Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Pierre Grillet

Sur l'équivalence F de Green

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 16, n° 1 (1962-1963), exp. n° 2, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1962-1963__16_1_A2_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
16e année, 1962/63, n° 2

12 novembre 1962

SUR L'ÉQUIVALENCE $\mathfrak{S}$ DE GREEN

par Pierre GRILLET

I. Semi-équivalences canoniques et équivalences associées.

On suppose connues les propriétés élémentaires des relations binaires sur un ensemble E en particulier : inclusion, intersection, réunion, produit, cette dernière opération étant définie par

$$(x\ \mathcal{R} \circ \mathcal{S}\ y) \iff ((\exists\ z \in E)\ x\ \mathcal{R}\ z \text{ et } z\ \mathcal{S}\ y)\ .$$

L'équivalence engendrée par deux équivalences α et β sera notée $\alpha \vee \beta$; en général $\alpha \vee \beta \neq \alpha \cup \beta$. L'égalité sera aussi notée I .

1. Semi-équivalences.

DÉFINITION 1. - On appelle semi-équivalence toute relation binaire symétrique et transitive.

DÉFINITION 2. - Si s est une semi-équivalence sur E , et si $x \in E$, on pose

$$s(x) = \{y \in E\ ;\ x\ s\ y\}\ .$$

PROPOSITION 1. - $s(x) \neq \emptyset \iff x\ s\ x$; $s(x)$ rencontre $s(y) \implies s(x) = s(y)$.

Ceci résulte immédiatement des propriétés de s (symétrie et transitivité). On posera la

DÉFINITION 3. - On appelle s-classe tout complexe $s(x)$.

D'après la proposition 1, $x\ s\ y$ équivaut à $s(x) = s(y) \neq \emptyset$, en sorte que la considération d'une semi-équivalence équivaut à celle d'une "décomposition" au sens de O. BORŮVKA [1].

PROPOSITION 2. - Si s est une semi-équivalence, $\mathbb{S} = s \cup I$ est une équivalence, et si $x \in E$:

$$\mathbb{S}(x) = s(x) \quad \text{si} \quad x \, s \, x$$
$$= \{x\} \quad \text{si} \quad s(x) = \emptyset \, .$$

2. Semi-équivalences canoniques d'un demi-groupe.

Dans toute la suite, D est un demi-groupe.

DÉFINITION 4. - On appelle r , ℓ , m les relations binaires sur D définies par :

$$a \, r \, b \iff a \in bD \quad \text{et} \quad b \in aD$$
$$a \, \ell \, b \iff a \in Db \quad \text{et} \quad b \in Da$$
$$a \, m \, b \iff a \in DbD \quad \text{et} \quad b \in DaD \, .$$

PROPOSITION 3. - ℓ , r , m sont des semi-équivalences.

Elles sont déjà symétriques. Démontrons que m , par exemple, est transitive ; si a , b , $c \in D$:

$$a \, m \, b \text{ et } b \, m \, c \implies a \in DbD \, , \; b \in DcD \, , \; c \in DbD \, , \; b \in DaD$$
$$\implies a \in D^2 \, cD^2 \subseteq DcD \, , \; c \in D^2 \, aD^2 \subseteq DaD \implies a \, m \, c \, ,$$

ℓ , r , m seront par suite appelées semi-équivalences canoniques de D .

PROPOSITION 4. - Le produit de deux semi-équivalences canoniques est contenu dans une semi-équivalence canonique, conformément à la table :

$\subseteq$	ℓ	r	m
ℓ	ℓ	m	m
r	m	r	m
m	m	m	m

D'abord $\ell \circ \ell \subseteq \ell$, $r \circ r \subseteq r$, $m \circ m \subseteq m$ résulte de la transitivité de ℓ, r, m. Montrons $\ell \circ r \subseteq m$:

$$a \ell b \text{ et } b r c \implies a \in Db,\ b \in Da,\ b \in cD,\ c \in bD$$
$$\implies a \in DcD,\ c \in DaD \implies a m c.$$

Dualement $r \circ \ell \subseteq m$. Montrons $\ell \circ m \subseteq m$:

$$a \ell b \text{ et } b m c \implies a \in Db,\ b \in Da,\ b \in DcD,\ c \in DbD$$
$$\implies a \in D^2 cD \subseteq DcD,\ c \in D^2 aD \subseteq DaD \implies a m c.$$

De même $m \circ \ell \subseteq m$. Dualement, $r \circ m \subseteq m$ et $m \circ r \subseteq m$.

3. Equivalences associées aux semi-équivalences canoniques.

D'après les propositions 2 et 3, les relations $\mathfrak{L} = \ell \cup I$, $\mathfrak{R} = r \cup I$, $\mathfrak{M} = m \cup I$ sont des équivalences. Pour $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{R}$, on a la

PROPOSITION 5. - Si $a, b \in D$, $a \mathfrak{L} b$ (resp. $a \mathfrak{R} b$) si et seulement si a et b engendrent le même idéal à gauche (resp. à droite).

Ces énoncés étant duaux, il suffit de démontrer l'énoncé "à gauche". Notons $(a)_g$ l'idéal à gauche engendré par a. Si $a \mathfrak{L} b$, on a, soit $a = b$; soit $a \ell b$, et alors $a \in (b)_g$ et $b \in (a)_g$; dans tous les cas $(a)_g = (b)_g$. Réciproquement, on sait que $(a)_g = a \cup Da$; donc si $(a)_g = (b)_g$ et $a \neq b$, on a $a \in Db$ et $b \in Da$, d'où $a \ell b$.

L'énoncé d'une proposition analogue pour $\mathfrak{M}$ requiert des considérations supplémentaires.

4. Idéaux médians.

DÉFINITION 5. - Une partie A de D est dite un idéal médian de D si et seulement si $DAD \subseteq D$ (1).

PROPOSITION 6. - L'ensemble des idéaux médians est stable par réunion et intersection.

---

(1) Cette notion a été considérée indépendamment par R. DESQ au cours de ses travaux.

Soit $(A_\iota)_{\iota\in I}$ une famille d'idéaux médians.

$D(\bigcup_{\iota\in I} A_\iota)\,D = \bigcup_{\iota\in I} (DA_\iota\,D) \subseteq (\bigcup_{\iota\in I} A_\iota)$, donc $\bigcup_{\iota\in I} A_\iota$ est un idéal médian ;

$D(\bigcap_{\iota\in I} A_\iota)\,D \subseteq \bigcap_{\iota\in I} (DA_\iota\,D) \subseteq (\bigcap_{\iota\in I} A_\iota)$, donc $\bigcap_{\iota\in I} A_\iota$ est un idéal médian .

PROPOSITION 7. - Tout idéal bilatère est un idéal médian.

PROPOSITION 8. - Si $a \in D$, l'idéal médian engendré par a est $(a)_m = a \cup DaD$.

$a \cup DaD$ est clairement un idéal médian contenant a ; réciproquement, si A est un idéal médian contenant a , on a $DaD \subseteq DAD \subseteq A$, et $a \cup DaD \subseteq A$; donc $(a)_m = a \cup DaD$.

PROPOSITION 9. - Si a , $b \in D$, $a \,\mathcal{M}\, b$ si et seulement si $(a)_m = (b)_m$.

Si $a \,\mathcal{M}\, b$, on a, soit $a = b$, soit $a\ m\ b$, et alors $a \in (b)_m$ et $b \in (a)_m$; dans tous les cas, $(a)_m = (b)_m$. Réciproquement, si $(a)_m = (b)_m$, $a \cup DaD = b \cup DbD$ et, si $a \neq b$, $a \in DbD$ et $b \in DaD$, d'où $a\ m\ b$.

II. Structure de l'équivalence $\mathcal{D}$ de Green.

1. Equivalences de Green.

J. A. GREEN a introduit [5] les équivalences suivantes :

$$a \,\mathcal{L}\, b \iff (a)_g = (b)_g$$
$$a \,\mathcal{R}\, b \iff (a)_d = (b)_d$$
$$a \,\mathcal{D}\, b \iff (a)_b = (b)_b \ ,$$

où $(a)_b$ désigne l'idéal bilatère engendré par a . Puis il a étudié les remarquables propriétés de $\mathcal{Q} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ et $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Les travaux postérieurs reflètent cette tendance (voir, par exemple, le livre de A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON [2]) ; $\mathcal{D}$ n'y figure guère que par sa définition.

Les notions introduites au début de cet exposé permettent au contraire de faire un pas dans l'étude de $\mathcal{D}$; on notera que les équivalences $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ de la première partie coïncident avec celles de J. A. GREEN (proposition 5).

2. Un théorème.

THÉORÈME 1. - $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \cup \mathfrak{R} \cup \mathfrak{M}$.

Montrons d'abord $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R} \cup \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Tout idéal bilatère étant aussi idéal à droite, à gauche, et médian, on a, pour tout $a \in D$, $(a)_b = ((a)_g)_b = ((a)_d)_b = ((a)_m)_b$ (en désignant par $(A)_b$ l'idéal bilatère engendré par la partie A de D) ; par suite $a \mathfrak{L} b \Longrightarrow a \mathfrak{F} b$, $a \mathfrak{R} b \Longrightarrow a \mathfrak{F} b$ (proposition 5), $a \mathfrak{M} b \Longrightarrow a \mathfrak{F} b$ (proposition 9), et $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R} \cup \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Réciproquement, supposons $a \mathfrak{F} b$; comme $(a)_b = a \cup aD \cup Da \cup DaD$, on a : $a \cup Da \cup aD \cup DaD = b \cup Db \cup bD \cup DbD$; si $a = b$, on a par exemple $a \mathfrak{L} b$. Si $a \neq b$, il y a neuf cas à envisager.

(i) $a \in Db$ et $b \in Da \Longrightarrow a \ell b$ et $a \mathfrak{L} b$.

(ii) $a \in Db$ et $b \in aD \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \in DaD \subseteq D^2 bD \subseteq DbD \\ b \in DbD \subseteq DaD^2 \subseteq DaD \end{array}\right\} \Longrightarrow a \mathfrak{M} b$.

(iii) $a \in Db$ et $b \in DaD \Longrightarrow a \in D^2 aD \subseteq D^3 bD \subseteq DbD \Longrightarrow a \mathfrak{M} b$.

(iv), (v), (vi) $a \in bD$: ces cas sont duaux de (i), (ii), (iii) et conduisent par suite à $a \mathfrak{R} b$ ou $a \mathfrak{M} b$.

(vii) $a \in DbD$ et $b \in Da$: se ramène à (iii) par échange de a et b.

(viii) $a \in DbD$ et $b \in aD$: se ramène à (vi) par échange de a et b.

(ix) $a \in DbD$ et $b \in DaD \Longrightarrow a \mathfrak{M} b$.

Par suite $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L} \cup \mathfrak{R} \cup \mathfrak{M}$.

COROLLAIRE. - $\mathfrak{F} = \mathfrak{Q} \vee \mathfrak{M}$.

En effet $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$; donc $\mathfrak{Q} \vee \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$; or $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \cup \mathfrak{R} \cup \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Q} \cup \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Q} \vee \mathfrak{M}$.

3. Type d'un élément de D.

DÉFINITION 6. - Un élément $a \in D$ est dit :

de type m si et seulement si $a \in DaD$ ($\Longleftrightarrow a\ m\ a$)

de type d si et seulement si $a \in aD$ et $a \notin DaD$ ($\Longleftrightarrow a\ r\ a$, $a \not m\ a$)

de type g si et seulement si $a \in Da$ et $a \notin DaD$ ($\Longleftrightarrow a\ \ell\ a$, $a \not m\ a$)

de type z si et seulement si $a \notin aD \vee Da \vee DaD$ ($\Longleftrightarrow a \not\ell\ a$, $a \not r\ b$, $a \not m\ b$)

on appelle M (resp. R , L , Z) l'ensemble des éléments de type m (resp. d , g , z).

PROPOSITION 10. - Tout élément de D a un type et un seul.

Que tout élément ait un type est à peu près évident. Ce type est unique car le type m exclut tous les autres ; il en est de même du type z : d et g s'excluent, car a r a et a ℓ a implique a m a (proposition 4).

Les sous-ensembles M , L , R , Z ne possèdent guère de propriétés multiplicatives immédiates, sauf LR $\subseteq$ M .

PROPOSITION 11. - Tout élément idempotent, tout élément inversible, tout élément régulier, est de type m . Tout élément de $D - D^2$ est de type z .

a est dit inversible si et seulement s'il existe a' tel que aa'a = a , a'aa' = a' ; pour un tel élément, a m a' , donc a m a (proposition 1) . a est dit régulier si et seulement s'il existe x tel que axa = a ; on sait qu'un élément régulier est inversible (prendre a' = xax). a est dit idempotent si et seulement si $a^2 = a$; tout idempotent est régulier. Enfin il est clair que $D - D^2 \subseteq Z$.

4. Étude des $\mathcal{J}$-classes.

THÉORÈME 2. - Soit a $\in$ D . Si a est de type m (resp. d , g , z), $\mathcal{J}(a) = m(a)$ (resp. $r(a)$, $\ell(a)$, $\{a\}$).

On a $\mathcal{J} = m \cup \ell \cup r \cup I$ (théorème 1). Par suite, pour tout a $\in$ D , $m(a) \subseteq \mathcal{J}(a)$, $\ell(a) \subseteq \mathcal{J}(a)$, $r(a) \subseteq \mathcal{J}(a)$, $\{a\} \subseteq \mathcal{J}(a)$. Soit b un élément quelconque de $\mathcal{J}(a)$.

Si a est de type m , a m a et a $\mathcal{J}$ b ; d'où a m b , car $m \circ \mathcal{J} = m \circ (m \cup \ell \cup r \cup I) \subseteq m$ (proposition 4) ; et $\mathcal{J}(a) = m(a)$. Si a est de type d , a r a et a $\mathcal{J}$ b ; d'où a r b ou a m b car $r \circ \mathcal{J} = r \circ (m \cup \ell \cup r \cup I) \subseteq m \cup r$ (proposition 4) ; mais a m b entraîne a m a (proposition 1) et est impossible, puisque a est de type d ; par suite a r b ; et $\mathcal{J}(a) = r(a)$. Dualement, si a est de type g , $\mathcal{J}(a) = \ell(a)$. Enfin, si a est de type z , on n'a ni a ℓ b , ni a r b , ni a m b , qui entraîneraient soit a ℓ a , soit a r a , soit a m a ; donc b = a , et $\mathcal{J}(a) = \{a\}$.

COROLLAIRE 1. - Tous les éléments d'une $\mathcal{J}$-classe ont le même type.

Soit $a, b \in D$ tels que $a \mathfrak{F} b$. a possède un type (proposition 10). Si a est de type m, a m b, d'où b m b (proposition 1) et b est de type m. Si a est de type d, a r b, d'où b r b (proposition 1) ; si on avait b m b, b serait de type m, et a aussi, d'après ce qui précède ; donc b r b, $b \not m b$ et b est de type d. Dualement, si a est de type g, b est de type g. Enfin si a est de type z, b est de type z, car s'il était d'un autre type il en serait de même de a, d'après ce qui précède.

Autrement dit, M, R, L, Z sont saturés pour $\mathfrak{F}$.

Vu ce corollaire, on posera la

DÉFINITION 7. - On appelle type d'une $\mathfrak{F}$-classe le type de chacun de ses éléments.

Toute $\mathfrak{F}$-classe a un type, et un seulement.

COROLLAIRE 2. - Une $\mathfrak{F}$-classe est une $\mathfrak{M}$-classe, une $\mathfrak{R}$-classe, une $\mathfrak{L}$-classe, ou est réduite à un élément.

En effet c'est une m-classe, une r-classe, une ℓ-classe, ou un complexe d'un élément ; le corollaire résulte alors de la proposition 2.

III. Application aux idéaux bilatères maximaux.

1. Type d'un idéal bilatère maximal.

PROPOSITION 12. - Une partie A de D est un idéal bilatère maximal si et seulement si son complémentaire C est une $\mathfrak{F}$-classe consistante.

Rappelons qu'une partie C de D est dite consistante (P. DUBREIL [3]) si et seulement si $xy \in C \Longrightarrow x \in C$ et $y \in C$; et que C est consistante si et seulement si $D - C$ est un idéal bilatère.

Si A est un idéal bilatère maximal, C est consistante ; C est indivisible pour $\mathfrak{F}$, car si $a, b \in C$, $A \cup (a)_b = D$ puisque A est maximal, donc $b \in (a)_b$; de même $a \in (b)_b$ et $a \mathfrak{F} b$. C est saturée pour $\mathfrak{F}$, car si $a \in C$ et $a \mathfrak{F} b$, $A \cup (a)_b = D$, donc $A \cup (b)_b = D$ et $b \notin A$, donc $b \in C$.

Si C est une $\mathfrak{F}$-classe consistante, $A = D - C$ est un idéal bilatère. Soit B un idéal bilatère tel que $A \subset B$; si $a \in B - A$, $a \in C$, donc $C \subseteq (a)_b$; et $(a)_b \subseteq B$, d'où $D = A \cup C \subseteq B$ et A est maximal.

DÉFINITION 8. - On appelle type d'un idéal bilatère maximal le type de chaque élément de son complémentaire.

Tout idéal bilatère maximal a un type, et un seulement.

2. Propriétés des idéaux bilatères maximaux.

THÉORÈME 3a. - Un idéal bilatère maximal de type m est premier.

Premier est entendu au sens suivant (cf. N. H. McCOY [6]) :

$$aDb \subseteq A \implies a \in A \text{ ou } b \in A .$$

Soit A un idéal bilatère maximal de type m . Pour que A soit premier, il faut et il suffit que

$$a \notin A \text{ et } b \notin A \implies (\exists\ x \in D)\ axb \notin A ,$$

donc, en posant $C = D - A$, que

$$a \in C \text{ et } b \in C \implies (\exists\ x \in D)\ axb \in C .$$

Or C est une m-classe consistante ; puisque $a\ m\ b$, $(\exists\ y , z \in D)\ b = yaz$; puisque C est consistante, $z \in C$ et $(\exists\ x , t \in D)\ z = xbt$; d'où $yaxbt = b \in C$, et, puisque C est consistante, $axb \in C$.

THÉORÈME 3b. - Un idéal bilatère maximal de type d ou g est complètement premier.

Complètement premier est entendu au sens suivant (cf. FITTING [4]) :

$$ab \in A \implies a \in A \text{ ou } b \in A .$$

Il suffit de montrer que, si A est un idéal bilatère maximal de type g , $C = D - A$ est stable ; le cas du type d s'en déduira par dualité. Or C est une ℓ-classe consistante ; si $a , b \in C$, de $a\ \ell\ b$ on tire $(\exists\ x \in D)$ $a = xb$; puisque C est consistante, $x \in C$ et $(\exists\ y \in D)\ x = ya$; d'où $a = yab \in C$, et, puisque C est consistante, $ab \in C$. On notera de plus que C est un sous-demi-groupe de D vérifiant l'axiome des quotients à gauche, donc simple à gauche.

THÉORÈME 3c. - Un idéal bilatère maximal de type z diffère de D par un élément, que l'on peut choisir arbitrairement dans $D - D^2$.

En effet son complémentaire est une $\mathfrak{H}$-classe de type z , donc réduite à un élément (théorème 2). Soit u cet élément, qui est consistant et de type z ; si $u \in D^2$, $(\exists\ x, y \in D)\ u = xy$, et de $x = y = u$, on tire $u = u^2$, contrairement à l'hypothèse que u est de type z (proposition 11) ; donc $u \in D - D^2$. Réciproquement, si $u \in D - D^2$, u est de type z (proposition 11), et $D - u$ est un idéal bilatère maximal.

DÉFINITION 9. - On appelle idéal bilatère maximal trivial le complémentaire d'un élément de $D - D^2$.

En récapitulant :

THÉORÈME 3. - Un idéal bilatère maximal est soit de type m , et alors il est premier ; soit de type d ou g , et alors il est complètement premier ; soit de type z , et alors il est trivial, et réciproquement.

On notera qu'un idéal bilatère maximal trivial A n'est pas premier : si $u \notin A$, on a $uDu \subseteq D^2 \subseteq A$, et $u \notin A$. Par suite :

COROLLAIRE. - Pour que tout idéal bilatère maximal d'un demi-groupe D soit premier, il faut et il suffit que D soit globalement idempotent.

3. Idéaux d'un côté maximaux.

PROPOSITION 13. - Un idéal à gauche (resp. à droite, médian) est maximal si et seulement si son complémentaire est une $\mathfrak{L}$-classe (resp. $\mathfrak{R}$- , $\mathfrak{M}$-).

Il suffit de remplacer, dans la démonstration de la proposition 12, $\mathfrak{H}$ par $\mathfrak{L}$ (resp. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{M}$) et b par g (resp. d , m) dans la notation $(a)_b$ (pour les idéaux médians, en s'appuyant sur la proposition 6).

PROPOSITION 14. - Un idéal bilatère maximal de type m (resp. d , g) est maximal dans la famille des idéaux médians (resp. à droite, à gauche).

Ceci résulte des propositions 12 et 13.

La démonstration du théorème 3 fait intervenir partout la consistance de C , c'est-à-dire le fait que A est idéal bilatère (avec les notations de cette démonstration) ; elle ne peut donc s'étendre aux idéaux d'un côté maximaux.

IV. Cas où D satisfait à des hypothèses supplémentaires.

Vu le rôle joué dans les parties II et III par la notion de type d'un élément, on va traduire les propriétés supplémentaires de D par la vacuité éventuelle des sous-ensembles M , R , L , Z . On notera que, de $LR \subseteq M$ (cf. § II. 3), résulte que, si M est vide, l'un des sous-ensembles R , L est vide.

PROPOSITION 15. - Si D a un élément unité à gauche, $R = Z = \emptyset$, $M \neq \emptyset$.

Si e est cet élément, $(\forall\ x \in D)$ $ex = x$; donc $Z = \emptyset$; et, si $x \in xD$, $x \in exD \subseteq DxD$, donc $R = \emptyset$. Au contraire $M \neq \emptyset$, car $e \in M$ (proposition 11).

PROPOSITION 16. - Si D a un élément unité, $H = D$.

PROPOSITION 17. - Si D est abélien, $L = R = \emptyset$.

En effet, par dualité, $L = R$, donc $L = R = L \cap R = \emptyset$.

PROPOSITION 18. - Si D est simplifiable à gauche, $R = \emptyset$.

Soit $a \in D$ tel que $a = au$; alors classiquement, $au = au^2$, $u = u^2$ et $(\forall\ x \in D)$ $ux = u^2 x$, d'où $x = ux$; donc D a un élément unité à gauche, et $R = \emptyset$ (proposition 15). Si on ne peut trouver $a \in D$ tel que $a = au$, $R = \emptyset$.

PROPOSITION 19. - Dans un semi-groupe, $L = R = \emptyset$.

PROPOSITION 20. - Si D est simple, $M = D$.

En effet, si $a \in D$, $DaD = D$, donc $a \in DaD$.

PROPOSITION 21. - Si D est régulier, $M = D$.

Ceci résulte de la proposition 11.

PROPOSITION 22. - Si D est un semi-groupe abélien sans élément unité, $Z = D$.

Il suffit de montrer que $M = \emptyset$; or si $a \in D$ est tel que $a = xay$, on a $a = xya$ et il en résulte, comme dans la proposition 18, que xy est élément unité.

Dans les mêmes circonstances, la notion d'idéal médian garde davantage son autonomie. Toutefois :

PROPOSITION 23. - Si D a un élément unité, il y a identité entre les idéaux médians et les idéaux bilatères.

Si A est un idéal médian, $DAD \subseteq A$ entraîne, si D a un élement unité, $AD \subseteq A$ et $DA \subseteq A$; la réciproque résulte de la proposition 7.

Si D est abélien, un idéal médian est une partie A de D telle que $D^2 A = DAD \subseteq A$; il n'y a pas en général identité entre les deux notions, mais il en sera ainsi, par exemple, dès que D est globalement idempotent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BORŮVKA (Otakar). - Décompositions dans les ensembles et théorie des groupoïdes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, t. 14, 1960/61, n° 22 bis, 35 p.

[2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Tome 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[3] DUBREIL (Paul). - Contribution à la théorie des demi-groupes. - Paris, Gauthier-Villars, 1941 (Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France, 2e série, t. 63, 52 pages).

[4] FITTING (Hans). - Primärkomponentenzerlegung in nichtkommutativen Ringen, Math. Annalen, t. 111, 1935, p. 19-41.

[5] GREEN (J. A.). - On the structure of semigroups, Annals of Math., Series 2, t. 54, 1951, p. 163-172.

[6] McCOY (Neal H.). - Prime ideals general rings, Amer. J. of Math., t. 71, 1949, p. 823-833.