Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Guy Renault

Étude des sous-modules compléments dans un A-module

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1962-1963), exp. n° 16, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_2_A5_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 16

11 avril 1963

ÉTUDE DES SOUS-MODULES COMPLÉMENTS DANS UN A-MODULE

par Guy RENAULT

1. Rappels.

Soit A un anneau unitaire ; on considérera dans la suite des A-modules à gauche.

Définition [2]. - Soit N un sous-module de M, et soit X un sous-module de M pour lequel $X \cap N = (0)$, X étant maximal pour cette propriété ; X sera appelé un sous-module complément relatif de N dans M, et on appellera sous-module complément un sous-module X pour lequel il existe un sous-module N dont X est complément relatif.

Rappelons qu'un module M est extension essentielle d'un sous-module N si, pour tout sous-module P de M, la relation $P \cap N = (0) \Longrightarrow P = (0)$.

PROPOSITION 1. - Pour qu'un sous-module X de M soit un sous-module complément dans M, il faut et il suffit qu'il n'admette pas d'extension essentielle propre dans M.

Soit P une extension essentielle de X, où X est complément relatif de N, $X \cap N = (0)$, d'où $P \cap N = (0)$, et par suite $P = X$. Réciproquement, soit X un sous-module de M sans extension essentielle propre dans M, soit N un complément relatif de X, il existe un complément relatif P de N contenant X, soit Q un sous-module de P tel que $Q \cap X = (0)$, on a $(Q \oplus N) \cap X = (0)$, d'où $Q = (0)$, et par suite P est extension essentielle de X, d'où $P = X$.

On sait que tout A-module M est plongé dans une extension essentielle maximale de M qui est un A-module injectif appelé enveloppe injective de M et qui sera noté $E(M)$.

2. Relations entre les sous-modules compléments dans M et les sous-modules injectifs de E/M.

PROPOSITION 2. - Soit M un A-module extension essentielle d'un sous-module N, alors la trace sur N d'un sous-module complément X dans M est un sous-module complément dans N.

Soit X un sous-module complément dans M, X est un sous-module complément relatif à X' ; $X \cap N$ et $X' \cap N$ sont des sous-modules de N non nuls (on écarte le cas trivial où $X = (0)$ ou $X = M$), et on a

$$(X \cap N) \cap (X' \cap N) = (0) .$$

Soit S un complément relatif dans N de $X' \cap N$ contenant $X \cap N$, on a

$$S = S + X \cap N = (S + X) \cap N ,$$

et on a la relation

$$((S + X) \cap N) \cap X' \cap N = (0) .$$

N est essentiel dans M, cela implique $(S + X) \cap N = (0)$ et par suite $S \subset X$.

Soient X un sous-module complément dans M et $E(X)$ une enveloppe injective de X contenue dans $E(M)$, $E(X) \cap M$ est extension essentielle de X, et par suite $E(X) \cap M = X$ (proposition 1) ; les sous-modules compléments dans $E(M)$ sont des sous-modules injectifs, et compte tenu de la proposition 2, on a le résultat :

THÉORÈME 1. - Pour qu'un sous-module X de M soit un sous-module complément dans M, il faut et il suffit que X soit la trace sur M d'un sous-module injectif de $E(M)$.

Exemple. - Un A-module M est quasi-injectif [4] s'il vérifie la condition suivante :

soient N un sous-module de M et f un homomorphisme de N dans M, alors f se prolonge en un endomorphisme de M ; on montre que la condition précédente est équivalente à la propriété suivante :

M est stable pour tout endomorphisme de $E(M)$.

Donnons un exemple assez général de tels modules ; soient B l'anneau des endomorphismes d'un module injectif I et Λ un idéal bilatère de B et soit

$$M = \bigcap_{\varphi \in \Lambda} \ker \varphi ,$$

M est alors quasi-injectif en particulier le coeur [5] d'un module est quasi-injectif.

Les sous-modules compléments dans un module quasi-injectif sont des facteurs directs, et si X est un sous-module complément dans M et N un sous-module quelconque tout homomorphisme de N dans X se prolonge en un endomorphisme de M dans X.

Nous allons utiliser le résultat précédent pour étudier les sous-modules compléments minimaux (resp. maximaux).

THÉORÈME 2. - Soit M un A-module et X un sous-module de M, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X est un sous-module complément minimal,

(ii) X est un sous-module complément co-irréductible (i. e., (0) est $\cap$-irréductible dans X).

D'après le théorème 1, la condition (i) est équivalente au fait que $E(X)$ ne contient aucun sous-module injectif et par suite $E(x)$ est un injectif indécomposable. On voit aisément que si M est tel que $E(M)$ soit somme directe d'un nombre fini n de sous-modules injectifs et indécomposables, alors les chaînes maximales de sous-modules compléments ont pour longueur n. Ces derniers résultats répondent à une question posée dans [5]. (Cf. également [2], p. 202.)

THÉORÈME 3. - Soit X un sous-module complément maximal dans M alors $E(M/X)$ est isomorphe à un sous-module injectif et indécomposable de $E(M)$ et X est un sous-module $\cap$-irréductible minimal de M.

D'après le théorème 1, X est un sous-module complément maximal dans $M \iff E(X)$, est un sous-module injectif maximal de $E(M) \iff E(M)/E(X)$, est un sous-module injectif et indécomposable, d'autre part on a

$$E(M/X) \cong E(M)/E(X) ;$$

la deuxième assertion résulte du lemme suivant :

LEMME 1. - Soient N un sous-module de M et X un sous-module complément dans M contenant N, alors X/N est un sous-module complément dans M/N.

La démonstration de ce lemme est immédiate.

3. Définition et étude d'un sous-module particulier du A-module M.

Soit M un A-module ; nous allons montrer qu'il existe un sous-module $\Gamma(M)$ de M, tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans $\Gamma(M)$ soit un sous-module complément.

On considère l'ensemble B' des endomorphismes essentiels φ de $E(M)$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) il existe un A-module injectif K tel que $\ker \varphi = K \oplus H$,

(ii) $\varphi(E(M)) \subset K$.

On pose

$$\Gamma(E) = \bigcap_{\varphi \in B'} \ker \varphi \quad \text{et} \quad \Gamma(M) = M \cap \Gamma(E) .$$

LEMME 2. - Soient N un sous-module de $\Gamma(E)$ et I une enveloppe injective de N contenue dans $E(M)$, alors $N \subset \Gamma(I)$.

Soit φ un endomorphisme essentiel de I satisfaisant aux conditions (i) et (ii) ; soit $\varphi' = \varphi \circ p$ où p est la projection de $E(M)$ sur I parallélement à K', où K' est un supplémentaire de I dans E .

φ' est un endomorphisme de $E(M)$ de noyau $\ker \varphi \oplus K'$, c'est donc un endomorphisme essentiel qui satisfait de façon évidente à (i) et (ii), et par suite $\ker \varphi' \supset N$; d'où $\ker \varphi \supset N$ et $N \subset \Gamma(I)$.

LEMME 3. - Soient I et I' deux sous-modules injectifs de $E(M)$ tels que $I \cap M$ et $I' \cap M$ sont extensions essentielles différentes de $I \cap I' \cap M$; alors $\Gamma(E) \not\supset M$.

Soit N un complément relatif de $I' \cap M$, on a

$$E(M) = E(N) \oplus I' , \quad \text{et} \quad E(N) \cap I = (0) ;$$

sinon $E(N)$ rencontrerait $I \cap M$ suivant un sous-module non nul, et par hypothèse $I \cap M$ est extension essentielle de $I \cap I' \cap M$, d'où $E(N) \cap I' \cap M \neq (0)$. On en déduit que I et I' ont les mêmes modules supplémentaires dans $E(M)$ et on a

$$E(M) = I \oplus E(N) = I' \oplus E(N) .$$

Soit x un élément quelconque de $E(M)$; on a $x = i + n = i' + n'$, où n et $n' \in E(N)$. On pose $\varphi(x) = i - i' = n' - n$; il est clair que φ est un endomorphisme de noyau $I \cap I' \oplus E(N)$, il satisfait aux conditions (i) et (ii), et par hypothèse on a $\varphi(M) \neq (0)$.

Les lemmes 2 et 3 entrainent la propriété suivante :

THÉORÈME 4. - L'intersection de deux sous-modules compléments dans $\Gamma(M)$ est un sous-module complément.

En particulier si $E(M) = \Gamma(E)$, alors l'intersection de deux sous-modules injectifs de $E(M)$ est un sous-module injectif.

THÉORÈME 5. - Soit E un A-module injectif, pour que $E = \Gamma(E)$ il faut et il suffit que l'intersection de deux sous-modules injectifs de E soit un sous-module injectif.

Si $E \neq \Gamma(E)$, il existe un endomorphisme φ essentiel, tel que $\ker \varphi = K \oplus H$ avec $\ker \varphi \neq E$, posons $\psi(x) = x - \varphi(x)$, $\psi(x)$ est une injection, si I désigne une enveloppe injective de H , on a

$$I \cap \psi(I) = H \ .$$

On peut généraliser le résultat précédent de la façon suivante :

Soit P un module essentiel dans $E(M)$, P étant quasi-injectif et tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans P soit un sous-module complément, alors $P \subset \Gamma(E)$.

Exemple. - Considérons le $\underset{\sim}{Z}$-module $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$, on a $\Gamma(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$. Soit $C(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z})$ le coeur [5] de ce module, on a

$$C(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}) = \bigoplus_{P} \underset{\sim}{Z}^{1/P}/\underset{\sim}{Z} \ .$$

4. Etude des A-modules M tels que toute intersection de sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

THÉORÈME 6. - Soit M un A-module, les conditions suivantes sont équivalentes :

a. L'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

b. Pour que X sous-module de M soit un sous-module complément dans M, il faut et il suffit qu'il vérifie la propriété suivante :

(I) $x \notin X \implies$ il existe $a \in A$ avec $ax \neq 0$ tel que $Aax \cap X = (0)$.

e. Toute intersection de sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

(a) $\implies$ (b). - Soit X un sous-module complément dans M ayant la propriété suivante : il existe $x \notin X$ tel que, pour tout $ax \neq 0$, $Aax \cap X \neq (0)$, il existe un sous-module complément X' extension essentielle de Ax , et la propriété précédente entraîne que X' est extension essentielle de $X' \cap X$, $X' \cap X$ est par hypothèse un sous-module complément dans M , d'où $X' = X' \cap X$, et par suite $X' \subset X$, mais par hypothèse $x \notin X$, d'où l'assertion.

(b) $\Longrightarrow$ (c). - Soient $(X_i)_{i\in I}$ une famille de sous-modules compléments dans M, et $X = \bigcap_{i\in I} X_i$; $x \notin X \Longrightarrow$ il existe $i \in I$ tel que $x \notin X_i$, et par suite ne peut trouver $a \in A$ avec $ax \neq 0$ tel que $Aax \cap X_i = (0)$ et a fortiori $Aax \cap X = (0)$.

(c) $\Longrightarrow$ (a). - C'est évident.

On vérifie aisément la propriété suivante :

PROPOSITION 3. - Soit M un A-module, les conditions suivantes sont équivalentes:

a. Toute intersection de sous-modules compléments est un sous-module complément,

b. Pour tout sous-module X de M, il existe un plus petit sous-module complément dans M, $\overline{X}$ contenant X ; et alors l'application $X \to \overline{X}$ est une application de fermeture.

Soit M un A-module, on dira qu'un sous-module X de M est fermé s'il vérifie la condition (I) du théorème 6.

Soit x un élément de M, on notera $\mathrm{Ann}(x)$ l'annulateur de x, et si X est un sous-module de M, on notera $X \,{}^{\bullet}\!.\, x = \{a \in A,\ ax \in X\}$.

PROPOSITION 4. - Soit M un A-module, les conditions suivantes sont équivalentes:

a. Toute intersection de sous-modules compléments dans M est un sous-module complément,

b. Pour tout sous-module complément X dans M et tout $x \notin X$, $(X \,{}^{\bullet}\!.\, x)/\mathrm{Ann}(x)$ est un sous-module fermé de $A_s/\mathrm{Ann}(x)$.

Soit $a \in A$, on notera $\overline{a}$ la classe de a dans $A_s/\mathrm{Ann}\, x$.

(a) $\Longrightarrow$ (b). - Soit $\overline{a} \notin X \,{}^{\bullet}\!.\, x/\mathrm{Ann}\, x \Longrightarrow a \notin X \,{}^{\bullet}\!.\, x \Longrightarrow ax \notin X$, par suite il existe $b \in A$ avec $bax \neq 0$, tel que

$$Abax \cap X = (0) \Longrightarrow Aba \cap X \,{}^{\bullet}\!.\, x \in \mathrm{Ann}\, x .$$

avec $ba \notin \mathrm{Ann}\, x$, d'où

$$Ab\overline{a} \cap X \,{}^{\bullet}\!.\, x/\mathrm{Ann}\, x = (0) .$$

(b) $\Longrightarrow$ (a). - Soit $\overline{a} \notin X \,{}^{\bullet}\!.\, x/\mathrm{Ann}\, x$; il existe b avec $b\overline{a} \neq 0$ tel que

$$Ab\overline{a} \cap X \,{}^{\bullet}\!.\, x/\mathrm{Ann}\, x = (0) \Longrightarrow Aba \cap X \,{}^{\bullet}\!.\, x = \mathrm{Ann}\, x \Longrightarrow Aba\, x \cap X = (0)$$

et par suite X est un sous-module fermé, le théorème 6 permet de conclure.

Soit M un A-module, nous allons définir une relation d'équivalence ρ dans l'ensemble des sous-modules de M. Soient N et N' deux sous-modules

$$N \rho N' \iff N \text{ et } N' \text{ ont même ensemble de compléments relatifs.}$$

LEMME 4. - N et N' sont équivalents $\iff$ N et N' sont extensions essentielles de $N \cap N'$.

Soit P un sous-module de N', tel que $P \cap (N \cap N') = (0) \implies P \cap N = (0)$. P est donc contenu dans un complément relatif de N, donc de N', et par suite $P = (0)$.

Réciproquement, si N et N' sont extensions essentielles de $N \cap N'$, soit S un sous-module de M

$$S \cap N = (0) \iff S \cap (N \cap N') = (0) \iff S \cap N' = (0),$$

d'où le résultat.

THÉORÈME 7. - Soit M un A-module, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. L'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

b. soient N et N' deux sous-modules de M ; pour tout sous-module P, on a

$$(II) \qquad N \rho N' \implies (N + P) \rho (N' + P).$$

Considérons la condition (II')

$$(II') \qquad \begin{matrix} N \subset P_1 \\ N \rho N' \end{matrix} \implies (N' + P_1) \rho P_1$$

cette dernière condition entraîne la condition (II) ; en effet, prenons $P_1 = N + P$, on a

$$(N' + N + P) \rho (N + P),$$

de même on a

$$(N' + N + P) \rho (N' + P)$$

d'où

$$(N + P) \rho (N' + P).$$

1° Nous allons donc établir que la propriété (a) entraine (II').

Soient N, N', P des sous-modules de M, tels que l'on ait :

$$N \subset P \text{ et } N \rho N'$$

et soit $N \to \overline{N}$ l'application de fermeture, d'après le lemme précédent $\overline{N} = \overline{N'} = \overline{N \cap N'}$, d'autre part $\overline{P} \supset \overline{N} = N \cap N' = N'$, et par suite P et $P + N'$ sont des sous-modules essentiels de $\overline{P}$, d'où la propriété.

2° Soit N un sous-module de M ; nous allons montrer qu'il existe un seul sous-module complément $\overline{N}$ estension essentielle de N.

Soient X_1 et X_2 deux sous-modules compléments dans M, extensions essentielles de N

$$\left.\begin{array}{l} N \subset X_2 \\ N \rho X_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow (X_1 + X_2) \rho X_2$$

et par suite (lemme 3) $X_1 + X_2$ est extension essentielle de X_2, d'où $X_1 = X_2$.

Nous allons établir une caractérisation des A-modules M précédemment étudiés, caractérisation qui aura l'avantage de ne pas faire intervenir de façon explicite les sous-modules compléments.

Soient M un A-module quelconque et X un sous-module complément dans M non fermé ; il existe $x \notin X$ tel que, pour tout $ax \neq 0$, $Aax \cap X \neq (0)$, alors $X \cdot_\circ x$ est un idéal à gauche essentiel dans A, soit $a \notin X \cdot_\circ x$, $ax \notin X$ et a fortiori $ax \neq 0$, il existe donc $b \in A$ avec $bax \neq 0$ tel que $bax \notin X$, d'où $ba \in X \cdot_\circ x$ avec $ba \neq 0$.

LEMME 5. - Soit X un sous-module de M, l'ensemble des éléments x de M tels que $X \cdot_\circ x$ soit essentiel dans A est un sous-module $X' \supset X$.

Cela résulte des relations suivantes :

$$X \cdot_\circ (x + y) \supset (X \cdot_\circ x) \cap (X \cdot_\circ y)$$

$$X \cdot_\circ ax = (X \cdot_\circ x) \cdot_\circ a .$$

La première relation prouve que, si x et $y \in X'$, alors $x + y \in X'$; montre que $X \cdot_\circ x$ essentiel dans $A \Longrightarrow (X \cdot_\circ x) \cdot_\circ a$ essentiel dans A ; soit

$$\alpha \notin (X \cdot_\circ ax) \Longrightarrow \alpha a \notin X \cdot_\circ x \ ;$$

il existe $\beta \in A$ tel que $\beta\alpha a \neq 0$ avec

$$\beta\alpha a \in X \cdot_\circ x \Longrightarrow \beta\alpha \in (X \cdot_\circ ax) \text{ avec } \beta\alpha \neq 0 .$$

Soit maintenant X un sous-module complément dans un A-module M non fermé, alors X' est un sous-module contenant strictement X. Soit Y un complément relatif de X dans M ; $Y \cap X' \neq (0)$ si $x \in Y \cap X'$, alors $(X \cdot_\circ x) = \mathrm{Ann}(x)$ d'où

PROPOSITION 5. - Soient M un A-module et X un sous-module complément dans M non fermé, soit Y un complément relatif de X dans M, il existe un élément x non nul de X' tel que Ann(x) soit un idéal à gauche essentiel dans A .

Soit M un A-module ; on appelle sous-module singulier de M, l'ensemble des éléments $x \in M$, tels que Ann(x) soit essentiel dans A_s .

COROLLAIRE. - Soit M un A-module tel que le sous-module singulier J(M) soit nul ; alors l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

LEMME 6. - Soit X un sous-module complément non fermé dans M, il existe $y \notin M$, $y \neq (0)$ avec $Ay \cap X = (0)$ et un élément $x \neq 0 \in X$ tel que $A(x + y)$ soit extension essentielle de $A(x + y) \cap X$.

Il existe $z \neq 0$, $z \notin X$ tel que, pour tout $az \neq 0$, $Aaz \cap X \neq (0)$, $X + Az$ est un sous-module de M contenant strictement X ; si X' est un complément relatif de X, on a

$$(X + Az) \cap X' \neq (0) ,$$

il existe $x \in X$ et $y \in X'$ tels que

$$y = -x + bz \text{ avec } y \neq 0 \text{ si } x = 0 \implies bz \in X' \text{ et } Abz \cap X = (0) .$$

Contrairement à l'hypothèse faite sur z, pour tout $a(x + y) \neq 0$, $Aa(x + y) \cap X \neq (0)$, et par suite $A(x + y)$ est extension essentielle de $A(x + y) \cap X$.

THÉORÈME 8. - Soit M un A-module, les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. il existe deux sous-modules compléments dans M dont l'intersection n'est pas un sous-module complément,

b. il existe deux éléments x et y non nuls de M tels que

(i) $Ax \cap Ay = (0)$

(ii) $A_s/\mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y)$ est extension essentielle de $\mathrm{Ann}(x)/\mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y)$.

(b) $\implies$ (a). - $Ax \cap Ay = (0) \implies \mathrm{Ann}(x + y) = \mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y)$; soit X un sous-module complément dans M extension essentielle de Ay, $Ax \cap X = (0)$, et on a d'autre part

$$X \circ (x + y) = X \circ x = \mathrm{Ann}(x)$$

la relation (ii) s'écrit :

$A_s/\mathrm{Ann}(x+y)$ extension essentielle de $X \cdot (x+y)/\mathrm{Ann}(x+y)$,

et d'après la proposition 4 , X n'est pas un sous-module fermé.

(a) $\Longrightarrow$ (b). - Soit X un sous-module complément non fermé, d'après le lemme 6, il existe x et y éléments non nuls de M ayant les propriétés suivantes : $y \in X$, $Ax \cap X = (0)$ et par suite $Ax \cap Ay = (0)$; d'autre part $A(x+y)$ est extension essentielle de $A(x+y) \cap X$. On a les relations d'isomorphismes suivantes :

$$A(x+y) \cong A_s/\mathrm{Ann}(x+y)$$

$$A(x+y) \cap X \cong X \cdot (x+y) \mid \mathrm{Ann}(x+y) = \mathrm{Ann}(x+y) = \mathrm{Ann}(x)/\mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y).$$

Exemples.

Soient A un anneau et Λ un idéal à gauche essentiel dans A . Le A-module $A_s \times A_s/\Lambda$ vérifie les conditions du théorème précédent.

Soit le $\underset{\sim}{Z}$-module injectif $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$. Soient x et y tels que $Ax \cap Ay = (0)$, $Ax = \underset{\sim}{Z}^{(p/q)}/\underset{\sim}{Z}$ et $Ay = \underset{\sim}{Z}^{(p'/q')}/\underset{\sim}{Z}$ et par suite

$$\mathrm{Ann}(x) = \underset{\sim}{Z}q \qquad \mathrm{Ann}(y) = \underset{\sim}{Z}q'$$

a. $(q , q') \neq 1$. Soit m le p. p. c. m. de $p'q$, et de pq' . On vérifie que m/qq' n'est pas un entier et appartient à $\underset{\sim}{Z}^{(p/q)} \cap \underset{\sim}{Z}^{(p'/q')}$.

b. $(q , q') = 1$. $\underset{\sim}{Z}q \cap \underset{\sim}{Z}q' = \underset{\sim}{Z}qq'$, et par suite $(\underset{\sim}{Z}q/\underset{\sim}{Z}qq') \cap (\underset{\sim}{Z}q'/\underset{\sim}{Z}qq') = (0)$ ce qui contredit (ii), et par suite l'intersection de deux sous-modules injectifs de $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$ est un sous-module injectif.

PROPOSITION 6. - Soit A un anneau, les conditions suivantes sont équivalentes :

a. A est semi-simple,

b. Soit M un A-module quelconque : alors l'intersection de deux sous-modules compléments dans M est un sous-module complément.

(a) $\Longrightarrow$ (b). - C'est trivial.

(b) $\Longrightarrow$ (a). - Soit Λ un idéal à gauche essentiel dans A , on a vu que le module $A_s \times A_s/\Lambda$ contredisait l'hypothèse, d'où $\Lambda = A_s$, et par suite A est semi-simple.

PROPOSITION 7. - Soient M un A-module et $\mathfrak{F}$ la famille des sous-modules $(X_i)_{i\in I}$ ayant la propriété suivante : pour tout $i \in I$, l'intersection de deux sous-modules compléments dans X_i est un sous-module complément : alors $\mathfrak{F}$ est un ensemble inductif.

C'est une conséquence immédiate du théorème 8.

5. Cas particulier des A-modules M dont le sous-module singulier est nul [3].

LEMME 7. - Soit M un A-module, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Ann(x) est un idéal à gauche formé de A pour tout $x \neq 0$,

(ii) le sous-module singulier de M est nul.

Il est clair que (i) $\Longrightarrow$ (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). - Soit $b \notin \mathrm{Ann}(x)$, $bx \neq 0$. Soit $a \neq 0$ appartenant à un complément relatif de Ann(bx),

$Aa \cap \mathrm{Ann}(bx) = (0) \Longrightarrow Aabx \neq (0)$ pour tout $aa \neq 0 \Longrightarrow Aab \cap \mathrm{Ann}(x) = (0)$.

LEMME 8. - Soit X un sous-module de M, pour que $X \circ x$ soit essentiel dans A il faut et il suffit que, pour tout $ax \neq 0$, $Aax \cap X \neq (0)$.

Il est évident que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire.

Soit $b \notin X \circ x \Longrightarrow b \notin \mathrm{Ann}(x)$ qui est fermé, il existe $ab \neq 0$ tel que

$$Aab \cap \mathrm{Ann}(x) = (0)$$

et on a

$$Aab \cap X \circ x \neq (0) \quad \text{et par suite} \quad Aabx \cap X \neq (0),$$

Compte tenu de l'étude générale précédente, on en déduit le résultat suivant.

PROPOSITION 8. - Pour que X sous-module de M soit un sous-module complément dans M, il faut et il suffit qu'il vérifie la propriété :

$$x \notin X \Longrightarrow X \circ x \text{ est un idéal fermé de } A.$$

Du lemme 2, on déduit le fait suivant : soit N un sous-module de M la fermeture $\overline{N}$ de N est l'ensemble des éléments $x \in M$ tels que $N \circ x$ soit essentiel dans A. On a d'autre part le résultat suivant: Soit X un sous-module complément maximal dans M et $x \notin X$, alors $X \circ x$ est un sous-module fermé maximal de A.

Cas particulier. - On suppose que le A-module à gauche A_s est tel que l'idéal à gauche singulier est nul. On a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 9. - Soient X un idéal à gauche de A et X sa fermeture, on a les relations suivantes:

a. $X \subset \overline{X}$, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, $X \subset Y \Longrightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$,

b. $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$,

c. $\overline{X} \cdot a = \overline{X \cdot a}$,

d. $\overline{X}.a \in \overline{Xa}$,

et par suite l'application de fermeture peut être définie à partir d'une localisation [1].

Les propriétés (a) et (b) sont vraies dans un A-module M tel que l'intersection de deux sous-modules compléments dans M soit un sous-module complément.

c. $\overline{X} \cdot a$ est extension essentielle de $X \cdot a$. Soit $z \neq 0$, $z \in \overline{X} \cdot a \Longrightarrow za \in \overline{X}$. Si $za = (0) \Longrightarrow z \in X \cdot a$, si $za \neq 0$, $Aza \cap X \neq (0)$, par suite il existe $b \in A$ avec $bza \neq (0)$, d'où $bz \in X \cdot a$ avec $bz \neq 0$.

d. $\overline{Xa} \supseteq (\overline{X} + Ann(x))/Ann(x)$, $Xa \supseteq (X + Ann(x))/Ann(x)$.

$\overline{X} + Ann(x)$ est extension essentielle de $X + Ann(x)$ (théorème 7). $Ann(x)$ est un fermé par suite $\overline{X} + Ann(x)/Ann(x)$ est extension essentielle de $X + Ann(x)/Ann(x)$. Finalement

$$X.a \subset \overline{X}.a \subset \overline{Xa} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GABRIEL (Pierre). - La localisation dans les anneaux non commutatifs, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 13, 1959/60, n° 2, 35 p.

[2] GOLDIE (A. W.). - Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London math. Soc., t. 10, 1960, p. 201-220.

[3] JOHNSON (R. E.). - Structure theory of faithful rings, II., Trans. Amer., math. Soc., t. 84, 1957, p. 523-544.

[4] JOHNSON (R. E.) and WONG (E. T.). - Quasi-injective modules and irreductible rings, J. London math. Soc., t. 36, 1961, p. 260-265.

[5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 14, 1960/61, n° 1 et 17, 11 et 13 p.