

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ROGER DESQ

Structures des demi-groupes ayant tous leurs sous-demi-groupes homomorphiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 18, n° 1 (1964-1965), exp. n° 3, p. 1-23

http://www.numdam.org/item?id=SD_1964-1965__18_1_A3_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

STRUCTURES DES DEMI-GROUPES
AYANT TOUS LEURS SOUS-DEMI-GROUPES HOMOMORPHIQUES

par Roger DESQ

1. Introduction.

Dans ce même séminaire, le 23 mars 1964, Pierre LEFEBVRE a exposé un travail de D. W. MILLER [9], travail dans lequel l'auteur donnait une généralisation des groupes hamiltoniens. Si l'image homomorphe d'un demi-groupe contient un élément neutre 1 [resp. un zéro 0], l'auteur appelle 1-noyau [resp. 0-noyau] l'image réciproque de cet élément. Dans une première partie, il étudie les demi-groupe D dans lesquels tout sous-demi-groupe non trivial est le 1-noyau d'un homomorphisme convenable de D ; la fin de l'article est consacrée à la caractérisation des demi-groupe D dans lesquels tout sous-demi-groupe non trivial est le 0-noyau d'un homomorphisme de D .

Si un sous-demi-groupe S du demi-groupe D est le 1-noyau d'un homomorphisme, S est en particulier unitaire. L'étude des demi-groupe ayant tous leurs sous-demi-groupe non triviaux unitaires est donc un problème plus général.

THÉORÈME 1.1. - Tout sous-demi-groupe non trivial d'un demi-groupe D est unitaire à droite si, et seulement si,

- D est un demi-groupe d'ordre 2,
- ou bien si D est isomorphe au produit direct d'un zéro-demi-groupe à gauche par un groupe périodique.

Supposons que tout sous-demi-groupe non trivial de D soit unitaire à droite. Soit x un élément de D ; considérons $S = \{x^2, x^3, \dots, x^4, \dots\}$, si x^2 est différent de x^3 , S est un sous-demi-groupe non trivial qui contient $x \cdot x^2$ et x^2 , S contient x . Pour tout élément x de D , nous avons donc $x^2 = x^3$ ou $x = x^n$ ($n \geq 3$). D est un demi-groupe périodique, l'ensemble I de ses idempotents n'est pas vide.

Soient e et f deux idempotents distincts de D . Si ef n'est pas un idempotent, considérons le sous-demi-groupe S engendré par ef ; S n'est pas trivial, donc les relations $e \cdot ef \in S$, $ef \in S$, donnent $e \in S$, c'est-à-dire $e = (ef)^n$ et $ef = e$, ce qui est impossible. I est stable.

Si ef est différent de fe , considérons $T = \{ef, fe, efe, fef\}$; T est un sous-demi-groupe non trivial, donc T contient e et f .

$$e = ef \implies T = \{e, fe\} \implies f = fe .$$

$$e = fe \implies e = efe .$$

$$e = efe \implies \left\{ \begin{array}{l} f = ef \implies f = fef \\ \text{ou } f = fe \implies f = fef \\ \text{ou } f = fef \end{array} \right\} \implies f = fef .$$

$$e = fef \implies e = ef \implies f = fe \implies f = fef = e \text{ (impossible) .}$$

Dans tous les cas, on a $e = efe$, $f = fef$. I est un demi-groupe rectangulaire. En particulier, les relations $ef = fe = e$ donnent $f = fef = fe = e$; les idempotents sont tous primitifs; en outre, si D contient un zéro, il ne contient pas d'autre idempotent.

D contient un zéro 0 . - Un élément x de D vérifie $x^2 = x^3 = x^4$ mais alors x^2 est un idempotent donc égal à 0 , ou bien $x = x^n$ mais alors x appartient au sous-groupe maximal de l'unique idempotent 0 de D , x est égal à 0 . Si x est différent de 0 , $S = \{x, 0\}$ est un sous-demi-groupe non trivial qui contient tout élément y de D , puisque $y \cdot 0 = 0$ appartient à S . D est donc égal à $\{x, 0\}$, où l'on a $x^2 = 0$.

D ne contient pas d'élément zéro. - D est simple. En effet, soit I un idéal de D ; I est un sous-demi-groupe non trivial de D , les relations $x \in D$, $i \in I$, $xi \in I$ entraînent $x \in I$. D'après l'étude des idempotents, D est donc complètement simple,

$$D \simeq \mathfrak{K}(G; I, \Lambda; P) \quad (\text{notations de [2]}) .$$

Le groupe G ne contient qu'un seul élément $G = \{1\}$; supposons d'abord que I contienne deux éléments distincts i et j , $S = \{(1, i, \lambda), (1, j, \lambda)\}$ est un sous-demi-groupe non trivial; la relation

$$(1, i, \nu)(1, i, \lambda) = (1, i, \lambda)$$

montre que $(1, i, \nu)$ appartient à S , $0 = \lambda$, donc Λ ne contient qu'un seul élément, D est un zéro-demi-groupe à gauche.

I ne contient qu'un seul élément i ; considérons

$$S = \{(1, i, \lambda), (1, i, \mu)\}, \quad \text{si } \lambda \neq \mu, \quad \forall \nu \in \Lambda,$$

S contient également $(1, i, \nu)$, car $(1, i, \nu)(1, i, \lambda) = (1, i, \lambda)$. Λ contient au maximum deux éléments distincts, D est un zéro-demi-groupe à droite d'ordre 2.

Supposons maintenant que l'ordre de G soit supérieur à 1,

$$S_{i,\lambda} = \{(g, i, \lambda), g \in G\}$$

est un sous-groupe non trivial ; la relation $(1, i, \nu)(1, i, \lambda) = (p_{\nu i}, i, \lambda)$ montre que S contient $(1, i, \nu)$.

La fin de la démonstration directe et la réciproque résultent alors du théorème 3.5, chapitre II de ma thèse [3]. De ces deux théorèmes, on déduit :

COROLLAIRE 1.1. - Si l'ordre du demi-groupe D est plus grand que 2, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

- (a) Tout sous-demi-groupe de D est unitaire à droite.
- (b) Tout sous-demi-groupe non trivial de D est unitaire à droite.

COROLLAIRE 1.2. - Tout sous-demi-groupe non trivial d'un demi-groupe D est unitaire si, et seulement si, D est un demi-groupe d'ordre 2, ou si D est un groupe périodique.

Il semble cependant qu'une meilleure généralisation de la notion de groupe hamiltonien doit faire intervenir les relations d'équivalence. En effet, dire que tout sous-groupe d'un groupe est distingué équivaut à dire : Pour tout sous-groupe S de G , il existe une équivalence compatible admettant S comme classe. Rappelons qu'un complexe H d'un demi-groupe D est dit homomorphe [resp. homomorphe à droite], s'il existe dans D une relation d'équivalence régulière [resp. régulière à droite] admettant H comme classe [11],[3].

Dans la suite, D^* désignera le demi-groupe obtenu en adjoignant à D un élément unité. Si a, b, \dots, l sont des éléments de D , (a, b, \dots, l) désignera le sous-demi-groupe de D engendré par ces éléments ; si (a) est un demi-groupe cyclique, $[a]$ représentera sa période. Un sous-demi-groupe S de D est homomorphe à droite [resp. homomorphe], si les conditions $s \in S, s' \in S, x \in D^*, sx \in S$ [resp. $s \in S, s' \in S, u \in D^*, v \in D^*, usv \in S$] entraînent $s'x \in S$ [resp. $us'v \in S$]. Nous dirons qu'un demi-groupe, qui a tous ses sous-demi-groupes homomorphes [resp. homomorphes à droite], vérifie la condition (A) [resp. (A_d)].

LEMME 1.1. - Si D est un demi-groupe vérifiant la condition (A_d) ,
 1° D est périodique ;
 2° La période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 3 .

Soit a un élément de D ; considérons le sous-demi-groupe S engendré par a^2 et a^5 , nous avons :

$$a^2 \in S, \quad a^4 \in S, \quad a^5 \in S,$$

on en déduit

$$a^3 \in S,$$

et par suite, il existe un entier n différent de 3 tel que l'on ait

$$a^3 = a^n.$$

THÉOREME 1.2. - Si D est un demi-groupe cyclique, il y a équivalence entre les deux propositions :

- (1) Tout sous-demi-groupe de D est homomorphique.
- (2) D est fini, et sa période commence à un rang inférieur ou égal à 3 .

D'après le lemme, (1) entraîne (2). Inversement, soit S un sous-demi-groupe du demi-groupe cyclique D différent de D . Si a engendre D , $S \cap [a]$ est un sous-groupe de $[a]$; si $x \in [a]$, x^{-1} désignera l'inverse de cet élément dans $[a]$. Les relations

$$s \in S \cap [a], \quad x \in D, \quad sx \in S, \quad s' \in S$$

entraînent successivement :

$$s^{-1} \in S, \quad s'x = s'x.s^{-1} s = s's^{-1}.sx, \quad s'x \in S.$$

Il reste donc à considérer le cas suivant :

$$s = a^2 \in S, \quad x = a^q, \quad sx \in S, \quad a^3 = a^n \quad (n \text{ minimal});$$

on peut supposer que q est un nombre impair, car autrement x appartient à S . Si n est pair, a^n appartient à S , donc S est égal à $\{a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$. Si n est impair, on a $q < n - 1$, d'où $2 + q \leq n$; $sx \in S$ entraîne alors $a^n \in S$; S a la même structure que précédemment, et par suite est bien homomorphique.

2. Structure de l'ensemble des idempotents.

Dans toute la suite, sauf précision supplémentaire, D représentera un demi-groupe vérifiant la condition (A_d) . D'après le lemme 1.1, D est périodique, l'ensemble I de ses idempotents n'est pas vide.

Soient e et f deux éléments de I ; considérons $S = (e, f)$, la forme des éléments de S montre que ce sous-demi-groupe est égal à

$$(e) \cup (f) \cup (ef) \cup (fe) \cup (efe) \cup (fef).$$

Désignons respectivement par g, g', h, h' les idempotents de $(ef), (fe), (efe), (fef)$. Comme g appartient à (ef) , on a

$$g = (ef)^k,$$

on en déduit

$$ge = (ef)^k e = (ef)^{2k} e = (ef)^k e \cdot (ef)^k e = (ge)^2,$$

d'où il résulte

$$ge \in (efe) \cap I \quad \text{et} \quad ge = h.$$

On vérifie de même que fg est égal à h' , on a donc

$$hh' = ge \cdot fg = g \cdot ef.$$

Supposons maintenant que le produit ef n'appartienne pas à I . Considérons $S' = (e, (ef)^2)$; de

$$e \in S', \quad (ef)^2 \in S', \quad (ef)^2 f \in S',$$

résulte

$$ef \in S', \quad \text{c'est-à-dire} \quad ef = (ef)^n, \quad e, \quad \text{ou} \quad (ef)^n e.$$

Comme ef n'est pas un idempotent, on a $ef = (ef)^k$, ce qui donne

$$(ef) = [ef], \quad hh' = g \cdot ef = ef,$$

car g est un élément unité dans $[ef]$.

Le sous-demi-groupe $T = (h, h')$, étant inclus dans $(ef) \cup (fe) \cup (efe) \cup (fef)$, contient au plus quatre idempotents distincts. Nous pouvons donc considérer deux idempotents e, f , dont le produit n'appartient pas à I , et qui engendrent un sous-demi-groupe S ne contenant au plus que quatre idempotents distincts. D'après la thèse de M. EGO [6] (chapitre II), le seul cas possible est celui où e, f, g, g' sont distincts, où h est égal à e , h' à f ; mais alors $T = \{e, g\}$ est un sous-demi-groupe de D . Les conditions

$$e \in T, \quad g \in T, \quad gf = g \in T \quad \text{entraînent} \quad ef \in T,$$

ef est encore un idempotent. Nous avons donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. - Si un demi-groupe D vérifie la condition (A_d) , l'ensemble I de ses idempotents est stable.

D'après un résultat de D. MAC LEAN, il existe un demi-treillis Σ , et une famille de sous-demi-groupes rectangulaires disjoints de I indexés par Σ : $\{B_\alpha, \alpha \in \Sigma\}$ tels que $I = \bigcup_{\alpha \in \Sigma} B_\alpha$ et $B_\alpha B_\beta \subseteq B_{\alpha\beta}$ pour tout couple α, β d'éléments de Σ [8].

LEMME 2.1. - Σ ne peut contenir trois éléments α, β, γ vérifiant

$$\gamma < \beta < \alpha .$$

En effet, supposons que Σ contienne trois éléments vérifiant ces relations ; soient e un élément de B_α , f un élément de B_β , et g un élément de B_γ . Considérons le sous-demi-groupe S égal à (e, g, gf) ; S est contenu dans $B_\alpha \cup B_\gamma$, et S devrait contenir ef qui est dans B_β , d'où une impossibilité. Nous voyons donc que Σ contient un plus petit élément noté o , et que le produit de 2 éléments différents de Σ est égal à o .

LEMME 2.2. - Si α est un élément de Σ différent de o , B_α est un zéro-
demi-groupe à gauche.

Soient e, f deux éléments quelconques de B_α , g un élément de B_o . Considérons $S = (e, g, gf)$; nous avons

$$ef \in S, \quad ef \in B_\alpha, \quad S \cap B_\alpha = \{e\},$$

et par suite

$$ef = e .$$

B_o est un demi-groupe rectangulaire noté B , B est le produit direct d'un zéro-demi-groupe à gauche L par un zéro-demi-groupe à droite R . Un élément quelconque de B pourra donc être noté (l, r) , avec $l \in L, r \in R$.

LEMME 2.3. - Si B n'est pas un zéro-demi-groupe à gauche, Σ est égal à
 $\{o\} \cup \Lambda \cup \Delta$;

- si Λ n'est pas vide, il ne contient qu'un seul élément, $\Lambda = \{1\}$, et on a

$$\forall e \in B_1, \quad \forall b \in B, \quad be = b ;$$

- $\forall \alpha \in \Delta$, il existe un élément r_α de R tel que l'on ait

$$\forall (l, r) \in B, \quad \forall f \in B_\alpha, \quad (l, r).f = (l, r_\alpha) .$$

Si B est un zéro-demi-groupe à gauche, nous avons

$$\forall e \in I, \quad \forall b \in B, \quad be = b .$$

Posons $\Sigma = \{o\} \cup A$. Soient α un élément de A , e un élément de B_α . Si b est un élément quelconque de B , be appartient à B , et $be.e$ est égal à be ; il existe donc au moins un élément $b = (l, r)$ de B tel que be soit égal à b . Mais alors, si f est un élément quelconque de B_α , nous avons

$$bf = be.f = b.ef = be = b .$$

Si B est un zéro-demi-groupe à gauche et si b' est un autre élément de B , nous avons

$$b'e = b'b.e = b'.be = b'b = b' .$$

Supposons que B n'est pas un zéro-demi-groupe à gauche, et qu'il existe un autre élément $b' = (\ell', r')$ de B vérifiant

$$r \neq r' , \quad b'e = b' .$$

Soit (λ, ρ) un élément quelconque de B , $\{(\lambda, \rho), (\lambda, r)\}$ est un sous-demi-groupe de D ; des relations

$$(\lambda, r)e = (\lambda, r)(\ell, r)e = (\lambda, r)(\ell, r) = (\lambda, r) ,$$

nous déduisons

$$(\lambda, \rho)e \in \{(\lambda, \rho), (\lambda, r)\} .$$

On a de même

$$(\lambda, \rho)e \in \{(\lambda, \rho), (\lambda, r')\} ,$$

d'où $(\lambda, \rho)e = (\lambda, \rho)$ puisque r est différent de r' . A est donc la réunion de deux ensembles disjoints, peut-être vides, A_1 et A_2 , tels que

$$\forall \alpha \in A_1 , \quad \forall e \in B_\alpha , \quad \forall b \in B , \quad be = b ,$$

$$\forall \beta \in A_2 , \quad \exists r_\beta \in R \text{ tel que la relation } (\ell, r)e = (\ell, r) ,$$

vérifiée pour un e de B_β , entraîne $r = r_\beta$.

Précisons la multiplication dans ce dernier cas; nous savons que, $e \in B_\beta$ étant donné, il existe un élément (ℓ_β, r_β) de B vérifiant

$$(\ell_\beta, r_\beta)e = (\ell_\beta, r_\beta) .$$

On a $(\ell, r)e = (\ell, r)(\ell_\beta, r)e$, posons

$$(\ell_\beta, r)e = (\ell', r') ;$$

de $(\ell_\beta, r)e.e = (\ell_\beta, r)e$ résulte $r' = r_\beta$, et par suite

$$(\ell, r)e = (\ell, r)(\ell', r_\beta) = (\ell, r_\beta) .$$

Pour terminer la démonstration du lemme, il nous reste à vérifier que A_1 ne peut contenir au plus qu'un seul élément. Supposons que A_1 contienne deux éléments distincts α et β ; soient e un élément de B_α , f un élément de B_β , (ℓ, r) un élément de B . Le produit ef appartient à B ; nous pouvons poser

$ef = (\ell', r')$. Les relations

$$(\ell, r).ef = (\ell, r)e.f = (\ell, r)f = (\ell, r)$$

entraînent

$$(\ell, r)(\ell', r') = (\ell, r') = (\ell, r) .$$

B n'étant pas un zéro-demi-groupe à gauche, r peut être choisi différent de r', nous aboutissons donc à une contradiction.

LEMME 2.4. - Pour tout élément e de I, il existe un élément ℓ_e de L tel que l'on ait :

- si $(\ell, r) \in B$, $e(\ell, r) = (\ell_e, r)$,
- si $\beta \in \Delta$, $e \notin B_\beta$, $f \in B_\beta$, $ef = (\ell_e, r_\beta)$,
- si $\alpha \in \Delta$, $e \in B_\alpha$, $f \in B_1$, $ef = (\ell_e, r_\alpha)$.

Lorsque e appartient à B, ce lemme est vérifié en posant $e = (\ell_e, r_e)$, ce que nous ferons dans la suite. Soient e un élément de B_α ($\alpha \in \Lambda \cup \Delta$), $b = (\ell, r)$ un élément de B; eb appartient à B, posons $eb = (\ell', r')$. La relation $eb = eb.b$ donne

$$(\ell', r') = (\ell', r')(\ell, r) = (\ell', r),$$

d'où il résulte que r' est égal à r et que ℓ' est seulement fonction de e et de ℓ ; $\ell' = \varphi(e, \ell)$. Considérons le sous-demi-groupe S engendré par e et $(\varphi(e, \ell), r)$; S est égal à $\{e, (\varphi(e, \ell), r), (\varphi(e, \ell), r_\alpha)\}$. Si λ est un élément de L, la relation

$$(\varphi(e, \ell), r)(\lambda, r) = (\varphi(e, \ell), r)$$

montre que l'élément $e(\lambda, r) = (\varphi(e, \lambda), r)$ appartient à S. On en déduit $\varphi(e, \ell) = \varphi(e, \lambda)$; $\varphi(e, \ell)$ est indépendant de ℓ ; e étant donné, il existe donc un élément ℓ_e de L tel que l'on ait

$$\forall (\ell, r) \in B, \quad e(\ell, r) = (\ell_e, r) .$$

Supposons que $\Lambda \cup \Delta$ contienne un élément β différent de α ; soit f un élément de B_β , ef appartient à B, $ef = (\ell', r')$. Les relations

$$(\ell, r).ef = (\ell, r)e.f, \quad ef.(\ell, r) = e.f(\ell, r)$$

entraînent,

- si $\beta \neq 1$, $(\ell, r') = (\ell, r_\alpha)f = (\ell, r_\beta)$;
- si $\beta = 1$, $(\ell, r') = (\ell, r_\alpha)$;
- et pour β quelconque, $(\ell', r) = e(\ell_f, r) = (\ell_e, r)$.

Ceci complète la démonstration du lemme.

THÉOREME 2.2.

(a) Si D est un demi-groupe vérifiant la condition (A_d) , l'ensemble I de ses idempotents est stable et a la structure suivante :

$$I = B + B_1 + \bigcup_{\alpha \in \Delta} B_\alpha \quad \text{ou} \quad I = B + \bigcup_{\alpha \in \Delta} B_\alpha .$$

B est un demi-groupe rectangulaire, produit direct d'un zéro-demi-groupe à gauche L par un zéro-demi-groupe à droite R ; B_1 et les B_α , $\alpha \in \Delta$, sont des zéro-demi-groupes à gauche (Δ peut être vide).

$\forall \alpha \in \Delta$, $\exists r_\alpha \in R$; $\forall i \in I$, $\exists l_i \in L$ (pour $b \in B$, on pose $b = (l_b, r_b)$), tels que $\forall i \in I$, $\forall (\ell, r) \in B$, $\forall e \in B_1$, $\forall \alpha \in \Delta$, $\forall \beta \in \Delta - \{\alpha\}$, $\forall f \in B_\alpha$, $\forall g \in B_\beta$, on ait

$$\begin{aligned} (\ell, r)e &= (\ell, r), & ef &= (\ell_e, r_\alpha), & fg &= (\ell_f, r_\beta), \\ (\ell, r)f &= (\ell, r_\alpha), & fe &= (\ell_f, r_\alpha), & i(\ell, r) &= (\ell_i, r). \end{aligned}$$

(b) Inversement, considérons un ensemble I , réunion d'un demi-groupe rectangulaire $B = L \times R$ et de zéro-demi-groupes à gauche B_1, B_α , $\alpha \in \Delta$. I , muni de l'opération définie dans (a), est un demi-groupe qui vérifie la condition (A_d) .

La proposition (a) rappelle les résultats obtenus dans les lemmes 2.2, 2.3, 2.4. Pour démontrer (b), vérifions d'abord que I est un demi-groupe. Nous devons envisager les cas suivants :

$$a \in B \left\{ \begin{array}{l} b \in B \left\{ \begin{array}{l} c \in B_1, \quad a.bc = ab.c = ab, \\ c \in B_\alpha, \quad a.bc = ab.c = (\ell_a, r_\alpha), \end{array} \right. \\ b \in B_1 \left\{ \begin{array}{l} c \in B, \quad a.bc = ab.c = (\ell_a, r_c), \\ c \in B_1, \quad a.bc = ab.c = a, \\ c \in B_\alpha, \quad a.bc = ab.c = (\ell_a, r_\alpha), \end{array} \right. \\ b \in B_\alpha \left\{ \begin{array}{l} c \in B, \quad a.bc = ab.c = ac, \\ c \in B_1, \quad a.bc = ab.c = ab, \\ c \in B_\beta, \quad \beta \in \Delta, \quad a.bc = ab.c = ac, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$a \in B_1 \text{ ou } B_\alpha, \quad b \in B \text{ ou } B_\beta, \quad \beta \neq \alpha, \quad c \in B_1, \quad a.bc = ab.c = ab,$$

$$a \in B_1 \text{ ou } B_\alpha, \quad b \in I, \quad c \in I - B_1, \quad a.bc = ab.c = ac,$$

$$a \in B_\alpha, \quad b \in B_1 \text{ ou } B_\alpha, \quad c \in B_1, \quad a.bc = ab.c = ac.$$

Soient S un sous-demi-groupe de I , s et s' des éléments de S , x un élément de I tel que sx appartienne à S ; il faut montrer que $s'x$ appartient à S . Nous avons les cas suivants :

$$\begin{aligned} x \in B, & & s'x &= (\ell_{s'}, r_x) = s'.sx \in S, \\ x \in B_1, s' \in B \text{ ou } B_1, & & s'x &= s' \in S, \\ x \in B_1, s' \in B_\alpha, & & s'x &= (\ell_{s'}, r_\alpha) = s'ss' \in S, \\ x \in B_\alpha, s' \in B_\alpha, & & s'x &= s' \in S, \\ x \in B_\alpha, s' \notin B_\alpha, & & s'x &= (\ell_{s'}, r_\alpha) = s'.sx \in S. \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2.1.

(a) Si D est un demi-groupe vérifiant la condition (A), l'ensemble I de ses idempotents est stable et a la structure suivante : $I = B + C$; B est un demi-groupe rectangulaire, $B = L \times R$, pour $b \in B$, on écrit $b = (\ell_b, r_b)$; C est un ensemble envoyé par une application φ dans B , $\varphi(c) = (\ell_c, r_c)$. La loi de multiplication est définie de la manière suivante :

$$\forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j, \quad i^2 = i, \quad i.j = (\ell_i, r_j).$$

(b) Inversement, considérons un ensemble I , réunion d'un demi-groupe rectangulaire $B = L \times R$ et d'un ensemble C envoyé dans B par une application φ ; I , muni de l'opération définie dans (a), est un demi-groupe qui vérifie la condition (A).

Si tous les sous-demi-groupes de D sont homomorphiques, ils sont en particulier homomorphiques à gauche et homomorphiques à droite; I vérifie donc le théorème 2.2 et le théorème symétrique. B_1 et B_α , $\alpha \in \Delta$, doivent être des zéro-demi-groupes à gauche et à droite; ils sont donc réduits à un seul élément. Pour tout élément i de I , il existe un élément ℓ_i de L , un élément r_i de R tels que l'on ait

$$i(\ell, r) = (\ell_i, r) \quad \text{et} \quad (\ell, r)i = (\ell, r_i).$$

Si B_1 n'est pas vide pour l'élément e qu'il contient, on a d'une part

$$(\ell, r)e = (\ell, r),$$

et d'autre part

$$(\ell, r)e = (\ell, r_e);$$

R ne contient donc qu'un élément, et B_1 joue le même rôle que les B_α . Les relations $e \notin B$, $f \notin B$, $e \neq f$, $ef = (\ell_{ef}, r_{ef})$, $ef(\ell, r) = e.f(\ell, r)$, $(\ell, r).ef = (\ell, r)e.f$ donnent

$$ef = (\ell_e, r_f) .$$

Inversement, d'après le théorème 2.2, l'ensemble I , muni de la loi indiquée, est un demi-groupe. Soient S un sous-demi-groupe de I , s et s' des éléments de S . La relation $sx \in S$ entraîne $s'x \in S$ d'après le théorème 2.2, de même, d'après le théorème symétrique, $xs \in S$ implique $xs' \in S$; $xsy \in S$ entraîne $xs'y \in S$, car $xsy = xs'y = xy$.

COROLLAIRE 2.2. - Pour un sous-demi-groupe idempotent I , les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (a) Tous les sous-demi-groupes de I sont homomorphiques à droite et à gauche.
- (b) Tous les sous-demi-groupes de I sont homomorphiques.

En effet, pour obtenir la condition nécessaire du corollaire 2.1, nous avons seulement imposé aux sous-demi-groupes de D d'être à la fois homomorphiques à gauche et homomorphiques à droite.

COROLLAIRE 2.3. - Si D est un demi-groupe commutatif qui vérifie la condition (A), l'ensemble I de ses idempotents contient un zéro, et le produit de deux éléments distincts de I est égal à zéro.

En effet, B est alors commutatif, et donc réduit à un seul élément.

3. Etude du demi-groupe D .

Pour poursuivre l'étude du demi-groupe D , nous allons utiliser la décomposition de ce demi-groupe en fuseaux. D étant périodique, il existe une bijection entre l'ensemble I de ses idempotents et l'ensemble des fuseaux. Si e est un élément de I , le fuseau le contenant sera noté F_e , le groupe maximal associé à e sera noté Γ_e ; Γ_e est contenu dans F_e . Si a est un élément de F_e , $[a]$ est contenu dans Γ_e ; si b est un élément de Γ_e , on a

$$ab = a.eb = ae.b \in \Gamma_e, \quad ba = be.a = b.ea \in \Gamma_e .$$

Rappelons un résultat dû à D. D. MILLER et A. H. CLIFFORD [10].

Si D est un demi-groupe arbitraire contenant un sous-demi-groupe B rectangulaire, les groupes maximaux de D relatifs aux idempotents de B sont tous isomorphes, et leur réunion est un sous-demi-groupe de D isomorphe au produit direct de l'un de ces groupes par le demi-groupe B .

LEMME 3.1. - Si e et f sont deux idempotents de D , et si $\{e, f\}$ est un zéro-demi-groupe à gauche, alors, $\forall a \in F_e$, on a $af = ae$.

En effet, les conditions $a \in (a)$, $e \in (a)$, $ef = e \in (a)$ entraînent $af \in (a)$; comme fe est égal à f , on en déduit

$$af = afe = af.e = e.af = ae.f = ae .$$

Si S et T sont des sous-demi-groupes de D , $S \vee T$ désigne le sous-demi-groupe de D engendré par $S \cup T$.

THÉOREME 3.1. - Si e et f sont deux idempotents de D , et si (e, f) est un demi-groupe rectangulaire, alors, $\forall a \in F_e$, $\forall b \in F_f$, on a

$$af = aef, \quad fa = fae, \quad ab \in \{[a] \vee [b]\} \cup (a) .$$

(e, fe) est un zéro-demi-groupe à gauche; donc, d'après le lemme 3.1, on a $afe = ae$, d'où

$$af = aef .$$

Considérons $S = [a] \vee (ef)$, les éléments de S sont de la forme ef , a^n ou $a^n f$; en effet,

$$ef a^n = efe a^n = e a^n = a^n, \quad a^n ef = a^n f ,$$

car a^n appartient à Γ_e .

Les relations $a^3 \in S$, $a^4 \in S$, $ef \in S$ entraînent $efa \in S$; on en déduit

$$efa = \begin{cases} ef \\ \text{ou } a^n \\ a^n f \end{cases} \implies fa = \begin{cases} f \implies f a^p = f \implies fa = fae, \\ fa^n \implies fa = fae, \\ fa^n f \implies fa \in \Gamma_f \text{ et } fa = faf \implies f a^p = (fa)^p \\ \implies fa \in \Gamma_{fe} \implies fe = f \implies fa = fea . \end{cases}$$

Si b^n appartient à $[b]$, on a

$$ab^n = a.fb^n = aef b^n \in [a] \vee [b] ,$$

$$b^n a = b^n f.a = b^n fea \in [a] \vee [b] .$$

Donc, $T = (a) \vee [b]$ est égal à $\{[a] \vee [b]\} \cup (a)$; les relations $ab^3 \in T$, $ab^4 \in T$, $a \in T$, donnent $ab \in \{[a] \vee [b]\} \cup (a)$.

COROLLAIRE 3.1. - Les fuseaux de D sont stables, et si a et b sont deux éléments d'un même fuseau, ab appartient à $\{[a] \vee [b]\} \cup (a)$.

PROPRIÉTÉ 3.1. - Soient e un idempotent de D , a et b deux éléments du fuseau F_e ; alors, ab appartient à Γ_e , ou ab est égal à a^2 . Réciproque-

ment, si un demi-groupe périodique et unipotent vérifie cette propriété pour tout couple d'éléments a, b , on a $ab \in \{[a] \vee [b]\} \cup (a)$.

Nous avons vu que Γ_e était un idéal de F_e ; donc la condition $ab \notin \Gamma_e$ entraîne $a \notin \Gamma_e$. Comme ab appartient à $\Gamma_e \cup (a)$, on en déduit

$$ab = a \text{ ou } ab = a^2, \quad ab = a \implies ab^n = a \text{ et } ae = a,$$

ce qui est impossible.

Pour démontrer la propriété réciproque, il suffit de remarquer que, si ab appartient à Γ_e , on a

$$ab = abe = ae.eb \in [a] \vee [b].$$

D'après cette propriété, F_e^3 est égal à Γ_e ; en effet, Γ_e est toujours contenu dans F_e^3 . Soit abc un élément de $F_e^3 - \Gamma_e$;

$$abc \notin \Gamma_e \implies ab \notin \Gamma_e \implies ab = a^2 \implies abc = a^2 c,$$

$$a^2 c \notin \Gamma_e \implies ac \notin \Gamma_e \implies ac = a^2 \implies abc = a^3,$$

mais a^3 appartient à $[a]$, nous avons donc une contradiction.

COROLLAIRE 3.2. - Si $\{e, f\}$ est un zéro-demi-groupe à gauche [resp. à droite] propre, $\forall a \in F_e, \forall b \in F_f$, on a $ab = a^2$ ou $ab = ae.fb$ [resp. $ab = ae.fb$].

Dans les deux cas, $[a] \vee [b]$ est contenu dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. Si $\{e, f\}$ est un zéro-demi-groupe à gauche propre,

$$ab \in \Gamma_f \implies ab = abf = afb = ae.fb \in \Gamma_{ef} = \Gamma_e \implies f = e,$$

ceci est impossible;

$$ab \in (a) \setminus \Gamma_e \implies ab = a \text{ ou } a^2, \quad ab = a \implies af = a \implies aef = a,$$

mais $aef \in \Gamma_{ef} = \Gamma_e \implies a \in \Gamma_e \implies ab \in \Gamma_e$, ce qui est impossible. Donc, si ab est différent de a^2 , ab appartient à Γ_e ; on a alors

$$ab = eab = ea.b = ae.b = a.eb = ae.fb.$$

Si $\{e, f\}$ est un zéro-demi-groupe à droite propre,

$$ab \in \Gamma_e \implies ab = eab = ae.fb \in \Gamma_{ef} = \Gamma_f \implies e = f,$$

$$ab \in (a) \implies eb \in (a),$$

mais

$$eb = efb \in \Gamma_{ef} = \Gamma_f,$$

d'où une impossibilité, car (a) est contenu dans F_e . On en déduit

$$ab \in \Gamma_f \quad \text{et} \quad ab = abf = ae.fb .$$

COROLLAIRE 3.3. - Si (e, f) est un demi-groupe rectangulaire propre, $\forall a \in F_e$, $\forall b \in F_f$, ab est égal à $ae.fb$.

ab appartient à $\{[a] \vee [b]\} \cup (a)$, qui est contenu dans $(a) \cup \Gamma_e \cup \Gamma_f \cup \Gamma_{ef} \cup \Gamma_{fe}$.

$$ab \in (a) \implies eb \in (a) , \text{ mais } eb = efb \in \Gamma_{ef} , \text{ et on a } e = ef ,$$

$$ab \in \Gamma_e \implies ab = eab = aeb = ae.fb \in \Gamma_{ef} \implies e = ef ,$$

$$ab \in \Gamma_f \implies ab = abf = afb = ae.fb \in \Gamma_{ef} \implies f = ef ,$$

$$ab \in \Gamma_{fe} \implies ab = feab = faeb = fae.fb \in \Gamma_f \implies fe = f .$$

Chacun de ces cas est donc impossible, ab appartient à Γ_{ef} , et il en résulte

$$ab = efab = efeab = eab = aeb = ae.fb .$$

D'après le théorème 2.2, nous savons que I peut se mettre sous la forme :
 $I = B + B_1 + \bigcup_{\alpha \in \Delta} B_\alpha$; nous pouvons alors énoncer le théorème :

THÉOREME 3.2. - Si e est un élément de $B_1 + \bigcup_{\alpha \in \Delta} B_\alpha$, f un élément de B , alors, $\forall a \in F_e$, $\forall b \in F_f$, ba appartient à (b, efe) , et ab est égal à $efe.fb$.

D'après la loi de multiplication vérifiée par les éléments de I , efe appartient à B ; (b, efe) est donc un demi-groupe rectangulaire. Le sous-demi-groupe (b, efe) , contenant b , efe , $efe.e$, contient également be .

Si n est un entier supérieur ou égal à trois, eb^n et $b^n e$ appartiennent à $[b] \vee (efe)$; en effet, on a par exemple

$$eb^n = efb^n = efe.fb^n = efe.b^n .$$

L'élément eb appartient à $[b] \vee (e)$, car ce sous-demi-groupe contient e , eb^3 , eb^4 ; la relation $eb = e$ entraîne $ef = e$, ce qui est impossible ; nous avons donc

$$eb = eb^n . eb^m . \dots . eb^s \quad \text{ou} \quad eb = eb^n . \dots . eb^s . e ,$$

eb appartient à $[b] \vee (efe)$. Les relations précédentes permettent d'écrire

$$(b, e) = (b, efe) \cup (e) .$$

S'il existe un élément x de (a) tel que le produit bx ne soit pas dans (b, efe) , alors x n'appartient pas à (b, e, bx) . En effet, x n'appartient pas à (b, e) , car $b.(b, e)$ est inclus dans (b, efe) ; donc, si x est dans (b, e, bx) , dans l'écriture de x figure au moins une fois le facteur bx . Posons $x = uxy$, où y est un élément de D^* , u un monôme en b et e seulement; u appartient au complexe $(b, e).b$ qui est inclus dans (b, efe) . Il existe un entier p avec $u^p = f, fe, ef, \text{ ou } efe$, car (b, efe) ne contient que ces idempotents. La relation $x = u^p xy^p$ donne alors l'un des cas suivants :

$$1^\circ \quad x = fx ,$$

$$2^\circ \quad x = fex ,$$

$$3^\circ \quad x = efx ,$$

$$4^\circ \quad x = efex ;$$

1° et 2° donnent $x = fx$, d'où $x^q = fx^q$ et $e = fe$; 3° et 4° donnent $x = ex$, puis $x = efex$, d'où $e = efe$; les quatre cas sont donc impossibles.

Soit x un élément de $[a]$; le sous-demi-groupe (b, e, bx) contient e , b , bx , donc également $ex = x$. Nous en déduisons

$$b \in (b, efe), \quad ba^3 \in (b, efe), \quad ba^4 \in (b, efe), \quad \text{et } ba \in (b, efe) .$$

En particulier, fa appartient au demi-groupe rectangulaire

$$(f, efe) = \{f, fe, ef, efe\} ,$$

et par suite, fa est égal à f ou fe ; $fa = f$ donne $fe = f$, donc on a

$$fa = fe, \quad faf = fef = f, \quad (af)^2 = af .$$

De même, pour tout entier n , $a^n f$ est un idempotent. Posons $a^n f = g_n$; la relation $g_n f = g_n$ montre que g_n est un élément de B ; nous écrirons

$$g_n = (l_n, r_n) .$$

Si $a^n \in [a]$, les relations $eg_n = g_n$, $g_n f = g_n$ donnent

$$(l_e, r_n) = (l_n, r_n), \quad (l_n, r_f) = (l_n, r_n),$$

c'est-à-dire $g_n = (l_n, r_n) = ef$. Le sous-demi-groupe (a, ef) , contenant a , e , ef , contient également af ; mais d'après ce qui précède, (a, ef) est égal à $(a) \cup (ef) \cup (efe)$; af étant un élément de B , est égal à ef . Si $b^n \in [b]$, la relation $fb^n = b^n$ donne $ab^n = a.fb^n = efb^n = eb^n$. De $eb \in [b] \vee (efe)$, résulte

$$eb = efe ,$$

d'où

$$eb^2 = efefe = efe \quad \text{et} \quad eb = eb^m ,$$

ou

$$eb = eb^m u \quad \text{avec} \quad b^m \in [b] , \quad u \in D^* ,$$

ou

$$eb = efeb^m u ,$$

d'où

$$eb = efefb^m u = eb^m u ;$$

si $a^n \in [a]$, dans chacun des cas on a

$$a^n b = a^n eb = a^n eb^m u = ea^n fb^m u = eb^m u = eb .$$

Le sous-demi-groupe (a , eb) , contenant $a , a^3 b , a^3$, contient également ab ; ab ne peut appartenir à (a) , car ce sous-demi-groupe contiendrait alors eb ; or eb appartient à $[b] \vee (efe)$ qui est contenu dans $\Gamma_f \cup \Gamma_{fe} \cup \Gamma_{ef} \cup \Gamma_{efe}$, par suite on a

$$ab = ebu \quad \text{ou} \quad ab = a^k ebu \quad (u \in D^* , \quad a^k \in [a]) ,$$

d'où

$$ab = ea.b = eb .$$

Considérons l'élément eb ; cet élément appartient à $\Gamma_f \cup \Gamma_{fe} \cup \Gamma_{ef} \cup \Gamma_{efe}$, Il existe un entier n tel que $(eb)^n$ appartienne à $\{f , ef , fe , efe\}$; comme $e.(eb)^n = (eb)^n$, $(eb)^n$ appartient à $\{ef , efe\}$.

$$(eb)^n = efe \implies eb \in \Gamma_{efe} \implies eb = ebefe \implies eb = ebe \implies eb^3 = (eb)^3 ,$$

mais $eb^3 = eb^3 f$, d'où $(eb)^3 = (eb)^3 f \in \Gamma_{efef} = \Gamma_{ef}$, on a toujours

$$eb \in \Gamma_{ef} \cap \{[b] \vee (efe)\} ;$$

cette relation entraîne l'un des cas suivants :

- $eb = efe$, d'où $ef = efe$, $eb = ef$, et $efb = efef = ef = eb$,
- $eb = ub^n$, d'où $eb = ebf = efb$, car $b^n \in [b]$,
- $eb = ub^n efe$, d'où $eb = ebfe = efbe$, mais $eb = ebef$ donne alors

$$eb = efbef = efb \quad \text{car} \quad efb \in \Gamma_{ef} ,$$

il en résulte bien la relation $eb = efb = efe.fb$; ce dernier élément est bien déterminé quand on connaît Γ_f , car (f , efe) est un demi-groupe rectangulaire.

COROLLAIRE 3.4. - Avec les notations du théorème, si de plus fe est égal à f , ba appartient à (b) .

D'après le théorème, fa appartient à (f, efe) qui, ici, est égal à $\{f, ef\}$; la relation $f \cdot fa = fa$ implique $fa \in f \cdot \{f, ef\} = \{f\}$. On a

$$b^3 a = b^3 fa = b^3 f = b^3 ;$$

le sous-demi-groupe (b) , contenant b , b^3 , $b^3 a$, contient également ba .

COROLLAIRE 3.5. - Si fe est différent de f , ba est égal à $bf \cdot efe$.

(f, efe) est un demi-groupe rectangulaire ; d'après le théorème 3.1, $b \cdot efe$ est égal à $bf \cdot efe$. La relation $be \in (b, efe)$ entraîne l'un des cas suivants :
 - $be \in (b)$, d'où $fe \in (b)$ et $fe = f$, ce qui est impossible,
 - $be = u \cdot efe$, d'où $be = befe = bf \cdot efe$,
 - $be = u \cdot efe \cdot b^n$, d'où $be = u \cdot efe \cdot fb^n = u \cdot efe \cdot b^n f$, $be = bef$, $be = befe = bf \cdot efe$.
 On en déduit que (b, efe) est inclus dans $(b) \cup \Gamma_f \cup \Gamma_{ef} \cup \Gamma_{fe} \cup \Gamma_{efe}$.

De $ba \in (b, efe)$, résulte :

- soit $ba \in (b)$, d'où $fa \in (b)$, mais $fa = fe$ montre que ceci est impossible,
- soit $ba \in \Gamma_f$, d'où $ba = fba = bfa = bfe = bf \cdot efe \in \Gamma_{fe}$, contradiction,
- soit $ba \in \Gamma_{efe}$, d'où $ba = baefe = beafe = befe = bf \cdot efe$, contradiction,
- soit $ba \in \Gamma_{ef}$, d'où $ba = baef = beaf = bef$, (f, ef) étant rectangulaire.

Le théorème 3.1 donne $bef = bfef = bf \in \Gamma_f$, d'où encore une contradiction. Il reste seulement le cas $ba \in \Gamma_{fe}$, et on a alors

$$ba = bafe = befe = bf \cdot efe .$$

THÉORÈME 3.3. - Soient e et f deux éléments de $B_1 + \bigcup_{\alpha \in \Delta} B_\alpha$, a un élément de F_e , b un élément de F_f ;

- si ef est égal à e , ab appartient à (a) ,
- si ef est différent de e , ab est égal à ef .

1er cas. - Soit g un élément de B ; d'après le théorème 3.2 et les corollaires 3.4 et 3.5, on a

$$ge = gf = ga = gb , \quad ag = eg .$$

Le sous-demi-groupe S engendré par g et a , contenant a , g , gb , contient également ab ; mais, d'après le théorème 3.1, ab appartient à F_e , on a donc

$$ab \in S \cap F_e = (a) .$$

Ceci montre, en particulier, que le produit ea est égal à e ; Γ_e est donc réduit au seul élément e .

2e cas. - Posons $g = ef$; d'après la loi de multiplication vérifiée par I , g appartient à B . Si n est un entier supérieur ou égal à 3 , d'après le corollaire 3.4, on a

$$eb^n = efb^n = gb^n = g .$$

Le sous-demi-groupe $(e, g) = \{e, g, ge\}$, contenant e , $eb^3 = g$, $eb^4 = g$, contient également eb ; il en résulte l'un des cas suivants :

- $eb = e$, mais on aurait alors $ef = e$, ce qui est impossible,
- $eb = ge$, d'où $eb^2 = geb = ge$ et $g = ef = ge$,
- $eb = g$.

Nous avons donc $eb = g$, nous en déduisons

$$a^3 b = a^3 eb = a^3 g .$$

Le sous-demi-groupe (a, g) contient a , a^3 , et $a^3 b$; il contient aussi ab . En tenant compte du théorème 3.2, (a, g) contient seulement des éléments de la forme a^k ou gu ($u \in D^*$) ; ab ne peut appartenir à (a) car autrement ce sous-demi-groupe contiendrait $eb = g$, il reste donc

$$ab = gu ,$$

d'où

$$ab = eab = eb = g .$$

THÉOREME 3.4. - Si D est un demi-groupe vérifiant la condition (A_d) , D est bande sur I de ses fuseaux.

En effet, compte tenu du théorème 2.2, tous les cas possibles de multiplication des fuseaux ont été examinés dans les théorèmes 3.1 , 3.2 , 3.3 , et leurs corollaires.

THÉOREME 3.5. - L'ensemble des conditions nécessaires rencontrées est équivalent au système suivant :

- (1) D est périodique ;
- (2) L'ensemble I des idempotents de D est stable et a la structure indiquée au théorème 2.2 ;
- (3) Soient e et f deux éléments de I , a un élément de F_e , b un élément de F_f , alors :

- si $e \in B$, $f \in B$, ab est élément de $\{[a] \vee [b]\} \cup (a)$,
- si $e \notin B$, $f \notin B$, et si $ef = e$, ab est élément de (a) ,
- si $e \notin B$, $f \notin B$, et si $ef \neq e$, ab est égal à ef ,
- si $e \notin B$, $f \in B$, et si $fe = f$, ab est égal à $efe.fb$, ba est
élément de (b) ,
- si $e \notin B$, $f \in B$, et si $fe \neq f$, ab est égal à $efe.fb$, ba est
égal à $bf.efe$.

Il reste à vérifier que la période d'un élément quelconque a de D commence à un rang inférieur ou égal à 3 ; a et a^2 appartenant au même fuseau, on a, soit

$$a^2 a \in \{[a^2] \vee [a]\} \cup (a^2),$$

soit

$$a^2 a \in (a^2),$$

ce qui montre bien que a^3 appartient à $[a]$.

Nous avons vu quelques conséquences directes des propriétés énoncées dans le théorème, à savoir :

D est bande sur I de ses fuseaux .

- Si $\{e, f\}$ est un zéro-demi-groupe à gauche, $ab = ae.fb$ ou $ab = a^2$.
- Si (e, f) est un zéro-demi-groupe à droite, ou un demi-groupe rectangulaire propre, $ab = ae.fb$.
- Si e est un élément de $I - B$, $\Gamma_e = \{e\}$.

En tenant compte du théorème de Miller-Clifford, le produit de deux éléments quelconques de D est en général bien déterminé.

THÉORÈME 3.6. - Inversement, si un demi-groupe D vérifie les conditions énoncées dans le théorème 3.5, D satisfait à la condition (A_d) .

Soient S un sous-demi-groupe de D , s et s' des éléments de S , x un élément de D tel que le produit sx appartienne à S ; il faut montrer que $s'x$ appartient à S . Les sous-demi-groupes (s) , (s') , (x) contiennent respectivement e , e' , f comme idempotents. $S \cap I$ est un sous-demi-groupe homomorphe à droite de I , puisque I vérifie la condition (A_d) (théorème 2.2).

Les relations $s \in F_e \cap S$, $s' \in F_{e'} \cap S$, $sx \in F_{ef} \cap S$, donnent $e \in S \cap I$, $e' \in S \cap I$, $ef \in S \cap I$, d'où $e'f \in S \cap I$. De plus, e étant de la forme s^k , ex appartient à S ; d'autre part, on a toujours

$$efx = ex.$$

Considérons les divers cas possibles pour e' et f :

- $e' \in B$, $f \in B$, alors $s'x = s'^2 \in S$ ou $s'x = s'e'fx$, $e'ef = e'f$,
 $efx \in S$ implique $e'efx \in S$, $e'fx \in S$, $s'e'fx \in S$;
- $e' \notin B$, $f \in B$, alors $s'x = e'fx \in S$, cas analogue au précédent ;
- $e' \in B$, $f \notin B$, alors $s'x \in (s') \subseteq S$ ou $s'x = s'ef \in S$;
- $e' \notin B$, $f \notin B$, $e'f = e'$, alors $s'x \in (s') \subseteq S$;
- $e' \notin B$, $f \notin B$, $e'f \neq e'$, alors $s'x = e'f \in S$.

THÉOREME 3.7. - Un demi-groupe D vérifie la condition (A) si, et seulement si, il satisfait aux propriétés suivantes :

- (1) D est périodique et les sous-groupes maximaux de D sont abéliens ou hamiltoniens ;
- (2) L'ensemble I des idempotents de D est stable et a la structure indiquée au corollaire 2.1 ;
- (3) Soient e et f deux éléments de I , a un élément de F_e , b un élément de F_f , alors,
 - si $e \in B$, $f \in B$, ab est égal à $ae.fb$,
 - si $e = f \notin B$, on a $ab = e$ ou $ab = a^2 = b^2$,
 - si $e \notin B$, $f \in B$, ab est égal à $efe.fb$, ba est égal à $bf.efe$,
 - si $e \notin B$, $f \notin B$, $e \neq f$, ab est égal à ef .

Un demi-groupe qui vérifie la condition (A) vérifie, en particulier, (A_d) et (A_g) ; il en résulte les conditions nécessaires du théorème, si l'on remarque de plus que le groupe Γ_e doit avoir tous ses sous-groupes distingués pour vérifier (A) . Pour un groupe périodique, la condition (A) est équivalente au fait d'être abélien ou hamiltonien.

Inversement, si D vérifie ces conditions, d'après le théorème 3.6 et le théorème symétrique, les sous-demi-groupes de D sont à la fois homomorphiques à droite et homomorphiques à gauche ; il reste donc à démontrer que, si S est un sous-demi-groupe de D , les relations

$$s \in S , s' \in S , x \in D , x' \in D , xsx' \in S \quad \text{entraînent} \quad xs'x' \in S .$$

Soient $F_e , F_{e'} , F_f , F_{f'}$ les faisceaux qui contiennent respectivement s , s' , x , x' . D'après la structure de I , les cas possibles pour les idempotents e , e' , f , f' sont les suivants (nous posons $fef' = g$) :

$$\underline{e \in B , e' \in B , f \in B , f' \in B ,}$$

alors on a $xsx' = xf.es.f'x' = xg.es.gx' \in \Gamma_g \cap S$, on en déduit $g \in S$, d'où il résulte

$$gesg \in \Gamma_g \cap S , \quad ge's'g \in \Gamma_g \cap S ;$$

d'autre part on a $xg \in \Gamma_g$, $gx' \in \Gamma_g$, et comme Γ_g vérifie (A), ceci entraîne

$$xg.ge's'g.gx' = xs'x' \in \Gamma_g \cap S.$$

$$\underline{e \in B, e' \in B, f \in B, f' \notin B} \text{ (ou } e \in B, e' \in B, f \notin B, f' \in B),$$

$xsx' = xf.esf' \in \Gamma_g \cap S$, on en déduit $gesg \in \Gamma_g \cap S$, $ge's'g \in \Gamma_g \cap S$; comme dans le cas précédent, ces relations impliquent

$$xs'x' \in \Gamma_g \cap S.$$

$$\underline{e \in B, e' \in B, f \notin B, f' \notin B},$$

$xsx' = fsf' = fesf' \in \Gamma_g \cap S$; de plus, $g \in B$, $e's' \in \Gamma_e \cap S$ impliquent $ge's'g = fe's'f' = xs'x' \in S$.

$$\underline{e \in B, e' \notin B, f \in B, f' \in B},$$

$xsx' = xfesf'x' = xg.fesf'.gx' \in \Gamma_g \cap S$; un raisonnement analogue à celui du premier cas montre que $xs'x' = xfe'f'x' = xg.g.gx'$ appartient à $\Gamma_g \cap S$.

$$\underline{e \in B, e' \notin B, f \in B, f' \notin B} \text{ (ou } e \in B, e' \notin B, f' \in B, f \notin B),$$

$xsx' = xf.es.f' \in \Gamma_g \cap S \implies fesf' \in \Gamma_g \cap S$ et $xg \in S$; d'autre part, on a $xs'x' = xfe'f' = xg$; on en déduit bien $xs'x' \in S$.

$$\underline{e' = f = f' \notin B},$$

alors $xs'x' = e' \in S$.

$$\underline{e \in B, e' \notin B, f \notin B, f' \notin B},$$

e', f, f' n'étant pas égaux, $xsx' = fesf' \in \Gamma_g \cap S$ et $xs'x' = fe'f' = g \in S$.

$$\underline{e \notin B, e' \in B, f \in B, f' \in B},$$

$xsx' = xfef'x' = xg.g.gx' \in \Gamma_g \cap S$, $xs'x' = xfe's'f'x' = xg.ge's'g.gx'$, $xg \in \Gamma_g$, $gx' \in \Gamma_g$, $g \in \Gamma_g \cap S$, $ge's'g \in \Gamma_g \cap S$, $xg.g.gx' \in \Gamma_g \cap S \implies xs'x' \in S$.

$$\underline{e \notin B, e' \in B, f \in B, f' \notin B} \text{ (ou } e \notin B, e' \in B, f \notin B, f' \in B),$$

$xsx' = xfef' = xg \in \Gamma_g \cap S$, $xs'x' = xfe's'f' = xg.e's'.g$, $g \in S$; $xg \in S$, $e's' \in S \implies xs'x' \in S$.

$$\underline{e \notin B, e' \in B, f \notin B, f' \notin B},$$

$xsx' = fef' = g \in S$, $xs'x' = fe's'f' = g.e's'.g \in S$.

$$\underline{e \notin B, e' \notin B, f \in B, f' \in B},$$

$$xs'x' = xfe'f'x' = xfef'x' = xsx' \in S.$$

$$\underline{e \notin B, e' \notin B, f \in B, f' \notin B} \text{ (ou } e \notin B, e' \notin B, f \notin B, f' \in B),$$

si $f' \neq e$ et si $f' \neq e'$, on a

$$xs'x' = xfe'f' = xfef' = xsx' \in S;$$

si $e \neq e'$, $f' = e$, on a

$$xsx' = xfex' = xff',$$

$$xs'x' = xfe'x' = xfe'f' = xff' = xsx' \in S;$$

on a un calcul analogue, si $e \neq e'$ et si $f' = e'$;

enfin, si $e = e' = f'$,

$$xs'x' = xfe = xsx' \in S.$$

$$\underline{e \notin B, e' \notin B, f \notin B, f' \notin B},$$

on a toujours $xsx' = fef'$, $xs'x' = fe'f' = fef' = xsx' \in S$.

COROLLAIRE 3.6. - Un demi-groupe abélien D vérifie la condition (A), si et seulement s'il satisfait aux propriétés suivantes :

(1) D est périodique ;

(2) L'ensemble I des idempotents de D a la structure suivante :

$$I = \{0\} \cup A, \quad \forall e, f \in I, \quad e \neq f, \quad \text{on a } ef = 0;$$

(3) Soient e et f deux éléments de I , a un élément de F_e , b un élément de F_f , alors,

- si $e = f = 0$, on a $ab = a0 \cdot 0b$,

- si $e = f \neq 0$, on a $ab = e$ ou $ab = a^2 = b^2$,

- si $e = 0$, $f \neq 0$, on a $ab = a0$,

- si $e \neq 0$, $f \neq 0$, $e \neq f$, on a $ab = 0$.

Ce corollaire est une conséquence directe du théorème précédent et du corollaire 2.3.

Conclusion. - Le théorème 3.7 fournit une généralisation convenable des groupes hamiltoniens, car ces groupes sont périodiques ; mais il n'en est pas de même pour les groupes abéliens qui, en général, ne vérifient pas ce théorème. La méthode suivie, étude des idempotents, décomposition de D en fuseaux, est à rapprocher de celle de M. EGO dans sa thèse [6].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CLIFFORD (A. H.). - Bands of semi-groups, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 499-504.
- [2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semi-groups, vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).
- [3] DESQ (Roger). - Relations d'équivalences principales en théorie des demi-groupes, Thèse Sc. math. Paris, 1964.
- [4] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mém. Acad. Sc. Inst. France, 2e série, t. 63, n° 3, 52 p.).
- [5] DUBREIL (Paul). - Algèbre, t. 1 : Equivalences, opérations, groupes, anneaux, corps, 2e édition. - Paris, Gauthier-Villars, 1954 (Cahiers scientifiques, 20).
- [6] EGO (Michel). - Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes satisfait à certaines conditions, Bull. Soc. math. France, t. 91, 1963, p. 137-201 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).
- [7] LJAPIN (E. S.). - Demi-groupes [en russe]. - Moskova, 1960.
- [8] MAC LEAN (David). - Idempotent semi-groups, Amer. math. Monthly, t. 61, 1954, p. 110-113.
- [9] MILLER (Donald W.). - Hamiltonian semi-groups, *Portugaliae Mathematica*, t.21, 1962, p. 171-187.
- [10] MILLER (D. D.) and CLIFFORD (A. H.). - Regular \mathcal{O} -classes in semi-groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 270-280.
- [11] TEISSIER (Marianne). - Sur les équivalences régulières dans les demi-groupes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 1987-1989.
-