Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Alfred H. Clifford

La décomposition d'un demi-groupe commutatif en ses composantes archimédiennes

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 20, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A9_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 20

21 mai 1962

LA DÉCOMPOSITION D'UN DEMI-GROUPE COMMUTATIF EN SES COMPOSANTES ARCHIMÉDIENNES

par Alfred H. CLIFFORD

L'existence d'une telle décomposition, et sa description explicite (théorèmes 1 et 2 ci-dessous), sont dues indépendamment à TAMURA et KIMURA [3], à THIERRIN [4] et à HEWITT et ZUCKERMAN [2].

Ceux-ci vont plus loin que les autres (théorèmes 3 et 5), ayant le but d'employer cette décomposition dans leur théorie des caractères d'un demi-groupe commutatif, qui sera traitée dans ma deuxième conférence. Les deux théories se trouvent dans "Algebraic theory of Semigroups" ([1], § 4.3 et § 5.5), et je m'y réfère pour les démonstrations des théorèmes.

Soit D un demi-groupe commutatif. Nous disons que a est <u>diviseur</u> de b (a , $b \in D$) , et nous écrivons $a|b$, si $a = b$ ou s'il existe x dans D tel que $ax = b$. C'est une relation sur D qui est réflexive, transitive, et régulière. Nous disons que D est <u>archimédien</u> si, pour chaque a , $b \in D$, il existe un entier positif n tel que $a|b^n$. Remarquons qu'un groupe abélien G totalement ordonné est archimédien dans le sens usuel si et seulement si la partie strictement positive de G est archimédienne dans le sens défini ci-dessus.

Par un <u>demi-treillis</u> nous entendons un demi-groupe commutatif Y tel que chaque élément α de Y est idempotent ($\alpha^2 = \alpha$) . Soit $\varphi : D \to Y$ un homomorphisme d'un demi-groupe D sur un demi-treillis Y . Posons $D_\alpha = \varphi^{-1}(\alpha)$; alors $D_\alpha D_\beta \subseteq D_{\alpha\beta}$ pour chaque α , $\beta \in Y$. En particulier, $D_\alpha^2 \subseteq D_\alpha$; c'est-à-dire que chaque D_α est sous-demi-groupe de D . Si nous définissons

$$a \rho b \quad (a , b \in D) \quad \text{si} \quad \varphi(a) = \varphi(b) \quad ,$$

alors ρ est une <u>congruence</u> sur D (relation d'équivalence régulière) qui est aussi <u>idempotente</u> ($a^2 \rho a$ pour chaque $a \in D$). Inversement, si ρ est une congruence idempotente sur D et si Y désigne le demi-groupe quotient D/ρ , alors Y est un demi-treillis qui est image homomorphe de D . Nous disons que D est <u>la réunion du demi-treillis</u> Y <u>de sous-demi-groupes</u> D_α ($\alpha \in Y$) .

L'intersection η de toutes les congruences idempotentes ρ_i ($i \in I$) sur D est une congruence sur D qui est aussi idempotente : $a \eta b$ veut dire $a \rho_i b$ pour chaque $i \in I$, et puisque $a \rho_i a^2$ pour chaque $i \in I$, nous en

déduisons que $a \eta a^2$. La congruence η est la plus fine de toutes les congruences idempotentes sur D , et D/η est le demi-treillis homomorphe maximum de D dans le sens : un demi-treillis, qui est image homomorphe de D , est aussi image homomorphe de D/η .

THÉORÈME 1. - Soit η la plus fine congruence idempotente sur un demi-groupe commutatif D .

Alors $a \eta b$ $(a , b \in D)$ si et seulement si chacun des éléments a , b est diviseur d'une puissance de l'autre ($a|b^m$ et $b|a^n$ pour des entiers positifs convenables m et n).

THÉORÈME 2. - Tout demi-groupe commutatif D peut être exprimé (et d'une seule façon) comme la réunion d'un demi-treillis Y de demi-groupes archimédiens D_α $(\alpha \in Y)$. Le demi-treillis Y est isomorphe au demi-treillis homomorphe maximum D/η de D , et les D_α $(\alpha \in Y)$ sont les classes d'équivalence de D mod η .

Nous appelons les D_α (qui sont uniques) les composantes archimédiennes de D .

Nous disons qu'un demi-groupe commutatif D est séparatif si

$$a^2 = b^2 = ab \quad (a , b \in D) \quad \text{implique} \quad a = b \quad .$$

(Pour la raison de ce terme, voir la deuxième conférence.)

THÉORÈME 3. - Un demi-groupe commutatif D est séparatif si et seulement si ses composantes archimédiennes sont simplifiables.

Pour la théorie des caractères, un cas important est celui d'un demi-groupe qui est réunion de groupes. Je rappelle à ce sujet un théorème que j'ai donné autrefois (Annals of Math., 42(1941) p. 1037-1049 ; théorème 4.11, p. 128, dans notre livre).

THÉORÈME 4. - Soit D un demi-groupe qui est réunion de groupes dont les éléments neutres commutent les uns avec les autres. Alors D est la réunion d'un demi-treillis Y de groupes G_α $(\alpha \in Y)$. Y est isomorphe au demi-treillis $\{e_\alpha : \alpha \in Y\}$ des idempotents de D , e_α désignant l'élément neutre de G_α . De plus, les e_α sont dans le centre de D , et si nous définissons

$$a\varphi_{\alpha\beta} = ae_\beta \qquad (\alpha \geqslant \beta \in Y \; ; \; a \in G_\alpha) \quad ,$$

alors $\varphi_{\alpha\beta}$ est un homomorphisme de G_α dans G_β , et $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ entraîne

(1) $$\varphi_{\alpha\beta}\,\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma} \quad .$$

Si $a \in G_\alpha$ et $b \in G_\beta$ $(\alpha\,,\ \beta \in Y)$ alors

(2) $$ab = (a\varphi_{\alpha\gamma})\,(b\varphi_{\beta\gamma}) \quad \text{où} \quad \gamma = \alpha\beta \quad .$$

Inversement, si nous avons une application biunivoque $\alpha \to G_\alpha$ d'un demi-treillis Y sur un ensemble de groupes disjoints, et un système d'homomorphismes $\varphi_{\alpha\beta} : G_\alpha \to G_\beta$ $(\alpha \geqslant \beta)$ satisfaisant à (1), alors (2) définit dans $D = \bigcup_{\alpha\in Y} G_\alpha$ un produit associatif tel que le demi-groupe D est réunion des groupes G_α dont les éléments neutres commutent les uns avec les autres.

Les G_α sont les sous-groupes maximaux de D, et en même temps les composantes archimédiennes de D.

THÉORÈME 5. - Un demi-groupe commutatif D peut être plongé dans un demi-groupe commutatif qui est réunion de groupes si et seulement si D est séparatif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - Algebraic theory of semigroups. Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[2] HEWITT (E.) and ZUCKERMAN (H. S.). - The ℓ_1-algebra of a commutative semigroup, Trans. Amer. math. Soc., t. 83, 1956, p. 70-97.

[3] TAMURA (T.) and KIMURA (N.). - On decompositions of a commutative semigroup, Kodai math. Sem. Rep., t. 6, 1954, p. 109-112.

[4] THIERRIN (Gabriel). - Sur quelques propriétés de certaines classes de demi-groupes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 239, 1954, p. 1335-1337.