coordonnées, substituées à e_1, e_2, \dots, e_n dans le premier membre de (3), donnent au premier membre de (3) le même signe.

Convexité d'un polyèdre H_n . - On dira qu'un polyèdre H_n est convexe s'il est tout entier situé du même côté de l'un quelconque de ses hyperplans-frontière.

Démonstration. - Considérons d'abord l'hyperplan-frontière $\mathcal{H}_n^{(1)}$. C'est une restriction de l'hyperplan $e_n - 1 = 0$. Tous les points de H_n donnent, par définition de ces points, le même signe négatif à $e_n - 1$, donc ils sont tous du même côté de $e_n - 1 = 0$, donc de $\mathcal{H}_n^{(1)}$. On démontrerait de même que H_n est du même côté de l'un quelconque de ses hyperplans-frontière $\mathcal{H}_n^{(j)}$, restriction des hyperplans $\sum_{v=j}^n e_v = n - j + 1$ ou $e_j = 0$.

Remarque. - Nous définirons plus loin les faces des H_n qui appartiennent aux hyperplans-frontière de manière à retrouver, dans le cas $n = 3$ (ou $n = 2$), les définitions de la convexité de la géométrie élémentaire.

3° Opération produit sur les polyèdres H_n .

(a) Définition du produit de deux polyèdres H_i, H_j . - Soient H_i le polyèdre défini par rapport à un système de i axes OD_1, OD_2, \dots, OD_i par les inégalités

$$\sum_{v=k}^i D_v \leq i - k + 1 \quad k = 1, 2, \dots, i,$$

et H_j le polyèdre défini par rapport à un système de j axes Od_1, Od_2, \dots, Od_j par :

$$\sum_{v=k}^j d_v \leq j - k + 1 \quad k = 1, 2, \dots, j.$$

On appellera produit $H_i \times H_j$ de ces deux polyèdres, le polyèdre défini dans R^{i+j} par les relations suivantes (l'espace R^{i+j} est rapporté aux axes $Oe_1, Oe_2, \dots, Oe_{i+j}$, obtenus en identifiant $Oe_k, 1 \leq k \leq i$, avec Od_k , et $Oe_{k+i}, 1 \leq k \leq j$, avec Od_k),

$$(4) \quad \begin{cases} \sum_{v=k}^i e_v \leq i - k + 1 & k = 1, 2, \dots, i \\ \sum_{v=k}^j e_{i+v} \leq j - k + 1 & k = 1, 2, \dots, j. \end{cases}$$

On pourrait définir, comme pour les polyèdres H_n , les hyperplans-frontière de ces polyèdres $H_i \times H_j$, et montrer de même que ces polyèdres sont convexes. La démonstration serait la même.

(b) Exemple de produit de polyèdres : $H_1 \times H_2$. - Soient trois axes Oe_1, Oe_2, Oe_3 , et par rapport à ces trois axes le polyèdre défini par les relations :

$$\begin{cases} e_1 \leq 1 \\ e_3 \leq 1 \\ e_2 + e_3 \leq 2 \end{cases}$$

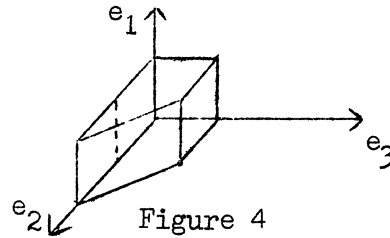


Figure 4

On obtient un prisme à base pentagonale. (Voir figure 4 ci-dessus.)

(c) Propriétés du produit de deux polyèdres. - Le produit $H_i \times H_j$ est commutatif. En effet, permuter les indices revient à changer le nom des axes Oe_k et ne modifie pas la forme du polyèdre.

On peut introduire dans ce produit un élément neutre H_0 tel que

$$H_0 \times H_i = H_i \times H_0 \quad \text{quel que soit } i.$$

Ce polyèdre H_0 , de dimension 0, sera représenté par un point.

On peut définir, par récurrence, un produit de p polyèdres : $H_{i_1} \times H_{i_2} \times \dots \times H_{i_p}$. Le polyèdre produit sera de dimension $i_1 + i_2 + \dots + i_p$. Ce produit est associatif de par sa définition même.

Exemple : $H_1 \times H_1 \times H_1$ peut être représenté par un "cube".

3. Forme des "faces" du polyèdre H_n .

1° Définition.

Considérons, parmi les parenthésages $\{\mathcal{N}\}$, le sous-ensemble obtenu en fixant une parenthèse ρ_k^j dans le mot M ,

$$a_0 a_1 \dots a_{k-1} (a_k \dots a_{k+j}) a_{k+1} \dots a_{n+1} .$$

Nous allons montrer qu'on peut faire correspondre à ce sous-ensemble de $\{\mathcal{N}\}$, un sous-ensemble de H_n de dimension $n - 1$.

On appellera face de dimension $n - 1$ de H_n , tout sous-ensemble de H_n correspondant aux parenthésages obtenus en fixant une parenthèse dans M .

Nous montrerons aussi que toute face de dimension $n - 1$ appartient à un hyperplan-frontière $\mathcal{H}_n^{(i)}$.

Cette définition peut se généraliser pour définir les faces de dimension $n - i$. En fixant i parenthèses dans M , nous définissons un sous-ensemble de $\{\mathcal{N}\}$ auquel on peut faire correspondre un sous-ensemble de H_n , de dimension $n - i$, que nous appellerons "face de dimension $n - i$ ".

Cas particulier. - Si on fixe n parenthèses, le sous-ensemble de $\{\mathcal{N}\}$ est réduit à un parenthésage, et on lui associe un sous-ensemble de H_n de dimension 0, c'est-à-dire un sommet de H_n .

2° Forme des faces de dimension $n - 1$.

Considérons le sous-ensemble de $\{\mathcal{N}\}$ défini par ρ_k^j dans M . Nous allons chercher à interpréter ce sous-ensemble obtenu en laissant fixe la parenthèse ρ_k^j . Les coordonnées des parenthésages des $j + 1$ lettres groupées dans la parenthèse ρ_k^j , satisfont à :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{v=h}^{j-1} \delta_v \leq j - h \quad h = 1, 2, \dots, j - 1 \\ \sum_{v=0}^{j-1} \delta_v = j . \end{array} \right.$$

Remarquons que pour un parenthésage P de $\{\mathcal{N}\}$, δ_0 n'est pas obligatoirement égal à e_k , car les parenthèses comptées dans δ_0 se ferment toutes à des places $\leq k + j + 1$.

Considérons maintenant le monôme ρ_k^j comme une lettre. On obtient un nouveau mot de $n + 2 - (j + 1) + 1$ lettres, soit $n - j + 2$ lettres. Les coordonnées

d_1, d_2, \dots, d_{n-j} des parenthésages de ces $n - j + 2$ lettres satisfont à

$$(6) \quad \sum_{v=h}^{n-j} d_v \leq n - j - h + 1 \quad h = 1, 2, \dots, n - j$$

Les coordonnées δ et d sont liées aux coordonnées e du parenthésage $\in \{\mathcal{N}\}$ par

$$(7) \quad \begin{cases} e_v = d_v, & 1 \leq v \leq k - 1 \\ e_k = d_k + \delta_0 \text{ ou } e_k = d_k + j - (\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{j-1}) \\ e_{k+v} = \delta_v, & 1 \leq v \leq j - 1 \\ e_{k+j} = 0 \\ e_{j+v} = d_v, & k + 1 \leq v \leq n - j. \end{cases}$$

Posons

$$\begin{cases} e_i = e'_i, & i \neq k \\ e_k = e'_k + j. \end{cases}$$

Soient $[E']$ la $(n, 1)$ -matrice des e' et $[D]$ la $(n, 1)$ -matrice :

$$d_1, \dots, d_k, \delta_1, \dots, \delta_{j-1}, \delta_j = 0, d_{k+1}, \dots, d_{n-j};$$

on a alors $[E'] = [M][D]$. $[M]$ désigne une (n, n) -matrice d'éléments b_c^l (l , indice de ligne),

$$\begin{cases} b_c^l = 0, & l > c \\ b_c^l = 1, & l = c \\ b_c^k = -1, & k < c < k + j \\ b_c^l = 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

Géométriquement, on peut interpréter ces transformations par un simple changement de base. L'espace R^n est rapporté à un système d'axes $(1) Oe_1, Oe_2, \dots, Oe_n$, on fait une translation des axes définie par le vecteur $\overrightarrow{OO'}$ $(0, 0, \dots, j, 0, \dots, 0)$ j étant la k -ième coordonnée, puis on fait le changement de base admettant $[M]$ comme matrice de passage. La matrice $[M]$ définit les nouveaux axes par rapport aux anciens. Les nouveaux axes ont pour nom $O'd_1, \dots, O'd_k, O'\delta_1, \dots, O'\delta_{j-1}, O'\delta_j, O'd_{k+1}, \dots, O'd_{n-j}$ (système (2)).

Dans ce nouveau système d'axes, on peut associer au sous-ensemble de $\{\mathcal{N}\}$ défini par \mathcal{P}_k^j , le polyèdre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{v=h}^{j-1} \delta_v \leq j - h \\ \sum_{v=h}^{n-j} d_v \leq n - j - h + 1 . \end{array} \right.$$

Ce polyèdre est le produit $H_{j-1} \times H_{n-j}$.

Nous remarquons que cette face de dimension $n - 1$ définie par ρ_k^j appartient à l'hyperplan-frontière $\mathcal{H}_n^{(k+j+n)}$ c'est-à-dire à l'hyperplan $e_{k+j} = 0$. Nous pouvons aussi constater que, dans cet hyperplan-frontière, il y a plusieurs faces : toutes les faces définies par une parenthèse se fermant à la place $k + j + 1$. Si la parenthèse définissant la face se fermait à la fin du mot M , type ρ_k^{n+1-k} , alors cette face appartiendrait à l'hyperplan-frontière $\mathcal{H}_n^{(n+1-k)}$. Dans l'expression précédente de l'hyperplan-frontière, k peut varier de 1 à n : si $k = 1$, la face obtenue est de la forme $H_0 \times H_{n-1} = H_{n-1}$; si $k = n$, la face obtenue est aussi de cette forme.

Dans le cas particulier où $n = 3$, nous obtenons, pour faces de dimension 2, des polyèdres de la forme $H_0 \times H_2 = H_2$ ou $H_1 \times H_1$ (quadrilatères).

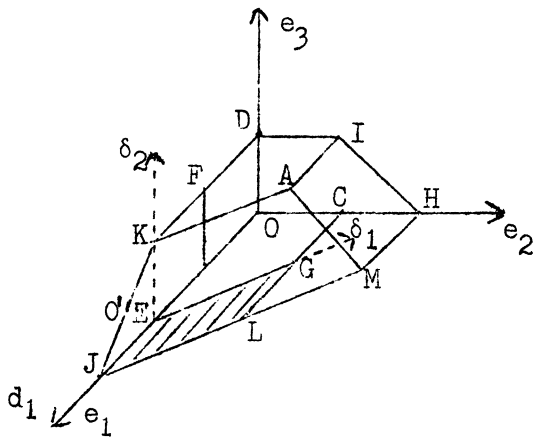


Figure 5

face	obtenue par :
DIAKF	ρ_3^1
IHMA	ρ_2^3
KAMLJ	ρ_1^3
DIHCO	ρ_0^1
DOBF	ρ_0^2
FBEJK	ρ_1^1
OCGEB	ρ_0^3
CGIMH	ρ_2^1
EGLJ	ρ_1^2

Démontrons ce résultat pour la face obtenue par $\rho_1^2 : a_0(a_1 a_2 a_3)a_4$.

$\overline{OO'}$ (2, 0, 0), la matrice $[M]$ devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

D'où les composantes des vecteurs de base des nouveaux axes :

$$\overrightarrow{0'd_1} (1, 0, 0) ; \quad 0'\delta_1 (-1, 1, 0) ; \quad 0'\delta_2 (0, 0, 1) .$$

La face définie par cette parenthèse satisfait aux conditions :

$$\begin{cases} d_1 \leq 1 \\ \delta_1 \leq 1 . \end{cases}$$

3° Forme des faces de dimension $n - i$.

Fixons, dans le mot, i parenthèses. (Ces parenthèses peuvent être emboîtée, extérieure, ou emboîtée gauche, c'est-à-dire qu'elle se ferme au même endroit que celle qui la précède, ou emboîtée droite, c'est-à-dire s'ouvrant au même endroit que celle qui la précède.)

Par une translation, puis un changement de base défini par une matrice, on se ramène encore, comme précédemment, à un produit de polyèdres :

$$(8) \quad H_{r_1} \times H_{r_2} \times \dots \times H_{r_{i+1}} \quad \text{avec} \quad r_1 + r_2 + \dots + r_{i+1} = n - i .$$

Cette face, obtenue en fixant i parenthèses dans M , est de dimension $n - i$.

THÉORÈME . - Tout polyèdre $H_{r_1} \times H_{r_2} \times \dots \times H_{r_{i+1}}$, $\sum_{j=1}^{j=i+1} r_j = n - i$, est une face de dimension $n - i$.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de montrer qu'on peut placer i parenthèses dans le mot M de manière que le sous-espace de H_n associé soit de la forme $H_{r_1} \times H_{r_2} \times \dots \times H_{r_{i+1}}$.

Groupons, dans une parenthèse, $r_1 + 2$ lettres parmi les $n + 2$. Ceci est toujours possible, car $r_1 \leq n - i \implies r_1 < n$, et peut en général se faire de plusieurs façons.

Le nouveau mot, après le groupement précédent, comporte alors

$$n + 2 - (r_1 + 2) + 1 = n - r_1 + 1$$

lettres ou monômes. Extrayons $r_2 + 2$ lettres ou monômes, et groupons-les dans une deuxième parenthèse. La condition de possibilité s'écrit :

$$r_2 + 2 < n - r_1 + 1$$

$$r_1 + r_2 < n - 1 ,$$

ou encore :

$$n - i - (r_3 + \dots + r_{i+1}) < n - 1$$

$$1 < i + (r_3 + \dots + r_{i+1}) .$$

Cette dernière inégalité est toujours réalisée si $i \geq 2$.

Si $i = 1$, les termes r_3 , etc. n'existent pas. On peut placer une parenthèse, la deuxième n'existe pas : elle englobe M tout entier. On a obtenu ainsi une face de dimension $n - 1$.

Si $i > 1$, on peut placer une deuxième parenthèse, et essayer d'en placer une troisième. Ceci est possible, si $2 < i + (r_4 + \dots + r_{i+1})$. Ce qui est réalisé pour $i \geq 3$.

Au bout de $i - 1$ opérations analogues, on pourra placer une i -ième parenthèse, si $i - 1 < i + r_{1+i}$, ce qui est bien réalisé. Donc on peut placer (de plusieurs façons en général) i parenthèses dans le mot M .

PROPOSITION 1. - Toute face de dimension $n - i$ est commune à i faces de dimension $n - i + 1$.

En effet, une face de dimension $n - i$ correspond à un sous-ensemble de $\{\pi\}$ obtenu en fixant i parenthèses. En supprimant l'une quelconque de ces parenthèses, on obtient une face de dimension $n - i + 1$, donc, en supprimant successivement les i parenthèses, on obtient i faces distinctes de dimension $n - i + 1$, chacune étant définie par les $i - 1$ parenthèses non supprimées.

4. Nombre des faces du polyèdre H_n .

1° Nombre des faces de dimension $n - 1$ d'une forme donnée.

Cherchons le nombre des faces de la forme $H_{r_1} \times H_{r_2}$ avec $r_1 + r_2 = n - 1$.
Groupons $r_1 + 2$ lettres dans une parenthèse ; le problème est possible de $n + 2 - (r_1 + 2) + 1$ façons, soit $n - r_1 + 1$ façons.

Mais on obtiendra une face de même forme en groupant $r_2 + 2$ lettres dans une parenthèse, ce qui est possible de $n - r_2 + 1$ façons, et donne des faces distinctes des précédentes si $r_1 \neq r_2$.

Si $r_1 \neq r_2$, on obtient $n - r_1 + 1 + n - r_2 + 1 = n - (r_1 + r_2) + 2 = n + 3$ faces de la forme $H_{r_1} \times H_{r_2}$.

Si $r_1 = r_2$, on obtient seulement $n - r_1 + 1$ faces, soit encore

$$n - \frac{n - 1}{2} + 1 = \frac{n + 3}{2}$$

faces de la forme $H_{r_1} \times H_{r_1}$. (Remarquons que $r_1 = r_2$ exige que n soit impair.)

Exemple : $n = 3$; on obtient

$$3 H_1 \times H_1 \text{ ou } 3 \text{ quadrilatères}$$

$$\text{et } 6 H_0 \times H_2 \text{ ou } 6 \text{ pentagones.}$$

2° Nombre total des faces de dimension $n - 1$.

Définition. - On appellera décomposition d'un polyèdre H_n à l'ordre 1, l'ensemble de ses faces de dimension $n - 1$. On notera $D(H_n)^1$ cette décomposition, et $d(H_n)^1$ désignera le nombre des faces de la décomposition. On trouve facilement

$$(9) \quad D(H_n)^1 = \frac{n+3}{2} \sum_{\substack{r_1+n-1 \\ r_1+r_2=n-1 \\ r_1=0}}^{r_1=n-1} H_{r_1} \times H_{r_2} .$$

Pour calculer $d(H_n)^1$, il suffit de calculer le nombre de partitions ordonnées de $n - 1$ en 2 nombres, 0 compris. On trouve $n - 1$. Donc

$$d(H_n)^1 = \frac{(n+3)(n-1)}{2} .$$

Dans le cas $n = 3$, on trouve bien 9 faces de dimension 2 .

3° Nombre de faces de dimension $n - i$.

THÉORÈME. - Le nombre des faces de forme $H_{r_1} \times H_{r_2} \times \dots \times H_{r_{i+1}}$ avec $\sum_{k=1}^{i+1} r_k = n - i$ est égal à

$$(10) \quad N(r_1, r_2, \dots, r_{i+1}) = \frac{(n+3)(n+4) \dots (n+i+2)}{s_0! s_1! \dots s_{n-i}!} ,$$

dans laquelle s_p désigne le nombre des éléments de la suite r_1, r_2, \dots, r_{i+1} supposée ordonnée, égaux à p , $0 \leq p \leq n - i$.

Cette formule est conforme au résultat trouvé pour $i = 1$. En effet, si $r_1 + r_2 = n - 1$, ou bien les nombres r_1 et r_2 sont différents et $s_{r_1}! = s_{r_2}! = 1$, ou bien les nombres r_1 et r_2 sont égaux et $s_{r_1}! = 2! = 2$.

La démonstration de ce théorème se fait par récurrence et en utilisant la proposition 1 du paragraphe 3. Elle ne présente aucune difficulté, mais est très longue.

4° Nombre total des faces de dimension $n - i$.

On appelle décomposition d'un polyèdre H_n à l'ordre i , l'ensemble de ses faces de dimension $n - i$. On notera cette décomposition $D(H_n)^i$ et le nombre des faces de dimension $n - i$ sera noté $d(H_n)^i$.

(a) PROPOSITION 2. - Le nombre des faces de dimension $n - i$ est

$$d(H_n)^i = \frac{(n+3)(n+4) \dots (n+i+2)}{(i+1)!} \mathfrak{p}_{n-i}^{i+1}.$$

Dans cette formule, \mathfrak{p}_{n-i}^{i+1} est le nombre des partitions de $n - i$ en $i + 1$ nombres, 0 compris, en considérant comme différentes des partitions qui diffèrent par l'ordre des composants. En effet, le nombre des permutations différentes de r_1, r_2, \dots, r_{i+1} est $\frac{(i+1)!}{s_0! s_1! \dots s_{n-i}!}$, donc :

$$\begin{aligned} N(r_1, r_2, \dots, r_{i+1}) \\ = \frac{(n+3)(n+4) \dots (n+i+2)}{(i+1)!} \times \text{nombre de permutations de } r_1, r_2, \dots, r_{i+1}. \end{aligned}$$

De là découle la proposition 2 en faisant varier r_1, r_2, \dots, r_{i+1} de toutes les façons possibles.

(b) PROPOSITION 3.

$$(11) \quad d(H_n)^i = \frac{\binom{n+i+2}{i} \binom{n}{i}}{i+1}.$$

Pour calculer \mathfrak{p}_m^p , nous utiliserons la formule de récurrence évidente :

$$(11') \quad \mathfrak{p}_m^p = \mathfrak{p}_m^{p-1} + \mathfrak{p}_{m-1}^p$$

avec, de façon triviale,

$$\mathfrak{p}_0^p = 1 \quad \text{quel que soit } p,$$

$$\mathfrak{p}_m^0 = 0 \quad \text{quel que soit } m,$$

$$\mathfrak{p}_m^1 = 1 \quad \text{quel que soit } m,$$

$$\mathfrak{p}_1^p = p \quad \text{quel que soit } p.$$

Ces relations permettent de calculer facilement \mathfrak{p}_2^2 , puis \mathfrak{p}_2^3 . On montre facilement, par récurrence, que $\mathfrak{p}_2^q = \frac{3 \times 4 \times \dots \times (q+1)}{(q-1)!}$.

Prenons comme nouvelle base de récurrence

$$(12) \quad \mathfrak{p}_m^p = \frac{(m+1)(m+2) \dots (m+p-1)}{(p-1)!} \quad \text{pour } m \leq m_0 \text{ et quel que soit } p.$$

Cette proposition a été démontrée pour $m_0 = 1$ et pour $m_0 = 2$. La récurrence se démontre simplement en utilisant (11'). En remplaçant \mathfrak{p}_{n-1}^{i+1} par sa valeur tirée de (12), on trouve :

$$d(H_n)^i = \frac{(n+3)(n+4) \dots (n+i+2)}{(i+1)!} \frac{(n-i+1)(n-i+2) \dots (n)}{i!},$$

d'où (11).

Applications.

Nombre des arêtes du polyèdre H_n . - Il suffit de remplacer, dans la formule (11), i par $n-1$.

$$d(H_n)^{n-1} = \binom{2n+1}{n-1} = \frac{(2n+1)(2n) \dots (n+3)}{(n-1)!}.$$

Pour $n=3$, on trouve $\frac{7 \times 6}{2} = 21$ arêtes.

Nombre des sommets de H_n . - Il suffit de remplacer, dans la formule (11), i par n .

$$d(H_n)^n = k_{n+2} = \frac{\binom{2n+2}{n}}{n+1}.$$

On peut vérifier que cette valeur est la même que la formule de la note de bas de page (2). Pour $n=3$, on obtient 14 sommets.

5° Application des formules précédentes à la formule d'Euler-Poincaré.

La formule d'Euler-Poincaré, relative à un polyèdre de R^n , s'énonce de la façon suivante :

$$(13) \quad \sum_{i=-1}^{i=n} (-1)^{i+1} V^i = 0$$

avec V^i = nombre des faces de dimension i et $V^{-1} = 1$ (nombre d'ensemble vide);
ici

$$V^{n-j} = \frac{\binom{n+j+2}{j} \binom{n}{j}}{j+1}.$$

On a donc à vérifier :

$$(14) \quad 1 + \sum_{j=1}^{j=n} (-1)^{n-j+1} \frac{\binom{n+j+2}{j} \binom{n}{j}}{j+1} + (-1)^{n+1} = 0.$$

On remarquera que $\frac{\binom{n}{j}}{j+1} = \frac{\binom{n+1}{j+1}}{n+1}$; (14) se ramène donc à

$$(15) \quad 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sum_{j=0}^{j=n} (-1)^j \binom{n+1}{j+1} \binom{n+j+2}{j} = 0.$$

Cette expression se calcule facilement en identifiant les termes en x^n dans les

deux membres de l'expression

$$(16) \quad (1+x)^{n+1} [x - (1+x)]^{n+1} = (-1)^{n+1} (1+x)^{n+1},$$

ou

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} x^{n-i+1} (1+x)^{n+i+1} = (-1)^{n+1} (1+x)^{n+1};$$

on trouve alors

$$\sum_{j=0}^{j=n} (-1)^j \binom{n+1}{j+1} \binom{n+j+2}{j} = (-1)^n (n+1),$$

ce qui démontre la proposition.

5. Cas où la loi T n'est pas partout définie.

1° Nécessité d'étudier l'associativité de plus de trois éléments.

Définition. - Etant donné un n-uple ordonné a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , $a_i \in E$, pour $i = 0, 1, \dots, n-1$, nous dirons qu'il vérifie B_2 si, chaque fois que l'opération est définie,

$$A_1(A_2 A_3) = (A_1 A_2)A_3$$

quels que soient les monômes ou lettres A_1, A_2, A_3 , $A_1, A_2, A_3 \subset M$.

Nous dirons de la même façon qu'il vérifie B_p si, chaque fois que l'opération est définie,

$$P_1(A_1, A_2, \dots, A_p) = P_2(A_1, A_2, \dots, A_p)$$

quels que soient les monômes ou lettres A_1, A_2, \dots, A_p , et les parenthésages P_1 et $P_2 \in \{P - 2\}$

$$A_i \subset M, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Si l'opération T est partout définie, on démontre que, quel que soit n,

$$B_3 \implies B_p, \quad 4 \leq p \leq n.$$

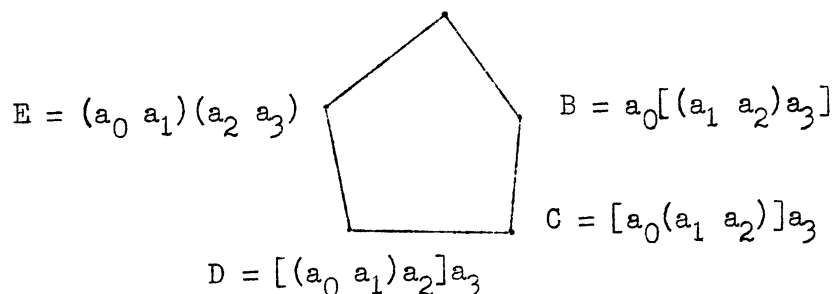
Il n'en est pas de même lorsque T n'est pas partout définie.

En effet, prenons $n = 4$, et supposons B_3 . Soient deux parenthésages de 4 lettres :

$$A = a_0[a_1(a_2 a_3)] \quad \text{et} \quad C = [a_0(a_1 a_2)]a_3.$$

On peut les représenter géométriquement par deux sommets d'un pentagone H_2 :

$$A = a_0[a_1(a_2 a_3)]$$



$$E = (a_0 a_1)(a_2 a_3)$$

$$B = a_0[(a_1 a_2)a_3]$$

$$C = [a_0(a_1 a_2)]a_3$$

$$D = [(a_0 a_1)a_2]a_3$$

Pour aller de A en C , on peut suivre les chemins ABC ou $AEDC$, mais l'existence des produits B ou E ou D n'est pas incluse dans l'hypothèse B_3 . L'existence de A et C implique l'existence de

$$a_2 a_3 = b_0$$

$$a_1 a_2 = b'_0$$

$$a_1 b_0 = b_1$$

$$a_0 b'_0 = b'_1$$

mais on ne suppose pas que $b'_0 a_3$ existe, donc on ne peut peut-être pas emprunter le chemin ABC .

De même, on ne suppose pas l'existence de $a_0 a_1$, ni celle de $(a_0 a_1)(a_2 a_3)$, ce qui ne permet pas de prendre le chemin $AEDC$.

Donc pour assurer que le 4-uple $a_0 a_1 a_2 a_3$ satisfait B_4 , il faudra vérifier, en plus de B_3 , un nombre maximum de relations égal au nombre de diagonales de H_2 , soit 5. (Ceci est un nombre maximum, car certains des sommets peuvent disparaître par non définition et donc les diagonales qui les joignent.)

Dans les paragraphes suivants, nous allons chercher à interpréter géométriquement les lois B_i , $i \leq n + 2$ en considérant le polyèdre H_n . Il nous faut pour cela donner un certain nombre de définitions.

2° Faces des produits de polyèdres H_r .

Soit un produit de polyèdres $P_{i,j} = H_i \times H_j$ de dimension $i + j$. H_i (respectivement H_j) peut se décomposer à l'ordre 1 suivant ses "faces" de dimension $i - 1$ (respectivement $j - 1$).

Définitions.

(a) On appellera décomposition à l'ordre 1 de $P_{i,j}$ l'expression suivante :

$$D(P_{i,j})^1 = D(H_i)^1 \times H_j + H_i \times D(H_j)^1,$$

ou, en utilisant la formule 9 :

$$D(P_{i,j})^1 = \frac{i+3}{2!} H_j \sum_{k=0}^{k=i-1} H_k \times H_{i-k-1} + \frac{j+3}{2!} H_i \times \sum_{k=0}^{k=j-1} H_k \times H_{j-k-1} .$$

Exemple. - Si $P_{i,j} = P_{1,2} = H_1 \times H_2$,

$$D(P_{1,2})^1 = 2 H_0 \times H_0 \times H_2 + 5 H_0 \times H_1 \times H_1 = 2 H_2 + 5 H_1 \times H_1 .$$

La décomposition à l'ordre 1 d'un prisme à base pentagonale se compose de 2 pentagones et de 5 quadrilatères.

(b) La décomposition à l'ordre 1 de $P_{i,j}$ est l'ensemble de ses faces de dimension $i + j - 1$.

(c) On peut définir de même l'ensemble des faces de dimension $i + j - p$:

$$(17) \quad D(P_{i,j})^p = D(H_i)^p \times H_j + H_i \times D(H_j)^p .$$

(d) Dans le cas d'un produit de plus de 2 polyèdres, les définitions précédentes s'étendent : Soit $P_{r_1, r_2, \dots, r_{i+1}} = H_{r_1} \times H_{r_2} \times \dots \times H_{r_{i+1}}$; l'ensemble des faces de dimension $r_1 + r_2 + \dots + r_{i+1} - p$, ou décomposition à l'ordre p de ce polyèdre, est alors donné par la formule :

$$(18) \quad D[(P_{r_1, r_2, \dots, r_{i+1}})]^p = \sum_{j=1}^{j=i+1} [D(H_{r_j})^p \times \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{s=i+1} H_{r_s}] .$$

(e) On appelle diagonale propre d'un polyèdre H_n ou d'un produit de polyèdres P de dimension n , les diagonales qui ne sont pas en même temps diagonales de leurs faces de dimension k , $1 \leq k \leq n - 1$. On notera h_n le nombre de diagonales propres de H_n . On a déjà trouvé $h_1 = 1$ et $h_2 = 5$. On notera $n(r_1, r_1, \dots, r_{i+1})$ le nombre de diagonales propres de $H_{r_1} \times \dots \times H_{r_{i+1}}$.

3° PROPOSITION 4. - Le nombre de diagonales propres de H_n est le même que le nombre de relations qu'il faut ajouter à B_{n+1} pour vérifier B_{n+2} .

Ceci a été démontré , pour $n = 2$, au paragraphe 1. Supposons que cette proposition ait été démontré pour $n \leq n_0 - 1$, et montrons qu'elle est encore vraie pour n_0 .

LEMME. - Soit un polyèdre H_{n_0} représentant les parenthésages $\{\mathcal{N}_0\}$; étant donnée une face $H_{r_1} \times H_{r_2} \times \dots \times H_{r_{i+1}}$ avec $\sum_{j=1}^{i+1} r_j = n - i$, toute diagonale propre de cette face peut être associée à une application successive des lois B_{r_1+2} , B_{r_2+2} , \dots , $B_{r_{i+1}+2}$.

En effet, prenons une face de la forme $H_{r_1} \times H_{r_2} \times \dots \times H_{r_{i+1}}$ déterminée par i parenthèses fixes, et prenons 2 parenthésages P_1 et P_2 appartenant à cette face. (Il suffit pour cela de conserver les i parenthèses et de placer $n_0 - i + 1$ autres parenthèses de 2 façons différentes.)

Par application de B_{r_1+2} ($r_1 + 2 \leq n_0 - 1$), on peut ramener le monôme de $r_1 + 2$ lettres de P_1 , à être identique au monôme de $r_1 + 2$ lettres de P_2 . Après avoir appliqué successivement B_{r_1+2} , B_{r_2+2} , ..., $B_{r_{i+1}+2}$, à P_1 , on obtiendra P_2 .

Exemple :

$$P_1 = (a_0 a_1) [(a_2 a_3) (a_4 a_5)]$$

$$P_2 = a_0 [a_1 \{ [a_2 (a_3 a_4)] a_5 \}]$$

qui sont deux parenthésages de $\{4\}$ qui appartiennent à une face de la forme $H_1 \times H_2$ (la parenthèse ρ_2^3 étant fixe). En appliquant B_4 à P_1 , on obtient : $P'_1 = (a_0 a_1) \{ [a_2 (a_3 a_4)] a_5 \}$, puis en appliquant B_3 à P'_1 , on retrouve P_2 .

Démonstration de la proposition 4. - Soient deux parenthésages de $\{n_0\}$ représentés par deux sommets de H_{n_0} . S'ils appartiennent à une face de dimension k ($k < n_0$), on peut passer de l'un à l'autre par applications successives des lois B_i ($i \leq k + 2 \leq n_0 + 1$). S'ils n'appartiennent pas à une face, ils sont extrémités d'une diagonale propre, et on ne peut passer de l'un à l'autre que par application de B_{n_0+2} . Il nous reste à montrer qu'il existe de tels parenthésages. Il suffit de prendre les deux parenthésages contenant, l'un toutes les ouvertures de parenthèses au début du mot : $(0, 0, 0, \dots, 0)$, l'autre toutes les fermetures de parenthèses à la fin du mot : $(1, 1, 1, \dots, 1)$.

Ce théorème donne aussi un procédé de calcul de h_{n_0} (sous réserve que l'on sache calculer le nombre de diagonales propres de ses faces). Soit $h_n =$ (nombre de façons de joindre les sommets deux à deux) - $(\sum_{k=1}^{n-1}$ nombre de diagonales propres des faces de dimension k).

4° Calcul de h_n .

(a) Calcul de h_3 . -

Faces de dimension 2 : 3 quadrilatères, d'où $3 \times 2 = 6$ diagonales,
6 pentagones, d'où $6 \times 5 = 30$ diagonales,
Faces de dimension 1 : 21 arêtes 21 diagonales,
Nombre de sommets : 14

$$h_3 = \binom{14}{2} - (6 + 30 + 21) \quad h_3 = 34.$$

(b) Formule donnant le nombre de diagonales propres d'une face de H_n . -

Soit la face

$$H_{r_1} \times H_{r_2} \times \dots \times H_{r_{i+1}} \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{i+1} r_j = n - i .$$

On montre par récurrence, en utilisant les décompositions à l'ordre $1, 2, \dots, n-i-1$ de cette face, que :

$$(19) \quad n(r_1, r_2, \dots, r_{i+1}) = 2^i \times h_{r_1} \times h_{r_2} \times \dots \times h_{r_{i+1}}$$

avec la convention que $h_0 = 1/2$.

(c) Formule donnant h_n en fonction des h_j , $j < n$.

$$(20) \quad h_n = \binom{\binom{2n+2}{n}}{\binom{n+1}{2}} - \sum_{i=1}^{n-1} \left[2^i \sum_{\substack{r_1, \dots, r_{i+1}=0 \\ r_1 + \dots + r_{i+1} = n-i}}^{n-i} (h_{r_1} \times h_{r_2} \times \dots \times h_{r_{i+1}}) \right] .$$

Application au calcul de h_4 . - Diagonales des faces obtenues par décomposition d'ordre donné :

ordre	forme de la face	nombre de faces	nombre de diagonales par face	nombre total de diagonales
1	$H_0 \times H_3$	7	34	238
	$H_1 \times H_2$	7	10	70
2	$H_0 \times H_0 \times H_2$	28	5	140
	$H_0 \times H_1 \times H_1$	28	2	56
3	$H_0 \times H_0 \times H_0 \times H_1$	84	1	84

Nombre total de diagonales : 588.

$$k_6 = 42 ,$$

$$h_4 = \binom{42}{2} - 588 = 273 .$$

On peut calculer ainsi par récurrence h_5, h_6 , etc. On n'aperçoit pas de loi de formation simple de ces nombres.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] de FOUGÈRES (Danièle). - Loi d'associativité A_6 , Séminaire Apéry-Tamari, Faculté des Sciences de Caen, 1962/63, n° 7.
- [2] de FOUGÈRES (Danièle). - Etude géométrique de lois d'associativité, Conférence faite à l'Université de New York [29 juillet 1964. Buffalo (Etats-Unis)].
- [3] JACOBSON (Nathan). - Lectures in abstract algebra. Volume 1. - New York, D. Van Nostrand, 1951 (The University Series in higher Mathematics).
- [4] FREEDMAN (Haya) et TAMARI (Dov). - Les treillis T_n induits par une loi demi-associative (non publié).
- [5] TAMARI (Dov). - Où il est montré que la notion d'associativité est une notion plus complexe que ne le laisse supposer l'algèbre élémentaire, Séminaire Apéry-Tamari, Faculté des Sciences de Caen, 1962/63, n° 1.
- [6] TAMARI (Dov). - Problème d'associativité des monoïdes et problème des mots pour les groupes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 16, 1962/63, n° 7, 29 p.
-