Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Monique Bertrand

Combinaisons non-associatives

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1962-1963), exp. n° 19, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 19

15 mars 1963

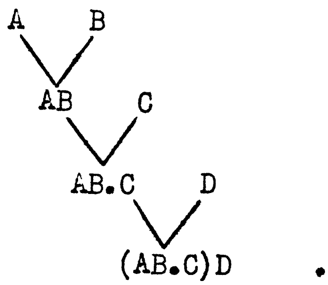
COMBINAISONS NON-ASSOCIATIVES

par Mme Monique BERTRAND

Nous allons considérer un ensemble E d'éléments, muni d'une loi de composition, que nous appellerons produit, supposée non-associative. Nous ne supposerons rien sur la commutativité, nous réservant de la préciser selon les cas.

Forme. - Les produits non-associatifs peuvent être classés suivant leurs formes, c'est-à-dire suivant la façon d'associer les facteurs sans considération de leur identité.

Ainsi, si le produit n'est pas commutatif, les produits $(AB.C)D$ et $(BA.C)D$ sont différents mais ont même forme, tandis que $D(AB.C)$ a une forme différente. Un produit non-associatif peut être regardé comme un arbre généalogique :



.

I. Arithmétique des formes.

Tout d'abord une convention : pour éliminer les parenthèses, on convient d'utiliser des groupes de points ; ainsi

$$A \mathbin{:.} BC.AD^2 : E = A\{[(BC)(A\,\widehat{DD})]\,E\} .$$

Les produits et les formes, où les facteurs sont absorbés un par un, sont dits primaires.

Exemple : les puissances successives d'un élément.

1. Commutativité.

Considérons pour l'instant le cas commutatif où une forme primaire est unique lorsque le nombre δ de facteurs est donné : X^δ. Toute autre puissance peut être représentée en fractionnant l'exposant par des parenthèses avec les conventions suivantes :

Pour le produit de deux puissances : on fait la somme des exposants.

Pour une puissance de puissance : on fait le produit des exposants.

Une puissance itérée se traduira par une puissance dans l'exposant. Ainsi

$$X^2\, X^3 = X^{2+3} \qquad X^{2\times 3} = (X^2)^3 \qquad X^{2^3} = [(X^2)^2]^2 .$$

L'addition des exposants, rendant compte de la multiplication non-associative, est commutative mais non associative. Au contraire, le produit des exposants n'est pas commutatif :

$$X^{a\times b} = (X^a)^b \neq (X^b)^a = X^{b\times a} \;;$$

il est associatif, car

$$X^{ab\cdot c} = [(X^a)^b]^c = X^{a\cdot bc} = X^{abc} .$$

Etudions la distributivité :

- prédistributivité :

$$X^{a(b+c)} = (X^a)^{b+c} = (X^a)^b\,(X^a)^c = X^{ab}.X^{ac} = X^{ab+ac} ,$$

il y a prédistributivité.

- postdistributivité :

$$X^{(b+c)a} = (X^{b+c})^a = (X^b.X^c)^a = \underbrace{\underbrace{X^b\,X^c}\;\underbrace{X^b\,X^c}\;\dots\;\underbrace{X^b\,X^c}}_{a\ \text{fois}}$$

alors que

$$X^{ba+ca} = (X^b)^a.(X^c)^a = \underbrace{(X^b\,X^b\,\dots\,X^b)}_{a\ \text{fois}}\underbrace{(X^c\,\dots\,X^c)}_{a\ \text{fois}}$$

il n'y a pas postdistributivité à cause de la non-associativité.

Il résulte de tout ceci que la forme s de tout produit commutatif et non-associatif peut être définie comme l'exposant de la puissance correspondante obtenue en égalant tous les facteurs.

Ainsi $AB.C^2 : D$ a même forme que $X^{2.2+1}$

$$S = 2.2 + 1 .$$

<u>Exemple</u>. - $S = (2.2 + 3) + (2 + 3)^2$ est la forme de

$$X^2\,X^2.X^3 :: X^2\,X^3 : X^2\,X^3 :. X^2\,X^3.X^2\,X^3 : X^2\,X^3$$

car d'après ce qui précède $(2 + 3)^2 = (2 + 3) \times 2 \times (2 + 3) \times 3$.

Plus généralement, soient un produit Π_1 de forme S_1 , un produit Π_2 de forme S_2 , $S_1 + S_2$ est la forme de $\Pi_1\,\Pi_2$, et $S_1\,S_2$ est la forme obtenue en substituant Π_1 à chaque facteur de Π_2 .

Donc l'ensemble des produits commutatifs et non-associatifs se représente sur une arithmétique non-associative dont les entiers sont les formes commutatives avec

$$a + b = b + a \qquad ab.c = abc \qquad a(b + c) = ab + ac$$
$$ab \neq ba \qquad (a + b) + c \neq a + (b + c) \qquad (b + c)\, a \neq ba + ca \,.$$

2. Non-commutativité.

Mêmes conclusions avec $a + b \neq b + a$.

II. Classification des formes.

1. Définitions.

a. Degré δ : nombre de facteurs. C'est l'évaluation de S en tant qu'entier ordinaire.

b. Conforme : deux formes non-commutatives S_1 et S_2, qui se transforment en une même forme S quand la loi est considérée comme commutative, sont dites conformes, et on note $S_1 \sim S_2$; il est facile de voir qu'il y a effectivement une relation d'équivalence. Ainsi :

$AB.C : D$	$A.BC : D$	$A : BC.D$	$A : B.CD$
$(2 + 1) + 1$	$(1 + 2) + 1$	$1 + (2 + 1)$	$1 + (1 + 2)$

sont conformes avec X^4 .

c. Altitude : nombre de générations nécessaires pour former le produit ; il y a $\delta - 1$ noeuds.

d. Noeud équilibré : si ses deux facteurs sont conformes.

c. Mutabilité : le nombre de noeuds non-équilibrés est la mutabilité de la forme.

2. Conséquences.

a. Etant donnée une forme s , quel est le nombre de formes conformes à S ?

Etant donnée une forme s , pour obtenir toutes ses équivalentes on écrit son expression non-commutative, et on applique la commutativité de la somme.

$$S = [(\alpha + \beta) + \gamma] + \delta + \dots$$

Un noeud est non-équilibré lorsque les valeurs commutatives entières de chaque branche sont différentes.

D'où une démonstration par récurrence :

Soit $\mu = 1$. S'il y a un seul noeud non-équilibré on obtient deux formes possibles, s, et s_1 obtenue en intervertissant dans s les deux termes correspondants ainsi :

$$X(X^2) \qquad S = 1 + (1 + 1) \qquad S_1 = (1 + 1) + 1$$

et il n'y en a pas d'autre.

Supposons que, pour μ, on ait 2^μ formes conformes à s.

Pour $\mu + 1$, il y a les 2^μ précédentes, et, si l'on applique la commutativité au noeud non-équilibré supplémentaire, on obtient encore 2^μ autres formes ; d'où le résultat : $2^{\mu+1}$.

Donc : 2^μ formes conformes à s, si $\mu(s) = \mu$.

b. <u>Comportement des définitions vis-à-vis des lois de composition.</u>

- $S_1 \sim S_2 \implies \delta(S_1) = \delta(S_2)$, $\alpha(S_1) = \alpha(S_2)$, $\mu(S_1) = \mu(S_2)$.

En effet :

- $\delta(S_1) = \delta(S_2)$ par définition,

- $\alpha(S_1) = \alpha(S_2)$, car on ne joue sur la commutativité que sans changer les parenthèses ; or ce sont celles-ci qui rendent compte de α.

- $\mu(S_1) = \mu(S_2)$, car le nombre de formes conformes à S_1 est $2^\mu(S_1)$. Le nombre de formes conformes à s_2 est $2^\mu(S_2)$, d'où $\mu(s_1) = \mu(s_2)$,

- $\delta(r + s) = \delta(r) + \delta(s)$, $\delta(rS) = \delta(r)\,\delta(S)$, $\delta(S^\nu) = [\delta(S)]^\nu$., cela résulte des définitions.

$$- \quad \alpha(r + S) = \begin{cases} 1 + \alpha(r) & \alpha(r) \geqslant \alpha(S) \\ 1 + \alpha(S) & \alpha(r) \leqslant \alpha(S) \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha(r.S) = \alpha(r) + \alpha(S) \\ \alpha(S^\nu) = \nu\alpha(S) \end{matrix}$$

L'expression de $\alpha(r + S)$ se déduit facilement de la définition de α.

L'expression de $\alpha(r.S)$ vient du fait qu'en remplaçant chaque facteur du produit de forme S par le produit de forme r, $\alpha(r)$ n'intervient qu'une fois. Les générations suivantes se forment d'après $\alpha(S)$, d'où $\alpha(rS) = \alpha(r) + \alpha(S)$

$$- \quad \mu(r + S) = \begin{cases} 2\mu(S) & r \sim s \\ 1 + \mu(r) + \mu(S) & r \not\sim S \end{cases} \qquad \begin{matrix} \mu(rS) = \delta(S)\,\mu(r) + \mu(S) \\ \mu(S^\nu) = (1 + \delta \ldots + \delta^{\nu-1})\,\mu(S) \end{matrix}$$

en effet,

- pour $\mu(r + S)$, si $r \sim S$, le noeud de la somme $r + s$ est équilibré, donc

$$\mu(r + S) = \mu(r) + \mu(S) = 2\mu(r) ,$$

si $r \not\sim S$, il y a dans $\mu(r + S)$, $\mu(r)$, $\mu(S)$ et 1 , le noeud de la somme :

$$\mu(r + S) = 1 + \mu(r) + \mu(S)$$

- pour $\mu(rS)$, on applique le fait qu'il y a prodistributivité et non-postdistributivité : dans l'expression développée de rS , il y a la forme de S_1 et chaque entier y est multiplié par r , donc

$$\mu(rS) = \mu(S) + (\ \mu(r) \text{ multipliée par le nombre de facteurs de } S\ )$$

$$\mu(rs) = \delta(S)\ \mu(r) + \mu(S) .$$

3. Table de formes commutatives.

α	δ	μ	S	exemples
0	1	0	1	A
1	2	0	$2 = 1 + 1$	AB
2	3	1	$3 = 1 + (1 + 1)$	A.BC et les conformes
2	4	0	$2.2 = (1 + 1) + (1 + 1)$	AB.CD et les conformes
3	4	2	$4 = [(1 + 1) + 1] + 1$	A : B.CD et les conformes
3	5	1	$2.2 + 1 = [(1 + 1) + (1 + 1)] + 1$	AB.CD : E et les conformes
3	5	2	$3 + 2 = [1 + (1 + 1)] + (1 + 1)$	A.BC : DE et les conformes
3	6	1	$(2 + 2) + 2$	AB.CD : EF
3	6	2	$(1 + 2) + (1 + 2)$	A.BC : D.EF
3	7	2	$(1 + 2) + (2 + 2)$	A.BC : DE.FG
3	8	0	2^3	AB.CD : HE.FG

Comme le suggère cette table, on ne peut construire une forme, α , δ , μ , étant donnée arbitrairement.

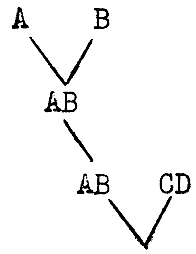
4. Relations entre α , δ , μ .

a. $\alpha + 1 \leqslant \delta \leqslant 2^{\alpha}$.

- $\delta \geqslant \alpha + 1$. En effet le nombre de facteurs est au moins égal au nombre de générations $+ 1$. On a $\delta = \alpha + 1$ pour une forme primaire c'est-à-dire une forme où les facteurs sont absorbés un à un.

exemple : $\delta = 4$ $\alpha = 3$ A : B.CD

- $\delta \leqslant 2^{\alpha}$. Etant donné le nombre de générations α , comment procéder pour obtenir l'ordre δ maximum ?



$\alpha = 1 \qquad \delta = 2$

$\alpha = 2 \qquad \delta = 4$

ABCD : EF.GF $\quad \alpha = 3 \qquad \delta = 8$.

On voit par récurrence que c'est en rajoutant à chaque générations la forme déjà écrite

$$\delta_n = 2^n , \qquad \delta^{n+1} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

donc $\delta \leqslant 2^\alpha$; $\delta = 2^\alpha$ pour ce que l'on appelle les puissances pleines.

b. $\delta \geqslant \mu + 2$ <u>sauf pour</u> $\delta = 1$.

Pour δ donné, la mutabilité maximum est égale au nombre de signes $+$ dans S quand tous les termes sont des 1 , c'est-à-dire $\delta - 1$, auquel on retranche 1 , car au premier produit il y a toujours équilibre : $A \times B$.

c. δ <u>est la somme de</u> $\mu + 1$ <u>puissances, non toutes identiques, de</u> 2 .

En effet procédons par récurrence sur μ .

- Pour $\mu = 0$: $\delta = 2^\alpha$, c'est vrai.

- Pour $\mu = 1$: pour avoir une forme de mutabilité 1 , il faut ajouter deux formes de mutabilité nulle, mais non conformes, d'où $\delta = 2^\alpha + 2^\beta$.

Supposons que, pour tout δ , la proposition soit vraie pour μ . Démonstration pour $\mu + 1$: pour augmenter μ de 1 , pourvu que $\mu \neq 1$, il faut et il suffit que l'on ajoute à la forme de mutabilité μ une forme de mutabilité nulle, donc que l'on ajoute à δ , 2^γ , et ceci d'après

$$\mu(r + S) = \begin{cases} 2\mu(S) \\ 1 + \mu(r) + \mu(S) \end{cases}$$

d. $\mu \leqslant 3.2^{\alpha-3} - 1$.

Soit μ_α la mutabilité maximum si α est donné. Considérons seulement des formes commutatives

$$\mu_0 = \mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = 1 \qquad \mu_3 = 2 .$$

Toute forme d'altitude $\alpha + 1$ est somme de S_α et de S_β , $\beta \leqslant \alpha$

$$\mu_{\alpha+1} = \begin{cases} 2\mu_\alpha \\ 1 + \mu_\alpha + \mu_\beta \end{cases}$$

comme $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu > \mu_\alpha$ pour $\alpha > 0$.

Soit α toute altitude pour laquelle il existe au moins trois formes distinctes de mutabilité μ_α, et soient S_1, S_2, S_3 ces formes.

$$\mu(S_1) = \mu(S_2) = \mu(S_3) = \mu_\alpha > \mu(S) .$$

Donc pour $\alpha + 1$, il existe au moins trois formes différentes de mutabilité maximum :

$$S_1 + S_2 \qquad S_2 + S_3 \qquad S_3 + S_1$$

avec $\mu_{\alpha+1} = 1 + 2\mu_\alpha$, $\alpha \geqslant 3$, ou encore $1 + \mu_{\alpha+1} = 2(1 + \mu_\alpha)$ et $1 + \mu_3 = 3$, d'où

$$\mu_\alpha = 3.2^{\alpha-3} - 1 .$$

Donc

$$\mu \leqslant 3.2^{\alpha-3} - 1 .$$

5. Réciproques.

Etudions maintenant quelques réciproques.

a. On se donne α et δ.

Peut-on obtenir une forme de degré δ donné et d'altitude α pourvu que l'on ait $\alpha + 1 \leqslant \delta \leqslant 2^\alpha$?

- Pour $\delta = \alpha + 1$, c'est possible : il suffit d'absorber les facteurs un par un. Il y aura α générations et $\alpha + 1$ facteurs.

- Pour $\delta = 2^\alpha$, c'est possible aussi (voir plus haut).

Prenons donc $\alpha + 1 < \delta < 2^\alpha$. Procédons par récurrence sur δ et α ; pour $\delta = \alpha + 2$ il suffit d'absorber un terme à la fois sauf à la dernière génération où l'on en absorbe deux.

Exemple : $\alpha = 3$, $\delta = 5$, AB ; C ⁝. DE

Soit $\delta = \alpha + d$ prenons $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$ avec

$$\begin{cases} \delta_1 = \alpha_1 + d - 1 \\ \alpha_1 + d - 1 < 2^{\alpha_1} \end{cases} \qquad \delta_2 = \alpha_2 + 1 \qquad \text{alors} \qquad \delta_1 > \alpha_1 , \quad \delta_2 = \alpha_2 + 1 .$$

C'est possible d'après les hypothèses sur α et δ d'après l'hypothèse de récurrence, on construit la forme de degré $\delta_1 = \alpha_1 + d - 1$ et d'altitude α_1, et on absorbe les $\alpha_2 + 1$ facteurs restants en α_2 générations.

b. On se donne δ et μ.

Peut-on obtenir une forme quand on se donne δ et μ ?

D'abord, il faut : $\mu + 2 \leqslant \delta$.

D'autre part, on a vu que δ est la somme de $\mu + 1$ puissances de 2 , non toutes identiques si μ est > 0 .

Donc, si n_δ désigne le nombre de termes de la décomposition de δ suivant la base 2 , on doit avoir $\mu + 1 \geqslant n_\delta$, donc enfin

$$n_\delta \leqslant \mu + 1 \leqslant \delta - 1 .$$

Pour $\mu + 1 = n_\delta$, on peut construire la forme correspondante : si $\delta = 2^\beta + 2^{\beta-1} + \dots + 2^\gamma$, la forme cherchée se construit en prenant la forme 2^β , à laquelle on adjoint $2^{\beta-1} \dots 2^\gamma$; ces différentes formes étant de mutabilité nulle, on a $\mu = n_\delta - 1$.

Exemple : AB.CD : EF $\qquad \delta = 2^n + 2 \qquad \mu = 1$.

Pour $\mu + 1 = \delta - 1$, c'est la forme principale.

Pour $\mu + 1 = n_\delta + \nu$, $0 < \nu < \delta - 1 - n_\delta$, il est possible de décomposer δ en $\mu + 1$ puissances de 2 , de telle façon que chaque chiffre écrit ne soit pas égal à la somme des précédents.

Voyons-le sur un exemple :

$$\delta = 7 \qquad \delta = 2^2 + 2 + 1 \qquad 2 \leqslant \mu \leqslant 5$$

$\mu = 2$	$\delta = 2^2 + 2 + 1$	AB.CD : EF ⁖ G
$\mu = 3$	$\delta = 2^2 + 1 + 1 + 1$	AB.CD : E ⁖ F ∷ G
$\mu = 4$	$\delta = 2 + 1 + 2 + 1 + 1$	AB.C : DE ⁖ F ∷ G
$\mu = 5$	$\delta = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	AB.C : D ⁖ E ∷ F ⁙ G

c. <u>On se donne</u> α , δ , μ .

Supposons que α , δ , μ vérifient toutes les conditions trouvées précédemment. Il est facile de voir qu'il n'existe pas toujours de forme répondant à la question.

Exemple : pour $\alpha = 4$, $\delta = 5$, $\mu = 1$, il n'en existe pas ; en effet :
$\delta = 5 = 2^2 + 1$ pour $\mu = 1$, AB.CD : E , $\alpha = 3$
$\delta = 5$ pour $\alpha = 4$, AB.C : D ⁖ E , $\mu = 3$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ETHERINGTON (I. H. M.). - On non-associative combinations, Proc. Royal Soc. Edinburgh, t. 59, 1939, p. 153-162.

[2] ETHERINGTON (I. H. M.). - Genetiv algebras, Proc. Royal Soc. Edinburgh, t. 59, 1939, p. 242-258.

[3] ETHERINGTON (I. H. M.). - Special train algebras, Quaterl. J. Math., Oxford series, t. 12, 1941, p. 1-8.

[4] ETHERINGTON (I. H. M.). - Duplication of linear algebras, Proc. Edinburgh math. Soc., t. 6, 1939-1941, p. 222-230.

[5] RAFFIN (Raymond). - Propriétés de commutation et de finitude des anneaux non associatifs, Généralisations des corps gauches, Thèse Sc. math. Paris. 1951.

[6] SCHAFER (R. D.). - Structure of genetic algebras, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 121-135.