

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MARIO PETRICH

Sur la décomposition demi-réticulée maximale d'un demi-groupe

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, n° 1 (1962-1963), exp. n° 8,
p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_1_A8_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

14 janvier 1963

SUR LA DÉCOMPOSITION DEMI-RÉTICULÉE MAXIMALE D'UN DEMI-GROUPE

par Mario PETRICH

L'image homomorphe demi-réticulée maximale d'un demi-groupe D est le demi-treillis Y tel que toute image homomorphe demi-réticulée de D soit aussi image homomorphe de Y ; des caractérisations du demi-treillis Y ont été données par A. H. CLIFFORD [1] et par M. YAMADA [8] (voir aussi G. THIERRIN [7]) ; la décomposition de D en les classes d'équivalence qui sont les images inverses complètes des éléments de Y est appelée la décomposition demi-réticulée maximale de D .

Nous nous proposons de caractériser les éléments de Y au moyen des idéaux premiers de D (§ 1) et d'établir certaines propriétés de ces éléments (§ 2). Au § 3, nous montrons comment certaines propriétés des N -classes d'un demi-groupe D influent sur la structure de D . AU § 4, nous donnons, pour certaines classes de demi-groupes, l'expression explicite de la plus petite face contenant un élément fixé du demi-groupe.

Les résultats contenus dans cet exposé seront développés dans un article qui doit paraître au Pacific Journal of Mathematics (voir [3]).

1. Image homomorphe demi-réticulée maximale d'un demi-groupe.

DÉFINITION 1. - Un idéal premier I d'un demi-groupe D est un idéal bilatère de D qui vérifie la propriété :

$$x, y \in D ; xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I .$$

La partie vide, \emptyset , appartient à la famille \mathfrak{J} des idéaux premiers ; nous excluons D de cette famille.

DÉFINITION 2. - On appelle face d'un demi-groupe D , un sous-demi-groupe consistant, c'est-à-dire un sous-demi-groupe N de D qui vérifie la propriété :

$$x, y \in D ; xy \in N \implies x \in N \text{ et } y \in N .$$

Il est évident qu'une partie A de D est un idéal premier si et seulement si son complémentaire dans D , $D - A$, est une face.

G. THIERRIN a étudié quelques propriétés des faces d'un demi-groupe commutatif (cf. [5]).

Nous désignerons par \mathcal{P} la famille de toutes les parties de l'ensemble \mathcal{D} ; la famille \mathcal{P} n'est pas vide puisqu'elle contient $\{\emptyset\}$.

Nous noterons \mathcal{E} l'ensemble des équivalences régulières de D qui vérifient les conditions :

$$x \sim x^2 \text{ et } xy \sim yx \text{ quels que soient } x, y \in D.$$

L'équivalence universelle est un élément de l'ensemble \mathcal{E} .

La théorie des décompositions demi-réticulées maximales peut se généraliser au cas où D est un groupoïde, c'est-à-dire un ensemble non vide dans lequel est définie une opération binaire univoque et universelle ; il est alors exigé que chaque élément \sim de l'ensemble \mathcal{E} satisfasse à la condition supplémentaire :

$$(xy)z \sim x(yz) \text{ quels que soient } x, y, z \in D.$$

Si α est une partie de l'ensemble \mathcal{P} , nous noterons $\overset{\alpha}{\sim}$ la relation binaire définie dans D par la condition :

$$x \overset{\alpha}{\sim} y \iff \{\forall I \in \alpha ; x \in I \iff y \in I\}.$$

Soit φ l'application, définie dans \mathcal{P} , qui à l'élément α fait correspondre la relation binaire $\overset{\alpha}{\sim}$; on a le théorème :

THÉORÈME 1. - L'image de l'application φ est l'ensemble \mathcal{E} . De plus, si α et β sont deux éléments de \mathcal{P} , l'ensemble α est contenu dans l'ensemble β si et seulement si l'équivalence $\overset{\beta}{\sim}$ est plus fine que l'équivalence $\overset{\alpha}{\sim}$.

Nous démontrons le théorème dans le cas où D est un demi-groupe ; la généralisation aux groupoïdes est évidente.

Démonstration. - Il est clair que $\overset{\emptyset}{\sim}$ est l'équivalence universelle. Soit, donc, $\alpha \in \mathcal{P}$ et $\alpha \neq \emptyset$. La relation binaire $\overset{\alpha}{\sim}$ est visiblement une relation d'équivalence. Supposons que l'on ait :

$$(1) \quad x \overset{\alpha}{\sim} y$$

et soit z un élément quelconque de D . Si zx est un élément d'un idéal I appartenant à l'ensemble α , ou bien $z \in I$ et, par suite, $zy \in I$; ou bien $x \in I$, et, d'après (1), $y \in I$; donc $zy \in I$. En échangeant les rôles de y et de x , on voit que l'appartenance $zy \in I$ entraîne $zx \in I$. Par suite, on a

$$zx \overset{\alpha}{\sim} zy .$$

On démontre de la même façon que :

$$xz \overset{\alpha}{\sim} yz .$$

D'autre part, il est évident que les relations :

$$x \overset{\alpha}{\sim} x^2 \quad \text{et} \quad xy \overset{\alpha}{\sim} yx$$

sont vérifiées par tous les éléments x et y de D . Par conséquent la congruence $\overset{\alpha}{\sim}$ appartient à l'ensemble \mathcal{E} .

Inversement, soit \sim un élément de l'ensemble \mathcal{E} . A chaque élément x de D associons la partie

$$A_x = \{y ; y \in D ; x \sim xy\} .$$

Puisque $x \in A_x$, A_x est un complexe de D . Si y et z sont deux éléments de A_x , c'est-à-dire, si les relations :

$$x \sim xy \quad \text{et} \quad x \sim xz$$

sont vérifiées, on a $x \sim x(yz)$ et, par suite, $yz \in A_x$. Supposons, à présent, que yz soit un élément de A_x ; alors :

$$(2) \quad x \sim x(yz) .$$

Puisque, par définition de \sim , $z \sim z^2$, la relation (2) entraîne :

$$x \sim xz$$

d'où $z \in A_x$.

Mais, toujours en vertu de la définition de \sim , la relation (2) s'écrit aussi :

$$x \sim (xz) y .$$

Comme $z \in A_x$, on a $x \sim y$. Par conséquent $y \in A_x$. On a, ainsi, démontré que A_x est une face de D , c'est-à-dire que $D - A_x$ est un idéal premier de D .

Désignons par \mathcal{A} l'ensemble des idéaux premiers de la forme $D - A_x$, lorsque x parcourt le demi-groupe D . Nous allons montrer que les relations d'équivalence \sim et $\overset{\alpha}{\sim}$ coïncident.

Supposons que la relation :

$$(3) \quad x \sim y$$

soit vérifiée pour deux éléments x et y de D . D'autre part, supposons que :

$$x \notin I$$

pour un élément I de \mathcal{A} .

Par définition de \mathcal{A} , il existe un élément z de D pour lequel :

$$I = D - A_z .$$

Par conséquent :

$$z \sim zx .$$

On a alors, d'après (3),

$$z \sim zy$$

c'est-à-dire que $y \notin I$.

La relation \sim étant symétrique, nous voyons que si $y \notin I$, alors $x \notin I$ et, par suite, on a :

$$\begin{array}{c} \mathcal{A} \\ x \sim y . \end{array}$$

Supposons, à présent, que x et y soient liés par la relation $\overset{\mathcal{A}}{\sim}$. Alors, pour chaque élément z de D , on a $x \in A_z$ si et seulement si $y \in A_z$; ou encore, la relation $z \sim zx$ est vérifiée si et seulement si la relation $z \sim zy$ l'est. En particulier, en prenant $z = x$, et, puisque l'on a, par définition de \sim ,

$$x \sim x^2 \quad \text{alors} \quad x \sim xy .$$

D'une manière analogue nous obtenons :

$$y \sim xy .$$

D'où

$$x \sim y .$$

Nous avons donc démontré que l'application φ est **surjective**.

La seconde partie du théorème est, à présent, évidente.

COROLLAIRE. — Le demi-groupe quotient de D par la relation $\overset{\mathcal{A}}{\sim}$ est l'image homomorphe demi-réticulée maximale de D .

2. Eléments de la décomposition demi-réticulée maximale d'un demi-groupe.

Si elle n'est pas vide, l'intersection d'une famille quelconque de faces d'un demi-groupe D est encore une face de D . On peut donc parler de la plus petite face $N(x)$ contenant un élément x de D , qui est l'intersection de toutes les faces qui contiennent x .

DÉFINITION 3. - Soit x un élément du demi-groupe D et soit $N(x)$ la plus petite face de D contenant x . Nous appellerons N-classe de D (associée à l'élément x), le complexe :

$$N_x = \{y ; y \in D ; N(y) = N(x)\} .$$

Nous noterons Y l'ensemble des N -classes distinctes de D muni de l'opération :

$$N_x N_y = N_{xy} .$$

L'équivalence $\overset{\sim}{\sim}$ peut être caractérisée au moyen des N -classes. On a, en effet,

$$x \overset{\sim}{\sim} y \iff N_x = N_y .$$

Nous pouvons, par conséquent, énoncer le théorème :

THÉORÈME 2. - L'ensemble Y des N -classes distinctes de D représente la décomposition demi-réticulée maximale de D .

Par suite, chaque N -classe est un sous-demi-groupe de D .

Dans la suite N_x désignera soit une partie de D soit un élément de Y ; il ne pourra en résulter aucune confusion; l'ensemble Y est muni d'une relation d'ordre partiel, \leq , définie, en termes de N -classes, par :

$$N_x \leq N_y \iff N_x N_y = N_x .$$

Le théorème 3 permettra de construire les ensembles $N(x)$. Pour cela, posons :

$$N_1(x) = \{x^m ; m \text{ entier } > 0\} .$$

Pour $n \geq 1$, définissons $N_{n+1}(x)$ comme étant le demi-groupe engendré par les éléments y de D tels que :

$$N_n(x) \cap J(y) \neq \emptyset$$

où $J(y)$ est l'idéal bilatère de D engendré par y .

On a alors :

THÉORÈME 3. - Pour tout élément x du demi-groupe D ; on a

$$N(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n(x) .$$

Démonstration. - On a, évidemment, pour chaque entier positif n , l'inclusion

$$N_n(x) \subseteq N_{n+1}(x) .$$

Donc, le complexe $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n(x)$ est un sous-demi-groupe de D .

Si, d'autre part, le produit de deux éléments y et z de D appartient à T , il existe un entier positif n pour lequel :

$$yz \in N_n(x) \cap J(y) \cap J(z) .$$

Par suite, y et z appartiennent à $N_{n+1}(x)$ et donc :

$$y \in T \text{ et } z \in T .$$

On a ainsi démontré que T est une face de D , qui contient, par construction, l'élément x .

Si, à présent, N est une face de D et si $x \in N$, on a, d'après la définition d'une face :

$$N_n(x) \subseteq N$$

et ceci pour tous les entiers positifs n .

Par conséquent

$$T = N(x) .$$

Le théorème suivant concerne la structure des N -classes.

THÉORÈME 4. - Aucun idéal bilatère d'une N -classe ne possède, en tant que demi-groupe, d'idéal premier non vide.

Démonstration. - Nous démontrerons le théorème en établissant que la seule face d'un idéal I d'une N -classe N_z , du demi-groupe D , est I lui-même.

Soient donc N une face de I , x un élément de N et y un élément de I . Nous avons, dans le demi-groupe D et d'après la définition de la N -classe N_z :

$$N(x) = N(y) = N(z) .$$

Par suite, $y \in N(x)$. Aussi aurions-nous démontré le théorème, si nous avions montré l'inclusion :

$$N(x) \cap I \subseteq N .$$

La démonstration se fait par récurrence sur l'indice des demi-groupes $N_n(x)$ (cf. théorème 3).

Soit $w \in N_1(x)$; il existe, alors, un entier positif m pour lequel

$$w = x^m .$$

Puisque $x \in N$, on a $w \in N$. Par conséquent $N_1(x) \subseteq N$; d'où

$$N_1(x) \cap I \subseteq N.$$

Supposons que l'on ait $N_n(x) \cap I \subseteq N$ et soit $w \in N_{n+1}(x) \cap I$. Alors, par définition du demi-groupe $N_{n+1}(x)$, on peut écrire :

$$w = w_1 w_2 \dots w_k,$$

où, pour $i = 1, 2, \dots, k$, w_i est un élément de D pour lequel il existe deux éléments a_i et b_i de D^1 [D^1 désignant le demi-groupe obtenu en adjoignant à D un élément unité] tels que $a_i w_i b_i \in N_n(x)$. Puisque $N_n(x) \subseteq N(x)$, on a :

$$a_i w_i b_i \in N(x);$$

d'où

$$x a_i w_i b_i x \in N(x).$$

Il en résulte que :

$$N(x a_i w_i b_i x) \subseteq N(x).$$

Mais l'on a aussi $x \in N(x a_i w_i b_i x)$, car $N(x a_i w_i b_i x)$ est une face de D et, par suite, contient chacun des facteurs d'un produit qui lui appartient. Donc

$$N(x) \subseteq N(x a_i w_i b_i x).$$

Par conséquent

$$N(x) = N(x a_i w_i b_i x).$$

Dès lors $x a_i w_i b_i x$ est un élément de N_x .

Puisque x appartient au demi-groupe $N_n(x)$, nous avons

$$x a_i w_i b_i x \in N_n(x) \cap N_x.$$

Donc, puisque I est un idéal de N_x

$$x(x a_i w_i b_i x) x \in I.$$

On démontre de la même façon que les éléments : $x^2 a_i$, $x^2 a_i w_i$, $w_i b_i x^2$, $b_i x^2$ appartiennent à I . Par suite, la relation :

$$x^2 a_i w_i b_i x^2 \in N_n(x) \cap I \subseteq N$$

entraîne

$$x^2 a_i w_i \text{ et } w_i b_i x^2 \in N,$$

puisque N est une face de I .

Comme précédemment, on en déduit que $x^2 a_1 w_1 w_2 \in I$. Des relations :

$$(x^2 a_1 w_1 w_2)(b_2 x^2) = (x^2 a_1 w_1)(w_2 b_2 x^2) \in N \text{ et } b_2 x^2 \in I$$

il suit :

$$x^2 a_1 w_1 w_2 \in N.$$

En répétant ce procédé $k-2$ fois, nous obtenons :

$$x^2 a_1 w_1 w_2 \dots w_k = x^2 aw \in N.$$

Donc, puisque $x^2 a_1 \in I$, nous obtenons $w \in N$. Il en résulte que : $N = I$.

COROLLAIRE 1. - Tout demi-groupe est un demi-treillis de demi-groupes sans idéaux premiers non vides (cf. G. THIERRIN [6], théorèmes 3 et 5).

COROLLAIRE 2. - Tout idéal premier d'un demi-groupe est une réunion de N -classes.

COROLLAIRE 3. - Il existe une bijection isotone, par rapport à l'inclusion, entre l'ensemble des idéaux premiers d'un demi-groupe D et l'ensemble des idéaux premiers de l'image homomorphe demi-réticulée maximale Y de D (cf. [7], théorème 5).

COROLLAIRE 4. - Pour un demi-groupe D , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- a. D ne possède aucun idéal premier non vide.
- b. D ne possède qu'une seule N -classe.

THÉOREME 5. - Soit x un élément d'un demi-groupe D . La N -classe N_x est, par rapport à l'inclusion, le plus grand sous-demi-groupe de D qui contienne x et qui ne possède pas d'idéal premier non vide.

Démonstration. - Soit T un sous-demi-groupe de D contenant x ; supposons que $T \not\subseteq N_x$. Il existe alors un élément y de T pour lequel $N_x \not\subseteq N_y$.

Soit N le demi-groupe défini par les conditions :

$$N = T \cap N(x) \quad \text{si } N_x \not\subseteq N_y$$

$$N = T \cap N(y) \quad \text{si } N_x < N_y$$

où la relation d'ordre \leq est définie par :

$$N_x \leq N_y \quad \text{si et seulement si } N_x N_y = N_x.$$

On établit facilement que :

$$N(x) = \bigcup_{N_z \geq N_x} N_z \quad \text{et que} \quad N(y) = \bigcup_{N_z \geq N_y} N_z.$$

Dans le cas où $N_x \not\leq N_y$, nous avons $x \in N$ et $y \notin N$.

Dans le cas où $N_x < N_y$, nous avons $x \notin N$ et $y \in N$.

Par suite, dans chaque cas, N est une face de T distincte de T . Donc $T - N$ est un idéal premier non vide de T . Le théorème 5 résulte à présent du théorème 4.

3. Quelques propriétés des N-classes.

On peut établir des relations intéressantes entre certaines propriétés concernant les N-classes d'un demi-groupe D et certaines propriétés concernant D lui-même.

En manière d'exemple, nous démontrerons le théorème suivant.

THÉOREME 6. - Pour un demi-groupe D , les conditions suivantes sont équivalentes :

a. Chaque N-classe de D est un groupe ;

b. Tous les idéaux à gauche et tous les idéaux à droite d'une N-classe de D sont des idéaux bilatères semi-premiers ;

c. Tous les idéaux à gauche et tous les idéaux à droite de D sont des idéaux bilatères semi-premiers ;

d. Pour tout $x \in D$ on a :

$$Dx = xD \quad \text{et} \quad x \in Dx^2.$$

De plus, si l'une des conditions précédentes est vérifiée, la condition :

e. Pour tout $x \in D$, $N_x = \{y, y \in D; xD = yD\}$ l'est aussi.

Démonstration. - L'implication (a) \implies (b) est triviale.

L'implication (b) \implies (c) résulte des égalités $N_x = N_x^2$ et $N_{xy} = N_{yx}$.

Implication (c) \implies (d). - Soit x un élément de D ; l'idéal à gauche Dx^2 étant un idéal bilatère semi-premier, de l'appartenance $x^4 \in Dx^2$, il suit que $x \in Dx^2$. On voit de la même façon que $x \in x^2 D$. Puisque $Dx^2 \subseteq Dx$, on a $x \in Dx$; donc, Dx est le plus petit idéal à gauche qui contient x . On montre

de la même façon que xD est le plus petit idéal à droite qui contient x . Comme, d'autre part, Dx et xD sont des idéaux bilatères, on a $Dx = xD$.

Implication (d) \implies (e). - Soit x un élément de D . Posons :

$$P(x) = \{y ; y \in D ; xD \subseteq yD\}.$$

On a $x \in P(x)$.

D'autre part :

$$x \in x^2 D \subseteq xDx \subseteq xDxD.$$

Si, donc, y et z sont deux éléments de $P(x)$, c'est-à-dire si les relations :

$$xD \subseteq yD \quad \text{et} \quad xD \subseteq zD$$

sont vérifiées, on a

$$x \in yDzD = yzD^2 \subseteq yzD.$$

D'où $yz \in P(x)$ et $P(x)$ est un sous-demi-groupe de D .

Supposons, à présent, que yz soit un élément de $P(x)$. Nous avons

$$xD \subseteq yzD.$$

D'où

$$xD \subseteq yD.$$

Et, par conséquent

$$y \in P(x).$$

D'autre part, puisque $yzD = Dyz$, nous avons aussi

$$xD \subseteq Dyz \subseteq Dz = zD.$$

Et, alors, $z \in P(x)$. Donc $P(x)$ est une face de D et contient x . Dès lors :

$$N(x) \subseteq P(x).$$

Mais, si y est un élément de $P(x)$, c'est-à-dire si

$$xD \subseteq yD$$

il existe un élément a de D pour lequel

$$x^2 = ya.$$

Donc

$$N_x = N_x^2 = N_{ya}$$

c'est-à-dire que $ya \in N_x \subseteq N(x)$.

Comme $N(x)$ est une face de D , on a alors $y \in N(x)$. Par suite $P(x) \subseteq N(x)$; d'où $P(x) = N(x)$.

Nous avons donc démontré que :

$$N_x = \{y ; y \in D ; xD = yD\}.$$

Implication (d) \Rightarrow (a). - Nous allons montrer, en utilisant la condition (e) que pour chaque élément y de N_x , on peut trouver un élément z de N_x tel que :

$$x = zy.$$

Ceci établit l'existence des quotients à gauche dans N_x .

On démontre, de façon analogue, l'existence des quotients à droite.

Puisque $x \in x^2 D$ et que $xD = yD = Dy$, il existe deux éléments a et b de D pour lesquels sont vérifiées les égalités :

$$x = x^2 a = x(xa) = x(by) = (xb) y.$$

Nous avons donc :

$$N_x = N_{xb} N_y = N_{xb} N_x = N_{xb}.$$

D'où $xb \in N_x$. Ainsi, N_x est un groupe.

On peut remplacer la condition (a) du théorème 5 par des conditions telles que :

a'. Chaque N -classe est un demi-groupe simple à gauche.

a". Chaque N -classe est un demi-groupe simple.

a'''. Chaque N -classe est un demi-groupe complètement simple.

On obtient alors des conditions, portant sur le demi-groupe D et qui sont équivalentes à (a') (resp. (a'')) ; resp. (a''')) [cf. [3]].

4. Quelques expressions de $N(x)$.

THÉORÈME 7. - On a $Dx D = Dx^2 D$ pour tout élément x d'un demi-groupe D , si et seulement si :

$$N(x) = \{y ; y \in D ; Dx D \subseteq Dy D\}$$

pour tout élément x de D .

Démonstration. - En effet supposons que l'on ait l'égalité

$$Dx D = Dx^2 D$$

pour tout élément x de D . Soit $P(x) = \{y ; y \in D ; Dx D \subseteq Dy D\}$. Evidemment x est un élément de $P(x)$. Soient y et z deux éléments de $P(x)$; on a donc :

$$Dx D \subseteq Dy D \quad \text{et} \quad Dx D \subseteq Dz D .$$

Si a est un élément quelconque de D , de l'égalité :

$$Dzay D = Dzay zayD$$

il suit :

$$Dzay D \subseteq Dy z D .$$

D'où

$$Dz Dy D \subseteq Dy z D ,$$

Mais l'on a :

$$Dx D = Dx^4 D \subseteq Dx D \cdot Dx D \subseteq Dz Dy D .$$

Donc

$$Dx D \subseteq Dy z D \quad \text{et} \quad yz \in P(x) .$$

Par conséquent $P(x)$ est un sous-demi-groupe de D . Supposons que yz soit un élément de $P(x)$: Nous avons donc

$$Dx D \subseteq Dy z D .$$

D'où il suit

$$Dx D \subseteq Dy D \quad \text{et} \quad Dx D \subseteq Dz D .$$

Par suite, $P(x)$ est une face de D contenant x . On a donc :

$$N(x) \subseteq P(x) .$$

Soit $y \in P(x)$; on a :

$$x^3 \in Dx D \subseteq Dy D \subseteq J(y)$$

où $J(y)$ est l'idéal bilatère de D engendré par y . Donc $x^3 \in N_1(x) \cap J(y)$, et, par suite, $y \in N_2(x)$. Comme $N_2(x) \subseteq N(x)$, y appartient à $N(x)$. Par conséquent $P(x) \subseteq N(x)$; d'où $P(x) = N(x)$.

Réciproquement, si $N(x) = \{y ; y \in D ; Dx D \subseteq Dy D\}$ et puisque $x^2 \in N(x)$, alors $Dx D \subseteq Dx^2 D$ et, donc,

$$Dx D = Dx^2 D .$$

COROLLAIRE. - Si le demi-groupe D est idempotent, on a, pour tous les éléments x de D, $N(x) = \{y ; y \in D ; x = xyx\}$.

Démonstration. - En vertu du théorème 7, il suffit de montrer que, pour tous les éléments x et y de D, l'inclusion :

$$Dx D \subseteq Dy D$$

est satisfaite si et seulement si l'on a $x = xyx$.

La condition est nécessaire, car de $Dx D \subseteq Dy D$, il suit

$$x = x^3 = ayb$$

où a et b sont deux éléments de D. Par conséquent

$$x = aybx = a(ybx)(ybx) = (aybx)(ybx).$$

Donc

$$x = x(ybx) = (xy)^2 bx = (xy)(xybx) = xyx.$$

La condition est suffisante. En effet si $x = xyx$, on a, quels que soient les éléments a et b de D :

$$axb = (ax)y(xb) \in Dy D.$$

Par conséquent

$$Dx D \subseteq Dy D.$$

Il résulte de ce corollaire, que, lorsque le demi-groupe D est idempotent, on a, pour tout élément x de D :

$$N_x = \{y ; y \in D ; x = xyx ; y = yxy\},$$

résultat obtenu précédemment par D. McLEAN [2].

DEFINITION 4. - Un demi-groupe D est dit faiblement commutatif si, pour chaque couple d'éléments x et y de D, il existe un couple d'éléments a et b de D et un entier naturel k pour lesquels l'égalité :

$$(xy)^k = ax = yb$$

est vérifiée.

THÉORÈME 8. - Si le demi-groupe D est faiblement commutatif on a, pour tout élément x de D :

$$N(x) = \{y ; y \in D ; \exists n, \text{ entier naturel} : x^n \in Dy\}.$$

Démonstration. - Posons $P(x) = \{y ; y \in D ; \exists n \text{ entier naturel } x^n \in Dy\}$.
On a évidemment $P(x) \subseteq N(x)$; puisque x est un élément de $P(x)$, il suffira de démontrer que $P(x)$ est une face de D pour conclure que $P(x) = N(x)$.

Soient y et z deux éléments de $P(x)$; il existe donc deux éléments a et b de D et deux entiers naturels m et n pour lesquels on a :

$$x^m = ay \text{ et } x^n = bz .$$

Puisque D est faiblement commutatif, il existe un entier naturel r et un élément c de D , pour lesquels l'égalité :

$$x^{nr} = (bz)^r = zc$$

est vérifiée.

Il en résulte que :

$$x^{m+nr} = [a(yz)] c .$$

Il existe alors un entier naturel k et un élément d de D pour lesquels on a :

$$x^{(m+nr)k} = d \cdot a(yz) .$$

Donc $yz \in P(x)$.

Inversement supposons que $yz \in P(x)$, c'est-à-dire que : $x^m = ayz$, m entier naturel, $a \in D$. Donc $x^m = (ay)z$ et $z \in P(x)$. D'autre part, on a :

$$x^{mk} = b(ay)$$

pour un entier naturel k et un élément b de D . Donc $y \in P(x)$.

Il résulte du théorème 8, que lorsque le demi-groupe D est faiblement commutatif, on a :

$$N_x = \{y ; y \in D ; \exists n \text{ entier naturel} : x^n \in Dy \text{ et } y^n \in Dx\} ,$$

expression d'une N -classe, précédemment obtenue par T. TAMURA et N. KIMURA [4] dans le cas particulier où D est commutatif.

Nous supposerons à présent que le demi-groupe D est périodique ; nous désignerons par E l'ensemble des idempotents de D et si $e \in E$, nous poserons :

$$K^{(e)} = \{x , x \in D , x^n = e \text{ pour un entier naturel } n\} .$$

THÉORÈME 9. - Soit D un demi-groupe périodique ; D est faiblement commutatif si et seulement si chaque complexe $K^{(e)}$ est une N -classe de D .

Démonstration. - La condition est suffisante. Supposons que pour tout idempotent

e , on ait

$$K(e) = N_x$$

où $x \in K(e)$.

Nous avons, si a et b sont deux éléments de D

$$ab, ba \in N_{ab} = K(f)$$

où $f \in E$ et, donc,

$$(ab)^m = (ba)^n = f$$

où m et n sont deux entiers naturels. Par conséquent :

$$\begin{aligned} (ab)^m &= (ba)^{2n} \\ &= b[a(ba)^{2n-1}] = [(ba)^{2n-1} b] a . \end{aligned}$$

La condition est nécessaire. En effet, supposons D faiblement commutatif. Pour chaque élément x de D , N_x est un sous-demi-groupe de D et, par conséquent, il contient un idempotent. Si e et f appartiennent à $E \cap N_x$ nous avons, d'après le théorème 8,

$$e = af \quad \text{et} \quad f = be$$

où a et b sont deux éléments de D .

Par suite

$$ef = (af) f = af = e \quad \text{et} \quad fe = (be) e = be = f .$$

D'autre part, il existe un entier naturel k et deux éléments c et d de D pour lesquels on a :

$$(ef)^k = ce = fd .$$

D'où

$$e = e^k = (ef)^k = fd ,$$

Par conséquent

$$f = fe = f(fd) = fd = e .$$

Donc

$$N_x \subseteq K(e) .$$

Mais il est évident que $K(e) \subseteq N_x$. Et nous avons alors

$$N_x = K(e) .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CLIFFORD (A. H.). - Résumé de [8], Math. Reviews, t. 17, 1956, p. 584.
- [2] McLEAN (David). - Idempotent semigroups, Amer. math. Monthly, t. 61, 1954, p. 110-113.
- [3] PETRICH (Mario). - The maximal semilattice decomposition of a semigroup, Bull. Amer. math. Soc., t. 69, 1963, p. 342-344 ; Math. Z., t. 85, 1964, p. 68-82.
- [4] TAMURA (T.) and KIMURA (N.). - On decompositions of a commutative semigroup, Kôdai math. Sem. Rep., t. 4, 1954, p. 109-112.
- [5] THIERRIN (Gabriel). - Quelques propriétés des sous-groupoïdes consistants d'un demi-groupe abélien D , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 236, 1953, p. 1837-1839.
- [7] THIERRIN (Gabriel). - Sur quelques décompositions des groupoïdes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 242, 1956, p. 596-598.
- [8] YAMADA (M.). - On the greatest semilattice decomposition of a semigroup, Kôdai math. Sem. Rep., t. 7, 1955, p. 59-62.
-