

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL EGO

Structure des demi-groupes dont le treillis des sous-demi-groupes est semi-modulaire

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 19, p. 1-43

http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A8_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

STRUCTURE DES DEMI-GROUPES
 DONT LE TREILLIS DES SOUS-DEMI-GROUPES EST SEMI-MODULAIRE

par Michel EGO

L'ensemble $T(D)$ des sous-demi-groupes d'un demi-groupe D est un treillis pour la relation d'inclusion. Il possède un élément nul, \emptyset , \wedge est l'intersection \cap des ensembles, \vee est différent de la réunion \cup des ensembles.

Dans ce mémoire nous établissons quelques conditions nécessaires pour que le treillis $T(D)$ satisfasse, tantôt à l'une, tantôt à l'autre des conditions suivantes :

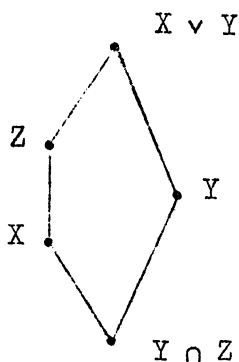
(1) les relations $X > X \cap Y$ et $X \cap Y \neq \emptyset$ impliquent : $X \vee Y > Y$

(2) la relation $X > X \cap Y$ implique : $X \vee Y > Y$.

Nous déterminons ensuite des systèmes de conditions nécessaires et suffisants pour que le treillis $T(D)$ soit respectivement semi-modulaire, modulaire et distributif.

Les conditions (1) et (2) sont respectivement équivalentes aux suivantes :

(1') l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$, isomorphe au treillis \mathcal{C}_0 dont le diagramme est le suivant :



implique soit :

$$Y \not> Y \cap Z \quad ;$$

soit :

$$Y \cap Z = \emptyset \quad .$$

(2') l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$, isomorphe à \mathcal{C}_0 , implique :

$$Y \neq Y \cap Z \quad .$$

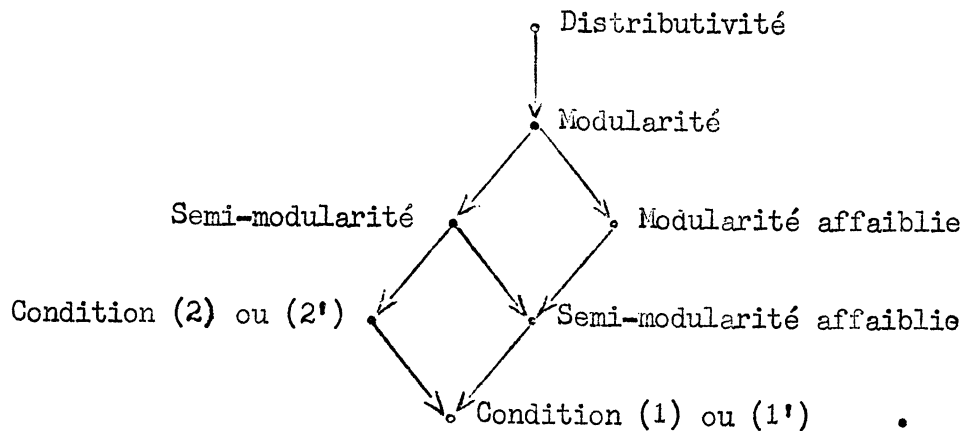
Rappelons qu'un treillis \mathcal{C} est semi-modulaire affaibli s'il possède un élément nul, 0 , et si les relations

$$0 < y \wedge z < x < z < x \vee y \quad (\text{égalités exclues})$$

impliquent l'existence de t tel qu'on ait

$$y \wedge z < t < y \quad \text{et} \quad x = (x \vee t) \wedge z \quad .$$

Dans les treillis à élément nul, les relations existant entre les propriétés ci-dessus, la semi-modularité, la modularité affaiblie, la modularité et la distributivité ⁽¹⁾ sont résumées dans le diagramme suivant :



THÉOREME 1. - Si $T(D)$ satisfait à la condition (1')

1° D est périodique ;

⁽¹⁾ Pour les définitions classiques de modularité et de semi-modularité, voir par exemple [2].

2° La période ⁽²⁾ de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 5 .

Supposons qu'il existe dans D un élément a d'ordre infini, et considérons les trois éléments de $T(D)$ définis par :

$$X = (a^2) \vee (a^9), \quad Y = (a^3) \quad \text{et} \quad Z = (a^2) \vee (a^5) \quad .$$

Ils sont tels que :

$$Y \cap Z = (a^6) \vee (a^9) \quad \text{et} \quad X \vee Y = (a^2) \vee (a^3) \quad .$$

L'examen du diagramme suivant, représentant les différents sous-demi-groupes ci-dessus

$$\begin{aligned} X \vee Y &= \{a^2 \ a^3 \ a^4 \ a^5 \ a^6 \ a^7 \ a^8 \ a^9 \ a^{10} \ a^{11} \ a^{12} \ \dots\} \\ Z &= \{a^2 \ \ \ \ a^4 \ a^5 \ a^6 \ a^7 \ a^8 \ a^9 \ a^{10} \ a^{11} \ a^{12} \ \dots\} \\ X &= \{a^2 \ \ \ \ a^4 \ \ \ \ a^6 \ \ \ \ a^8 \ a^9 \ a^{10} \ a^{11} \ a^{12} \ \dots\} \\ Z \cap Y &= \{ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ a^6 \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ a^9 \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ a^{12} \ \dots\} \\ Y &= \{ \ \ a^3 \ \ \ \ \ \ a^6 \ \ \ \ \ \ a^9 \ \ \ \ \ \ a^{12} \ \dots\} \end{aligned}$$

montre que

⁽²⁾ Rappelons ici la proposition suivante due à REES :

Tout demi-groupe cyclique fini (a) satisfait à :

1° Il existe deux entiers m et n tels que $a^m = a^n$ ($m < n$)

2° n étant choisi minimum dans la relation précédente, on a

$$(a) = \{a, a^2, \dots, a^m, \dots, a^{n-1}\}$$

et l'ensemble

$$[a] = \{a^m, \dots, a^{n-1}\}$$

est un groupe cyclique appelé période de (a) .

$$(X \vee Y) - Z = \{a^3\}, \quad Z - X \supseteq \{a^5\}, \quad X - (Z \cap Y) \supseteq \{a^2\}$$

$$\text{et } Y - (Z \cap Y) = \{a^3\} \quad .$$

Il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à \mathcal{C}_0 ;
cependant on a

$$Y > Y \cap Z \quad \text{et} \quad Y \cap Z \neq \emptyset \quad ;$$

la condition (1') est mise en défaut.

Les éléments de D sont donc tous d'ordre fini : D est périodique.

Supposons maintenant qu'il existe dans D un élément a dont la période commence à un rang supérieur ou égal à 6. Les éléments a, a^2, a^3, a^4 et a^5 sont alors tous distincts entre eux et distincts des éléments a^n pour $n \geq 6$; le raisonnement précédent reste valable.

La période de tout sous-demi-groupe cyclique commence donc à un rang inférieur ou égal à 5.

Remarque. - Comme nous le verrons plus loin, un demi-groupe cyclique fini, dont la période commence à un rang inférieur ou égal à 5, a le treillis de ses sous-demi-groupes distributif. Pour un demi-groupe cyclique D , il y a donc équivalence entre les deux propositions :

$T(D)$ satisfait à la condition (1) et $T(D)$ est distributif .

Considérons alors un groupe G ; si $T(G)$ satisfait à la condition (1), G est périodique. Mais si G est périodique, ses sous-demi-groupes non vides sont ses sous-groupes ; appelant $\mathcal{C}(G)$ le treillis des sous-groupes de G , on a $T(G) = \mathcal{C}(G) \cup \{\emptyset\}$: on est ramené à l'étude des groupes périodiques G pour lesquels le treillis $\mathcal{C}(G)$ satisfait soit à la condition (2), soit à la semi-modularité, soit à la modularité, soit à la distributivité [6].

THÉOREME 2. - Si $T(D)$ satisfait à la condition (2'), pour tout couple e, f d'idempotents de D , le produit ef est égal à e ou à f .

Supposons que e et f soient deux idempotents de D tels que le produit ef soit différent de e et de f .

Nous distinguerons deux cas :

1° e est élément de $(ef) \vee (f)$, et f est élément de $(ef) \vee (e)$.

Les éléments de $(ef) \vee (f)$ étant de l'un des types suivants : f , $(ef)^k$ et $f(ef)^h$, e étant différent de f , on a, soit $e = (ef)^k$, soit $e = f(ef)^h$; si c'est ce dernier cas qui se produit, une multiplication à gauche par e des deux membres de cette égalité montre que $e = (ef)^{h+1}$. L'hypothèse $e \in (ef) \vee (f)$ entraîne donc e puissance de ef . De même l'hypothèse $f \in (ef) \vee (e)$ entraîne f puissance de ef . Le sous-demi-groupe cyclique (ef) contenant un et un seul idempotent, il en résulte $e = f$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° Nous sommes donc nécessairement placés dans l'hypothèse $e \notin (ef) \vee (f)$ ou $f \notin (ef) \vee (e)$. Supposons par exemple que e ne soit pas élément de $(ef) \vee (f)$. Considérons alors les trois éléments X, Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = (f), \quad Y = (e) \quad \text{et} \quad Z = (ef) \vee (f) \quad ;$$

il sont tels que

$$Y \cap Z = \emptyset \quad \text{et} \quad Z \subset X \vee Y \quad .$$

Il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à \mathcal{C}_0 ; cependant $Y > Y \cap Z$; la condition (2') est mise en défaut.

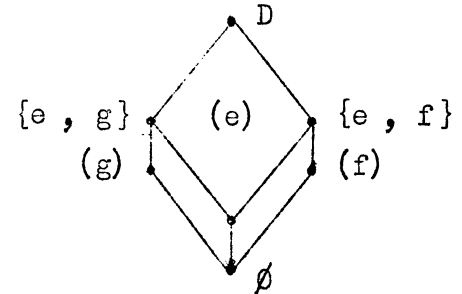
Remarque 1. - Si D est un demi-groupe idempotent dont la multiplication satisfait à $ef = e$ ou f pour tout couple e et f d'éléments de D , toute partie de D est stable et par suite $T(D) = \mathcal{O}(D)$. Pour un demi-groupe idempotent D il y a donc équivalence entre les deux propositions :

$T(D)$ satisfait à la condition (2) et $T(D)$ est distributif .

Remarque 2. - La propriété précédente n'est pas vraie dans l'hypothèse $T(D)$ modulaire affaibli.

Exemple : D | e f g $T(D)$ a pour diagramme :

e	e	e	e
f	e	f	e
g	e	e	g



$T(D)$ est modulaire affaibli.

Introduisons dans D la relation \mathcal{R} définie par $a \mathcal{R} b$ si et seulement si il existe deux entiers m et n tels que $a^m = b^n$ [3]. \mathcal{R} est réflexive et symétrique ; \mathcal{R} est aussi transitive car $a^m = b^n$ et $a^{m'} = b^{n'}$ entraînent $a^{mm'} = b^{nn'}$: \mathcal{R} est donc une équivalence. Dans un demi-groupe D périodique, notant e_a l'idempotent unique de (a) , \mathcal{R} peut aussi être définie par $a \equiv b (\mathcal{R})$ si et seulement si $e_a = e_b$; en effet $e_a^m = e_a$ puisque (a) contient un seul idempotent donc $a \equiv b (\mathcal{R})$ entraîne $e_a = e_a^m = e_b^n = e_b$; d'autre part il existe k et ℓ tels que $e_a = a^k$ et $e_b = b^\ell$, donc $e_a = e_b$ entraîne $a^k = b^\ell$ c'est-à-dire $a \equiv b (\mathcal{R})$. Les classes de cette équivalence sont appelées fuseaux. Chaque fuseau contient un idempotent au moins puisque $a \equiv e_a (\mathcal{R})$ et un au plus car $e \equiv f (\mathcal{R})$ entraîne $e = e_e = e_f = f$. Le fuseau contenant l'idempotent e sera noté F_e . En général les fuseaux ne sont pas stables.

Dans un demi-groupe arbitraire D on peut associer à tout idempotent e un groupe Γ_e d'élément unité e qui est maximum parmi les groupes contenus dans D et d'élément unité e et maximal parmi tous les groupes contenus dans D . Si D est périodique tout élément a de Γ_e a une de ses puissances positives égale à e , donc est congrue à e modulo \mathcal{R} ; on a donc $\Gamma_e \subseteq F_e$: on retrouve le résultat d'ailleurs vrai dans tout demi-groupe selon lequel les groupes maximaux de D sont deux à deux disjoints. De plus Γ_e est idéal bilatère minimum de F_e . En effet, d'une part tout idéal de F_e contient e donc Γ_e , d'autre part si a est un élément de F_e , il existe k tel que $a^k = e$; a^k est dans la période $[a]$ de (a) , donc aussi $ea = ae = a^{k+1}$; Γ_e étant maximum parmi les sous-groupes de D d'élément unité e , $[a]$ est contenu dans Γ_e : ea et ae sont éléments de Γ_e . Dès lors, pour tout b élément de Γ_e , $ab = a(eb) = (ae)b$ est élément de Γ_e , et de même $ba = (be)a = b(ea)$ est élément de Γ_e .

Étudions maintenant dans l'hypothèse " $T(D)$ satisfait à la condition (1)" la multiplication de F_e par F_f quand les idempotents e et f sont tels que $\{e, f\}$ est soit un demi-treillis, soit un antisemigroupe. Compte tenu du théorème 2 ces cas sont les seuls si $T(D)$ satisfait à la condition (2).

Dans ce qui suit nous désignerons par $(a)_n$ l'ensemble des puissances de a supérieures ou égales à n ; c'est un sous-demi-groupe de (a) contenant $[a]$.

THÉORÈME 3. - Si e et f sont deux idempotents distincts de D tels que $\{e, f\}$ soit un demi-treillis avec par exemple $ef = fe = e$ ⁽³⁾ et si $T(D)$ satisfait à la condition (1') alors

$$\forall a \in F_e \text{ et } \forall b \in F_f, \text{ ab et ba sont éléments de } (a) \quad .$$

La démonstration se fera en deux parties.

Montrons d'abord que $\forall a \in F_e$, af et fa sont éléments de (a) .

Si a' est un élément quelconque de F_e , on a

$$a'f = (a'e)f = a'(ef) = a'e = a'$$

et de même

$$f(ea') = (fe)a' = ea' = a' \quad .$$

Compte tenu de ce que la période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 5, nous avons donc

$$\forall a \in F_e \text{ et } \forall k \geq 5, \text{ fa}^k \text{ et } a^k f \text{ sont éléments de } (a)_5 \quad .$$

Supposons maintenant que $\forall k \geq n$, fa^k et $a^k f$ soient éléments de $(a)_n$, et montrons que l'hypothèse " $T(D)$ satisfait à la condition (1') " entraîne que fa^{n-1} et $a^{n-1} f$ sont éléments de $(a)_{n-1}$. La démonstration se fera par l'absurde; supposons donc par exemple : $fa^{n-1} \notin (a)_{n-1}$. La situation est alors telle que :

⁽³⁾ Le cas $ef = fe = f$ n'est pas distinct; il s'obtient à partir de celui-là par échange des lettres e et f .

1° $(a)_n \cup (f)$ est stable ;

2° $a^{n-1} \notin (a)_n$, car $a^{n-1} \in (a)_n$ entraîne

$$fa^{n-1} \in (a)_n \subseteq (a)_{n-1}$$

et par suite

$$(a)_{n-1} > (a)_n \quad ;$$

3° $a^{n-1} \notin \{(a)_n \cup (f)\} \vee (fa^{n-1})$; en effet tout produit fini d'éléments de $(a)_n \cup (f) \cup (fa^{n-1})$ contenant un facteur de $(a)_n$ est dans $(a)_n$, puisque fa^k et $a^k f$ y sont pour k supérieur ou égal à n ; par suite

$$a^{n-1} \in \{(a)_n \cup (f)\} \vee (fa^{n-1}) \text{ entraîne } a^{n-1} \in (f) \vee (fa^{n-1})$$

donc

$$a^{n-1} = fy$$

pour un certain y de D ; multipliant à gauche par f les deux membres de cette égalité il vient

$$a^{n-1} = fa^{n-1}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte :

$$\{(a)_n \cup (f)\} \vee (fa^{n-1}) \subset (a)_{n-1} \vee (f)$$

et

$$(a)_{n-1} \cap \{(a)_n \cup (f)\} \vee (fa^{n-1}) = (a)_n$$

4° $fa^{n-1} \neq f$; en effet il existe h tel que $(a^{n-1})^h = e$; $fa^{n-1} = f$ entraînerait

$$f = fa^{n-1} = f(a^{n-1})^h = fe = e$$

ce qui est contraire à l'hypothèse " e et f distincts". Il en résulte :

$$(a)_n \cup (f) \subset \{(a)_n \cup (f)\} \vee (fa^{n-1}) \quad .$$

Considérons alors les trois éléments X, Y et Z de T(D) définis par

$$X = (a)_n \cup (f) \quad , \quad Y = (a)_{n-1} \quad \text{et} \quad Z = \{(a)_n \cup (f)\} \vee (fa^{n-1}) \quad ;$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = (a)_{n-1} \quad \text{et} \quad X \vee Y = (a)_{n-1} \vee (f) \quad .$$

Il en résulte :

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de T(D) isomorphe à \mathcal{C}_0 ; cependant on a

$$Y > Y \cap Z \quad \text{et} \quad Y \cap Z \neq \emptyset \quad ;$$

la condition (1') est mise en défaut.

fa^{n-1} et $a^{n-1}f$ sont donc éléments de $(a)_{n-1}$; la propriété, étant vraie pour $n = 5$, l'est aussi pour $n = 1$: fa et af sont éléments de (a) .

Considérons maintenant le cas général. Compte tenu de la première partie $\forall a \in F_e$, af et fa sont éléments de (a) . Soient b un élément de F_f , B_1 et B_2 deux sous-demi-groupes de (b) tels que $(f) \subseteq B_1 < B_2 \subseteq (b)$, supposons que, pour tout y élément de B_1 , ay et ya soient éléments de (a) , et montrons que l'hypothèse " T(D) satisfait à la condition (1)" entraîne que, pour tout x élément de $B_2 - B_1$, ax et xa sont éléments de (a) . La démonstration se fait à nouveau par l'absurde ; supposons donc qu'il existe x élément de $B_2 - B_1$ tel que par exemple : $ax \notin (a)$. La situation est alors telle que :

1° $(a) \cup B_1$ est stable ;

2° $x \notin \{(a) \cup B_1\} \vee (ax)$; en effet si x est élément de $\{(a) \cup B_1\} \vee (ax)$, son écriture comme produit fini d'éléments de $(a) \cup B_1 \cup (ax)$ contient au moins un facteur ax ; le premier facteur x intervenant à partir de la gauche dans

cette écriture est précédée de a et éventuellement d'un élément de $(a) \cup B_1$; les hypothèses faites sur B_1 entraînent aB_1 et $B_1 a$ contenus dans (a) : x s'écrit donc sous l'une des formes $x = a^k x$ ou $x = a^k xy$ pour un certain y de D . Cependant il existe h , tel que $(a^k)^h = e$; des égalités précédentes, on déduit par multiplications successives des deux membres à gauche par a^k si $x = a^k x$, et à la fois à gauche par a^k et à droite par y si $x = a^k xy$: $x = ex$ ou $x = exy^h$; multipliant les deux membres de cette dernière égalité à gauche par e , on voit qu'on a toujours $x = ex$. Dès lors il existe $h' > 1$ tel que $x^{h'} = f$, multipliant cette fois à droite les deux membres de l'égalité $x = ex$ par $x^{h'-1}$, il vient $f = ef$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte :

$$\{(a) \cup B_1\} \vee (ax) \subset (a) \vee B_2$$

et

$$B_2 \cap \{(a) \cup B_1\} \vee (ax) = B_1$$

3° $ax \notin (b)$; en effet x étant élément de (b) , il existe k tel que $xb^k = f$; par suite $ax \in (b)$ entraîne $axb^k = af \in (b)$ ce qui est contraire aux conclusions de la première partie. Il en résulte :

$$(a) \cup B_1 \subset \{(a) \cup B_1\} \vee (ax) \quad .$$

Considérons alors les trois éléments X , Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = (a) \cup B_1, \quad Y = B_2 \quad \text{et} \quad Z = \{(a) \cup B_1\} \vee (ax) \quad ;$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = B_1 \quad \text{et} \quad X \vee Y = (a) \vee B_2 \quad .$$

Il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à \mathcal{T}_0 , cependant on a

$$Y > Y \cap Z \text{ et } Y \cap Z \neq \emptyset \quad ;$$

la condition (1') est mise en défaut.

Pour tout élément x de B_2 , ax et xa sont donc éléments de (a) ; la propriété étant vraie pour (f) , et la hauteur du treillis $T(b)$ étant finie, elle le sera pour (b) ; en particulier on a donc : ab et ba sont éléments de (a) .

Dans le cas où D contient un sous-demi-groupe S qui soit un antisemigroupe [5], on sait que les groupes maximaux relatifs aux idempotents de S sont tous isomorphes et que leur réunion est un sous-demi-groupe isomorphe au produit direct de l'un d'entre eux par l'antisemigroupe S . En effet, supposons par exemple que S soit un antisemigroupe à droite ⁽⁴⁾, et soient e et f deux éléments distincts de S . Les applications

$$a \in \Gamma_e \rightarrow fa \in f\Gamma_e$$

et

$$b \in \Gamma_f \rightarrow eb \in e\Gamma_f$$

sont des isomorphismes ; il en résulte que $f\Gamma_e$ et $e\Gamma_f$ sont des groupes d'éléments unité respectifs $fe = f$ et $ef = e$; on a donc $f\Gamma_e \subseteq \Gamma_f$ et $e\Gamma_f \subseteq \Gamma_e$, et par suite $f\Gamma_e = \Gamma_f$ et $e\Gamma_f = \Gamma_e$. De plus l'application $x \in \Gamma_g$ avec $g \in S \rightarrow \{ex, g\}$ est un isomorphisme de $\bigcup_{g \in S} \Gamma_g$ sur le produit direct $\Gamma_e \times S$.

Il en résulte en particulier que si H est un sous-demi-groupe de Γ_e , A un sous-demi-groupe de S , $\bigcup_{g \in A} (gH)$ est un sous-demi-groupe de D isomorphe au produit direct $H \times A$.

THÉOREME 4. - Si e et f sont deux idempotents distincts de D , tels que $\{e, f\}$ soit un antisemigroupe, avec, par exemple $ef = e$, $fe = f$ ⁽⁵⁾, et si $T(D)$ satisfait à la condition (1') alors $\forall a \in F_e$, $af = ae$.

⁽⁴⁾ Si S est un antisemigroupe à gauche, les résultats sont analogues, et se déduisent de ceux ci-dessus par un anti-isomorphisme ; il suffit de permuter tous les produits.

⁽⁵⁾ Le cas $ef = f$, $fe = e$ est distinct ; les démonstrations, les résultats et les conditions qui y sont relatifs sont analogues et se déduisent de ceux ci-dessus par permutation de tous les produits.

Si a' est un élément quelconque de Γ_e , on a

$$a'f = (a'e)f = a'(ef) = a'e \quad .$$

Compte tenu de ce que la période de tout sous-demi-groupe commence à un rang inférieur ou égal à 5, nous avons donc :

$$\forall a \in F_e \text{ et } \forall k \geq 5, \quad a^k f = a^k e \quad .$$

Supposons maintenant que, $\forall k \geq n$, $a^k f$ soit égal à $a^k e$, et montrons que l'hypothèse "T(D) satisfait à la condition (1)" entraîne que $a^{n-1} f$ est égal à $a^{n-1} e$. La démonstration se fera par l'absurde ; supposons donc que : $a^{n-1} f \neq a^{n-1} e$. La situation est alors telle que :

1° $a^{n-1} f \notin (a)_n$, car $a^{n-1} e \in (a)_n$ entraîne

$$a^{n-1} f = a^{n-1} e \quad ,$$

et par suite

$$(a)_{n-1} > (a)_n \quad ;$$

2° $a^{n-1} f$ est élément d'un certain fuseau F_g , les trois idempotents e , f et g sont distincts, et $\{e, f, g\}$ est un antisemigroupe à droite.

En effet d'une part $a^{n-1} f \in F_e$ entraîne

$$a^{n-1} f = a^{n-1}(fe) = (a^{n-1} f)e = e(a^{n-1} f) = (ea^{n-1})f = (a^{n-1} e)f = a^{n-1} e$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. D'autre part $a^{n-1} f \in F_f$ entraîne

$$a^{n-1} f = a^{n-1}(ff) = (a^{n-1} f)f = f(a^{n-1} f) = fa^{n-1} f \quad ;$$

par suite pour tout entier h , on a

$$(a^{n-1} f)^h = (a^{n-1})^h f \quad ;$$

il existe un entier k' tel qu'on ait à la fois

$$(a^{n-1} f)^{k'} = f \text{ et } (a^{n-1})^{k'} = e \quad ;$$

dès lors,

$$a^{n-1} f \in F_f \text{ entraîne } f = ef$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Soit alors g l'idempotent de $(a^{n-1} f)$; il existe un entier m tel qu'on ait à la fois

$$g = (a^{n-1} f)^m \text{ et } e = (a^{n-1})^m \quad ;$$

dès lors

$$g = (a^{n-1} f)^m = (a^{n-1} f)^m e = ge = (a^{n-1} f)^m f = gf \quad ;$$

de plus les égalités

$$ea^{n-1} = a^{n-1} e \text{ et } ef = e$$

montrent que

$$eg = e(a^{n-1} f)^m = e(a^{n-1})^m = e \quad ;$$

enfin on a

$$fg = (fe)g = f(eg) = fe = f$$

$\{e, f, g\}$ est un antisemigroupe à droite.

Considérons alors le sous-groupe $[a]$ de Γ_e , $f[a]$ et $g[a]$ sont des sous-groupes respectivement de Γ_f et de Γ_g et $[a] \cup f[a] \cup g[a]$ est stable (isomorphe au produit direct $[a] \times \{e, f, g\}$). De plus les sous-ensembles $(a)_n \cup f[a]$ et $(a)_n \cup g[a]$ sont stables. En effet d'une part

$$(a)_n \cdot f[a] = \{(a)_n \cdot f\} [a] = \{(a)_n \cdot e\} [a] = [a]^2 = [a]$$

et

$$f[a] \cdot (a)_n = f\{[a]e\} \cdot (a)_n = f[a]\{c \cdot (a)_n\} = f[a]^2 = f[a] \quad .$$

D'autre part, $\forall k \geq n$, on a :

$$a^k g = a^k (a^{n-1} f)^m = a^{n-1} (a^k f) (a^{n-1} f)^{m-1} = a^{n-1} (a^k c) (a^{n-1} f)^{m-1} \quad ;$$

les égalités

$$ea^{n-1} = a^{n-1} e \quad \text{et} \quad ef = e$$

montrent que

$$a^k g = a^k (a^{n-1})^m = a^k e$$

pour les mêmes raisons que $(a)_n \cup f[a]$, $(a)_n \cup g[a]$ est stable. Il en résulte

$$(a)_n \cup f[a] \cup g[a] \quad \text{stable}$$

donc

$$a^{n-1} \notin (a)_n \cup f[a] \cup g[a]$$

et par suite

$$(a)_n \cup f[a] \cup g[a] \subset (a)_{n-1} \vee (f)$$

et

$$(a)_{n-1} \cap \{(a)_n \cup f[a] \cup g[a]\} = (a)_n \quad .$$

Considérons alors les trois éléments X , Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = (a)_n \cup f[a], \quad Y = (a)_{n-1} \quad \text{et} \quad Z = (a)_n \cup f[a] \cup g[a] \quad ;$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = (a)_n \quad \text{et} \quad X \vee Y = (a)_{n-1} \vee (f) \quad .$$

Il en résulte :

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à \mathcal{C}_0 ; cependant on a

$$Y > Y \cap Z \quad \text{et} \quad Y \cap Z \neq \emptyset \quad ;$$

la condition (1') est mise en défaut.

$a^{n-1} f = a^{n-1} e$; la propriété étant vraie pour $n = 5$ l'est aussi pour $n = 1$: $af = ae$.

De même pour tout b élément de F_f le produit be est égal à bf . Il en résulte que le sous-demi-groupe $\Gamma_e \cup \Gamma_f$ est idéal du complexe $F_e \cup F_f$; en effet Γ_e est idéal de F_e , Γ_f est idéal de F_f ; de plus $\forall a' \in \Gamma_e$ et $\forall b \in F_f$, on a

$$a'b = (a'e) = a'(ef)b = a'\{e(fb)\} \in \Gamma_e \cdot (e\Gamma_f) = \Gamma_e^2 = \Gamma_e$$

et

$$ba' = b(ea') = (be)a' = (bf)a' = bf(fa') \in \Gamma_f \cdot f\Gamma_e = \Gamma_f^2 = \Gamma_f \quad .$$

THÉOREME 5. - Si e et f sont deux idempotents distincts ou non de D tels que $\{e, f\}$ soit un antisemigroupe et si $T(D)$ satisfait à la condition (1'), alors $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$, ab est élément de $(a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\}$.

Nous supposerons au cours de la démonstration que $ef = e$ et $fe = f$ (5).

Dans ce qui suit nous appellerons G le sous-demi-groupe de $\Gamma_e \cup \Gamma_f$ égal à $[a] \vee [b]$. G est idéal du complexe $G \cup (a) \cup (b)$; en effet G est contenu dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$ idéal de $F_e \cup F_f$, et les produits

$$af = ae, ae, fa = f(ea), ea, bf, be = bf, fb, eb = e(fb)$$

sont tous éléments de $[a] \vee [b]$.

La démonstration se fera en quatre étapes et par l'absurde ; supposons donc que

$$ab \notin (a) \cup (b) \cup G \quad .$$

Cette hypothèse implique :

1° $a \notin \Gamma_e$, car $a \in \Gamma_e$ entraîne $a \in [a]$, donc $ab \in [a] \vee [b]$, de même $b \notin \Gamma_f$; on a donc $a \notin \Gamma_e \cup \Gamma_f$ et $b \notin \Gamma_e \cup \Gamma_f$, et ceci que e et f soient distincts ou non.

2° $a \notin (b)$, car $a \in (b)$ entraîne $ab \in (b)$; de même $b \notin (a)$.

3° $b \notin (a) \vee (b)_2 \vee (ab)$; en effet $b \in (a) \vee (b)_2 \vee (ab)$ et $b \notin (a)$ entraînent, selon que le premier facteur dans l'écriture de b comme produit fini d'éléments de $(a) \cup (b)_2 \cup (ab)$, est puissance de b ou puissance de a :

$$\text{soit } 1^\circ \quad b = b^{k-1} b \quad \text{ou} \quad b = b^{k-1} bx \quad \text{avec} \quad k \geq 2 \quad ;$$

$$\text{soit } 2^\circ \quad b = a^{k'} b \quad \text{ou} \quad b = a^{k'} bx' \quad ;$$

cependant il existe h et h' tels que $(b^{k-1})^h = f$ et $(a^{k'})^{h'} = e$; des égalités 1° résulte alors $b = fb$ ou $b = fb(x)^h$; multipliant à gauche par f les deux membres de cette dernière égalité, on voit que l'on a toujours $b = fb$; cependant $b = fb$ entraîne $b \in \Gamma_f$, ce qui est contraire à l'implication 1°; des égalités 2° résulte de même $b = eb$; cependant $b = eb$ entraîne

$$b = (ef)b = e(fb) \in e\Gamma_f = \Gamma_e$$

ce qui est encore contraire à l'implication 1°.

4° $a \notin (a)_2 \vee (b) \vee (ab)$; en effet $a \in (a)_2 \vee (b) \vee (ab)$ et $a \notin (b)$ entraînent, selon que le dernier facteur dans l'écriture de a comme produit fini d'éléments de $(a)_2 \cup (b) \cup (ab)$ est puissance de b ou puissance de a :

$$\text{soit } 1^\circ \quad a = ab^k \quad \text{ou} \quad a = yab^k \quad ;$$

$$\text{soit } 2^\circ \quad a = aa^{k'-1} \quad \text{ou} \quad a = y'aa^{k'-1} \quad \text{avec} \quad k' \geq 2 \quad ;$$

cependant il existe h et h' tels que $(b^k)^h = f$ et $(a^{k'-1})^{h'} = e$; des égalités 1° résulte alors $a = af = ae \in \Gamma_e$ ce qui est contraire à l'implication 1°; des égalités 2° résulte de même $a = ae \in \Gamma_e$ ce qui est encore contraire à l'implication 1°.

Première étape. - L'un des éléments a ou b a son carré dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. G étant idéal de $G \cup (a)$, $G \cup (a)$ est un sous-demi-groupe égal à $(a) \vee [b]$; de même on a

$$G \cup (b) = [a] \vee (b) \quad .$$

Les implications précédentes permettent d'écrire :

$$G = [a] \vee [b] \subset [a] \vee (b) = G \cup (b) \subset (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \subset (a) \vee (b)$$

et

$$G = [a] \vee [b] \subset (a) \vee [b] = G \cup (a) \subset (a) \vee (b)_2 \vee (ab) \subset (a) \vee (b) \quad .$$

Si par exemple a^2 est élément de Γ_e , on a $G \cup (a) = G \cup \{a\}$; il en résulte :

$$G \cup (a) > G \quad \text{et} \quad \{(a)_2 \vee (b) \vee (ab)\} \cap \{G \cup (a)\} = G \quad .$$

Considérons alors les trois éléments X , Y et Z de $T(D)$ définis par

$$X = G \cup (b), \quad Y = G \cup (a) \quad \text{et} \quad Z = (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \quad ;$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = G \quad \text{et} \quad X \vee Y = (a) \vee (b) \quad .$$

Il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe à ζ_0 ; cependant on a

$$Y > Y \cap Z \quad \text{et} \quad Y \cap Z \neq \emptyset \quad ;$$

la condition (1') est mise en défaut.

De même si b^2 est élément de Γ_f , la condition (1') est mise en défaut. Si l'un des éléments a ou b a son carré dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$, ab est élément de $G \cup (a) \cup (b)$.

Au cours des trois dernières étapes nous utiliserons les résultats suivants conséquences des implications 3° et 4° :

$$1^\circ \quad (a)_2 \vee (b)_2 \subset (a) \vee (b)_2 \subseteq (a) \vee (b)_2 \vee (ab) \subset (a) \vee (b)$$

en effet

$$a \notin (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \text{ entraîne } a \notin (a)_2 \vee (b)_2 \quad ;$$

$$2^\circ \quad (a)_2 \vee (b)_2 \subset (a)_2 \vee (b) \subseteq (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \subset (a) \vee (b)$$

car de même

$$b \notin (a)_2 \vee (b)_2 \quad .$$

Deuxième étape. - Les éléments a et b ont leur cube dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. Dans ces conditions les produits ab^2 , a^2b , a^2b^2 , b^2a , ba^2 et b^2a^2 satisfont aux conditions de la première étape puisque $(a^2)^2 = a^4$ est élément de Γ_e et $(b^2)^2 = b^4$ est élément de Γ_f . G étant idéal de $G \cup (a) \cup (b)$, les trois sous-ensembles

$$G \cup (a)_2 \cup (b)_2, \quad G \cup (a)_2 \cup (b) \quad \text{et} \quad G \cup (a) \cup (b)_2$$

sont des sous-demi-groupes respectivement égaux à

$$(a)_2 \vee (b)_2, \quad (a)_2 \vee (b) \quad \text{et} \quad (a) \vee (b)_2 \quad .$$

Il en résulte :

$$1^\circ \quad ab \notin (a)_2 \vee (b) \quad \text{et} \quad ab \notin (a) \vee (b)_2 \quad ;$$

$$2^\circ \quad (a)_2 \vee (b) \supset (a)_2 \vee (b)_2 \quad \text{et} \quad (a) \vee (b)_2 \supset (a)_2 \vee (b)_2 \quad ;$$

$$3^\circ \quad \{(a)_2 \vee (b) \vee (ab)\} \cap \{(a) \vee (b)_2\} = (a)_2 \vee (b)_2$$

et

$$\{(a) \vee (b)_2 \vee (ab)\} \cap \{(a)_2 \vee (b)\} = (a)_2 \vee (b)_2 \quad .$$

Considérons alors les quatre éléments X , Y , Z et T de $T(D)$ définis par

$$X = (a)_2 \vee (b), \quad Y = (a) \vee (b)_2, \quad Z = (a)_2 \vee (b) \vee (ab) \quad \text{et} \quad T = (a) \vee (b)_2 \vee (ab);$$

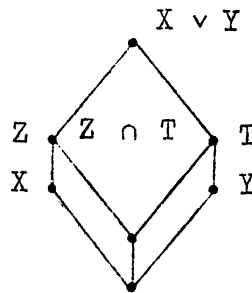
ils sont tels que

$$Y \cap Z = X \cap T = (a)_2 \vee (b)_2, \quad X \vee Y = (a) \vee (b) \quad \text{et} \quad ab \in Z \cap T \quad .$$

Il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y, \quad X \cap T \subset Y \subset T \subset X \vee Y \quad \text{et} \quad Y \cap Z = X \cap T \subset Z \cap T, \quad ,$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(D)$ isomorphe au treillis \mathcal{C}_1 dont le diagramme est le suivant :



$$Y \cap Z = X \cap T \quad .$$

Ce dernier contient lui-même deux sous-treillis isomorphes à \mathcal{C}_0 ; cependant on a $Y > Y \cap Z$, $X > X \cap T$ et $Y \cap Z = X \cap T \neq \emptyset$; la condition (1') est doublement mise en défaut.

Si les éléments a et b ont leur cube dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$, ab est élément de $G \cup (a) \cup (b)$.

Troisième étape. - L'un des éléments a ou b a son cube dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. L'autre, compte tenu de ce que la période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 5, a sa puissance cinquième dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. On a donc soit

$$(I) \quad a^3 \in \Gamma_e, \quad b^5 \in \Gamma_f \quad ;$$

$$(II) \quad a^5 \in \Gamma_e, \quad b^3 \in \Gamma_f \quad .$$

Si (I) est réalisé, les produits $ab^3, b^3a, ab^4, b^4a, a^2b, ba^2, a^2b^2, b^2a^2, a^2b^3, b^3a^2, a^2b^4$ et b^4a^2 satisfont aux conditions de la première étape, puisque $(b^3)^2, (b^4)^2$ et $(a^2)^2$ sont éléments de $\Gamma_e \cup \Gamma_f$; les produits ab^2 et b^2a satisfont aux conditions de la seconde étape, puisque a^3 est élément de Γ_e et $(b^2)^3$ est élément de Γ_f . Si (II) est réalisé les produits $ab^2, b^2a, a^2b, ba^2, a^2b^2, b^2a^2, a^3b, ba^3, a^3b^2, b^2a^3, a^4b, ba^4, a^4b^2$ et b^2a^4 satisfont de même aux conditions de l'une des deux premières étapes puisque $(a^3)^2, (a^4)^2, (b^2)^2, b^3$ et $(a^2)^3$ sont éléments de $\Gamma_e \cup \Gamma_f$.

On a donc comme précédemment

$$G \cup (a)_2 \cup (b)_2, \quad G \cup (a) \cup (b)_2 \quad \text{et} \quad G \cup (a)_2 \cup (b)$$

stables, donc

$$(a)_2 \vee (b)_2 = G \cup (a)_2 \cup (b)_2, \quad (a) \vee (b)_2 = G \cup (a) \cup (b)_2 \quad \text{et} \quad (a)_2 \vee (b) \\ = G \cup (a)_2 \cup (b) \quad .$$

La démonstration se termine comme dans la seconde étape. Si l'un des éléments a ou b a son cube dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$, ab est élément de $G \cup (a) \cup (b)$.

Dernière étape. — Les éléments a et b sont quelconques. Toutefois, compte tenu de ce que la période de tout sous-demi-groupe cyclique commence à un rang inférieur ou égal à 5, leur puissance cinquième est dans $\Gamma_e \cup \Gamma_f$. Des hypothèses $(a^2)^3 \in \Gamma_e$ et $(b^2)^3 \in \Gamma_f$ résulte à nouveau, grâce à la troisième étape :

$$(a)_2 \vee (b)_2 = G \cup (a)_2 \cup (b)_2, \quad (a) \vee (b)_2 = G \cup (a) \cup (b)_2 \quad \text{et} \quad (a)_2 \vee (b) \\ = G \cup (a)_2 \cup (b) \quad .$$

La démonstration se termine comme dans la seconde étape. Quels que soient les éléments a de Γ_e et b de Γ_f , ab est donc élément de :

$$(a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\} \quad .$$

COROLLAIRE 1. - Si $T(D)$ satisfait à la condition (1'), les fuseaux de D sont stables ; en effet $\forall a$ et $b \in F_e G$, (a) et (b) sont contenus dans F_e donc aussi le produit ab .

COROLLAIRE 2. - Si e et f sont deux idempotents distincts de D , tels que $\{e, f\}$ soit un antisemigroupe avec par exemple $ef = e$, $fe = f$ (5), et si $T(D)$ satisfait à la condition (1') alors, $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$,

$$ab \text{ est élément de } (a) \cup \{[a] \vee (eb)\} \quad .$$

A priori ab est élément de $G \cup (a) \cup (b)$ contenu dans $F_e \cup F_f$; cependant $ab \in F_f$ est impossible car entraîne $(ab)f \in \Gamma_f$; or

$$(ab)f = a(bf) = a(fb) = (af)b = (ae)b = a(eef)b = (ae)\{e(fb)\} \in \Gamma_e\{e\Gamma_f\} = \Gamma_e^2 = \Gamma_e \quad .$$

On a donc

$$ab \in F_e \cap \{G \cup (a) \cup (b)\} = (a) \cup \{F_e \cap G\} \quad .$$

Par ailleurs de

$$eb = (ef)b = e(fb) \in e\Gamma_f = \Gamma_e$$

résulte que $[a] \vee (eb)$ est un sous-groupe de Γ_e ; dès lors

$$f\{[a] \vee (eb)\} = f\{(ea) \vee (eb)\} = (fea) \vee (feb) = (fa) \vee (fb) = (fa) \vee [b]$$

est un sous-groupe de Γ_f et

$$\{[a] \vee (eb)\} \cup \{[b] \vee (fa)\}$$

est un sous-demi-groupe de $\Gamma_e \cup \Gamma_f$; les relations

$$eb = (ef)b = e(fb) \quad \text{et} \quad fa = (fe)a = f(ea)$$

entraînent les inclusions

$$[a] \cup [b] \subseteq \{[a] \vee (eb)\} \cup \{[b] \vee (fa)\} \subseteq [a] \vee [b]$$

on a donc

$$G = \{[a] \vee (eb)\} \cup \{[b] \vee (fa)\}$$

et par suite

$$F_e \cap G = [a] \vee (eb) \quad .$$

Les théorèmes précédents montrent que si $T(D)$ satisfait à la condition (2) alors, $\forall e$ et f idempotents distincts ou non de D , $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$, ef est un idempotent de D et ab un élément de F_{ef} ; ceci peut encore s'écrire $\forall a$ et $b \in D$, $e_{ab} = e_a \cdot e_b$; l'application $a \rightarrow e_a$ est donc un homomorphisme de D sur l'ensemble I de ses idempotents. Ce résultat s'énonce en utilisant le langage de CLIFFORD [1]: "si $T(D)$ satisfait à la condition (2), D est bande sur I de ses fuseaux".

D'autre part on sait [4] que si J est un demi-groupe idempotent arbitraire, il existe un demi-treillis Σ et une famille de sous-demi-groupes rectangulaires disjoints de J indexés par Σ , $\{R_\gamma; \gamma \in \Sigma\}$, tels que :

$$J = \cup \{R_\gamma; \gamma \in \Sigma\} \quad \text{et} \quad R_\gamma R_\delta \subseteq R_{\gamma\delta}, \quad \forall \gamma, \delta \in \Sigma$$

ce qui s'énonce dans le langage de CLIFFORD: "tout demi-groupe idempotent est un demi-treillis de demi-groupes rectangulaires". Si $T(D)$ satisfait à la condition (2), I est un demi-groupe idempotent tel que, $\forall e$ et $f \in I$, le produit ef est égal à e ou à f ; le demi-treillis de structure est alors une chaîne C et les sous-demi-groupes rectangulaires des antisemigroupes S_i pour $i \in C$; de plus, dans ce cas particulier, la multiplication de S_i par S_j est déterminée par: $e \in S_i$, $f \in S_j$, et $ij = i$ entraînent $ef = e$.

Compte tenu des deux résultats, D est bande sur I de ses fuseaux et I est une chaîne sur C d'antisemigroupes S_i , on conclut que D est aussi un demi-treillis sur C de sous-demi-groupes qui sont les $\cup_{e \in S_i} F_e$ que nous noterons

Φ_i ; de même nous poserons

$$\cup_{e \in S_i} \Gamma_e = P_i$$

et nous savons que P_i est une réunion de groupes isomorphes produit direct de l'un d'entre eux par l'antisemigroupe S_i .

Nous avons alors le théorème suivant :

THÉORÈME 6. - Si $T(D)$ satisfait à la condition (2), D satisfait à l'ensemble (I) de conditions suivant :

- 1° D est périodique ;
- 2° D est bande sur I de ses fuseaux ;
- 3° Pour tout couple e et f d'éléments de I le produit ef est égal à e ou à f ;
- 4° $\forall A$ et $B \in T(\Phi_i)$: $A \vee B = A \cup B \cup (A' \vee B')$ avec $A' = A \cap P_i$ et $B' = B \cap P_i$;
- 5° $\forall A \in T(\Phi_i)$ et $\forall B \in T(\Phi_j)$, avec $i \neq j$: $A \vee B = A \cup B$, d'où il résulte que le treillis $T(D)$ est le produit cardinal général des treillis $T(\Phi_i)$ pour $i \in C$ [2].

Les conditions 1, 2 et 3 ont déjà été démontrées nécessaires.

Soit A et B deux éléments de $T(\Phi_i)$; posons

$$A' = A \cap P_i \quad \text{et} \quad B' = B \cap P_i$$

et montrons que $A \cup B \cup (A' \vee B')$ est stable ; $A' \vee B'$ est un sous-demi-groupe de P_i ; soit

$$x \in A, \quad y \in B \quad \text{et} \quad z \in A' \vee B' \quad ,$$

compte tenu du théorème 5, on a

$$xy \in (x) \cup (y) \cup \{[x] \vee [y]\} \subseteq A \cup B \cup (A' \vee B') \quad ;$$

d'autre part, supposant par exemple que S_i est un antisemigroupe à droite on a

$$zx = (ze_z)x = z(e_z \cdot e_x)x = z(e_x x) \in A' \vee B'$$

et, compte tenu du théorème 4,

$$xz = x(e_z z) = (xe_z)z = (xe_x)z \in A' \vee B' \quad ;$$

$A \cup B \cup (A' \vee B')$ étant stable, on a

$$A \vee B = A \cup B \cup (A' \vee B') \quad .$$

Soit maintenant $A \in T(\Phi_i)$, $B \in T(\Phi_j)$ avec $i \neq j$, alors

$$A \vee B = A \cup B \quad ;$$

en effet, soient $a \in A$ et $b \in B$, on a $a \in F_e$, $b \in F_f$ et $\{e, f\}$ est un demi-treillis avec par exemple $ef = fe = e$; dès lors, par application du théorème 3, on a ab et $ba \in (a)$, donc ab et $ba \in A \cup B$; $A \cup B$ étant stable, on a

$$A \vee B = A \cup B \quad .$$

La correspondance

$$A \in T(D) \rightarrow \{A_i = A \cap \Phi_i\}, \quad i \in C \quad ,$$

est injective car $A \neq B$ entraîne $A_i \neq B_i$ pour au moins un indice $i \in C$; elle est surjective car

$$\{A_i \in T(\Phi_i)\}, \quad i \in C$$

est l'image de

$$A = \bigcup_{i \in C} A_i$$

stable, donc élément de $T(D)$ d'après la propriété ci-dessus; enfin à $A \cap B$ est associé

$$\{(A \cap B) \cap \Phi_i = A_i \cap B_i\}, \quad i \in C$$

et, compte tenu des inclusions,

$$A \cup B = \bigcup_{i \in C} (A_i \cup B_i) \subseteq \bigcup_{i \in C} (A_i \vee B_i) \subseteq A \vee B$$

et de la stabilité de

$$\bigcup_{i \in C} (A_i \vee B_i)$$

$A \vee B$ a pour image $\{A_i \vee B_i\}$, $i \in C$: $T(D)$ est isomorphe au produit cardinal général des treillis $T(\Phi_i)$ pour $i \in C$.

L'étude qui va suivre va permettre de donner une forme purement multiplicative des conditions 4 et 5 de l'ensemble (I).

Si D satisfait à l'ensemble de conditions (I), chaque fuseau est un demi-groupe unipotent et périodique satisfaisant à la condition : $\forall a$ et $b \in F_e$, ab est élément de $(a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\}$; ceci résulte de la condition 4 en posant $A = (a)$ et $B = (b)$. Étudions d'abord ces demi-groupes. Nous appellerons $(F_e)_n$ l'ensemble des éléments de F_e qui s'écrivent sous forme d'une puissance d'un élément de F_e supérieure ou égale à n :

$$(F_e)_n = \{x \in F_e ; \exists y \in F_e \text{ et } k \geq n \text{ avec } x = y^k\} \quad ,$$

et F_e^n l'ensemble des produits de n éléments de F_e

$$F_e^n = \left\{ \prod_{i=1}^n a_i ; a_i \in F_e, \forall i \right\} \quad .$$

Il est clair que :

$$1^\circ \quad (F_e)_n \subseteq F_e^n \quad ;$$

$$2^\circ \quad F_e \supseteq (F_e)_2 \supseteq (F_e)_3 \supseteq \dots \supseteq (F_e)_n \supseteq \dots \supseteq \Gamma_e \quad ;$$

$$3^\circ \quad F_e \supseteq F_e^2 \supseteq F_e^3 \supseteq \dots \supseteq F_e^n \supseteq \dots \supseteq \Gamma_e \quad ;$$

en effet si k est supérieur ou égal à n , on a

$$y^k = y^{k-n+1} y^{n-1} \in (F_e)^n \quad ;$$

par ailleurs tout élément de Γ_e est d'une part puissance arbitrairement grande de lui-même et d'autre part produit de lui-même par $n-1$ facteurs égaux à e .

LEMME 1. - $(F_e)_5 = \Gamma_e$.

Cette relation n'est pas autre chose que la deuxième condition du théorème 1.
Soit $c \in F_e$; posons $a = c^2$ et $b = c^3$, on a

$$ab = c^5 \in (c^2) \cup (c^3) \cup \{[c^2] \vee [c^3]\}$$

donc :

$$\text{soit } 1^\circ \quad c^5 \in [c^2] \vee [c^3] \subseteq [c] \quad ;$$

$$\text{soit } 2^\circ \quad c^5 \in (c^2) \quad \text{donc} \quad c^5 = c^{2k} \quad \text{pour un certain } k \quad \text{et par suite} \quad c^5 \in [c] \quad ;$$

$$\text{soit } 3^\circ \quad c^5 \in (c^3) \quad \text{ce qui entraîne comme ci-dessus} \quad c^5 \in [c] \quad .$$

Dès lors, $\forall c \in F_e$, $(c)_5 = [c]$, et par suite, $\forall x \in (F_e)_5$, $x = y^k$ est élément de $(y)_5 = [y]$ contenu dans Γ_e .

LEMME 2. - $(F_e)_2 = F_e^2$.

Il nous suffit de montrer que $F_e^2 \subseteq (F_e)_2$; soit donc ab un élément de F_e^2 ; par hypothèse ab est élément de $(a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\}$;

si ab est élément de Γ_e , ab est élément de $(F_e)_2$, puisque $\Gamma_e \subseteq (F_e)_2$;

si ab n'est pas élément de Γ_e , a et b sont éléments de $F_e - \Gamma_e$ puisque Γ_e est idéal de F_e ; ab est a priori élément de $(a) \cup (b)$; cependant " $ab = a$ ou b " est alors impossible car, par exemple, " $ab = a$ et $b^k = e$ " entraîne " $a = ab = ab^k = ae$ ", donc $a \in \Gamma_e$; par suite ab est élément de $(a)_2 \cup (b)_2 \subseteq (F_e)_2$.

LEMME 3. - Pour tout n , $(F_e)_n = F_e^n$.

La démonstration se fait par récurrence. Supposons donc que

$$(F_e)_{n-1} = F_e^{n-1} \quad ,$$

et montrons l'inclusion $F_e^n \subseteq (F_e)_n$. Soit $\prod_{i=1}^n a_i$ un élément de F_e^n ; $\prod_{i=1}^{n-1} a_i$ est élément de F_e^{n-1} , donc de $(F_e)_{n-1}$, et par suite il existe $x \in F_e$ et $k \geq n-1$ tel que

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_i = x^k \quad ;$$

on a donc

$$\prod_{i=1}^n a_i = x^{k-1} (x a_n) \quad .$$

Compte tenu du lemme 2 on a $x a_n \in (x)_2 \cup (a_n)_2 \cup \{[x_n] \vee [a_n]\}$, donc

$$\text{soit } 1^\circ \quad x a_n \in \Gamma_e \text{ ce qui entraîne } \prod_{i=1}^n a_i \in \Gamma_e \subseteq (F_e)_n \quad ;$$

$$\text{soit } 2^\circ \quad x a_n \in (x)_2, \text{ c'est-à-dire } x a_n = x^m \text{ avec } m \geq 2 \quad ;$$

il en résulte

$$\prod_{i=1}^n a_i = x^{k-1+m} \in (F_e)_n \quad ;$$

$$\text{soit } 3^\circ \quad x a_n \in (a_n)_2, \text{ c'est-à-dire } x a_n = a_n^m \text{ avec } m \geq 2 \quad ;$$

chaque facteur x se comporte alors à gauche de a_n comme le facteur a_n^{m-1} ;
il en résulte

$$\prod_{i=1}^n a_i = x^k a_n = a_n^{k(m-1)+1} \in (F_e)_n \quad .$$

La propriété étant vraie pour $n = 2$ l'est pour tout n ; en particulier

$$(F_e)_5 = F_e^5 \quad ,$$

donc

$$F_e^5 = \Gamma_e \quad .$$

LEMME 4. - Tout élément de $F_e - \Gamma_e$ est puissance d'un élément de $F_e - F_e^2$.

Soit en effet a un élément de $F_e - \Gamma_e$; ou bien a est élément de $F_e - F_e^2$ et le lemme est démontré, ou bien a est élément de $F_e^2 = (F_e)_2$; il existe alors $b \in F_e$ et $k \geq 2$ tel que $a = b^k$; si b est élément de $F_e - F_e^2$, le lemme est démontré, sinon il existe $c \in F_e$ et $k' \geq 2$ tel que $b = c^{k'}$; dès lors

c est élément de $F_e - F_e^2$; en effet s'il n'en n'est pas ainsi il existe $d \in F_e$ et $k'' \geq 2$ tel que $c = d^{k''}$, donc tel que $a = d^{kk'k''}$, et ceci est impossible puisque $kk'k'' \geq 8$ et $(F_e)_5 = \Gamma_e$ entraîne $d^{kk'k''} = a \in \Gamma_e$.

LEMME 5. - Pour tout couple $a, b \in F_e - F_e^2$ tel que $ab \in F_e - \Gamma_e$, α désignant l'un des éléments a ou b , β l'autre, on a :

soit 1° $ab = \alpha^2$; $\alpha^3 \in \Gamma_e$;

soit 2° $ab = \alpha^2$ et, $\forall n \geq 3$, $a^n = b^n$;

soit 3° $ab = \alpha^2$; $\alpha^3 = \beta^4$; $\alpha^4 = \alpha^5 = e = \beta^5 = \beta^6$;

soit 4° $ab = a^3, b^3, a^4$ ou b^4 .

Compte tenu du lemme 2 on a, a priori, $ab \in (a)_2 \cup (b)_2 \cup (F_e - \Gamma_e)$, et par suite $ab \in \{a^2, a^3, a^4, b^2, b^3, b^4\}$. On a donc :

soit le 4° : $ab = a^3, b^3, a^4$ ou b^4 ;

soit le 1° : $ab = \alpha^2$; $\alpha^3 \in \Gamma_e$;

soit enfin : $ab = \alpha^2$; $\alpha^3 \notin \Gamma_e$.

Supposons par exemple qu'on ait " $ab = a^2$; $a^3 \notin \Gamma_e$ " ; il en résulte

$$a^3 = a^2 b \in (a^2)_2 \cup (b)_2 \cup \{[a^2] \vee [b]\} .$$

Or $a^3 \in (a^2)_2$ et $a^3 \in [a^2] \vee [b]$ entraînant $a^3 \in \Gamma_e$ on a nécessairement

$$a^3 \in \{b^2, b^3, b^4\} ;$$

$a^3 = b^2$ et $a^2 = ab$ entraînent $a^3 = ab^2 = a^4$, donc $a^3 \in \Gamma_e$. Il ne reste donc que deux cas possibles :

- le 2° : $a^3 = b^3$, d'où il résulte pour tout $n' \geq 0$

$$b^{3+n'} = a^2 ab^{n'} = a^2 a^{1+n'} = a^{3+n'}$$

c'est-à-dire, $\forall n \geq 3$,

$$a^n = b^n \quad ;$$

- le 3° : $a^3 = b^4$, d'où il résulte

$$b^6 = (b^4)b^2 = a^3 b^2 = a^5 = a(b^4) = a^4 = e$$

et

$$b^5 = (b^4)b = a^3 b = a^4 = e$$

soit on résumé :

$$a^4 = a^5 = e = b^5 = b^6 \quad .$$

THÉORÈME 7. - Un demi-groupe unipotent et périodique F_e satisfait à la condition : $\forall a$ et $b \in F_e$, ab est élément de $(a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\}$, si et seulement si Γ_e désignant le groupe maximal de F_e ;

$$1^\circ \quad F_e^5 = \Gamma_e \quad ;$$

$$2^\circ \quad F_e \text{ satisfait à la condition du lemme 4} \quad ;$$

$$3^\circ \quad F_e \text{ satisfait à la condition du lemme 5} \quad .$$

Ces conditions sont nécessaires.

Soient maintenant x et y deux éléments de F_e ; si xy est élément de Γ_e , on a

$$xy = e(xy) = (ex)y = (exe)y = ex \cdot ey \in [x] \vee [y] \quad ;$$

si xy est élément de $F_e - \Gamma_e$, x et y sont aussi éléments de $F_e - \Gamma_e$, puisque Γ_e est idéal bilatère de F_e ; il existe donc, d'après 2°, deux éléments a et b de $F_e - F_e^2$ tels que $x = a^k$ et $y = b^h$; de plus, compte tenu de 1°, $k + h$ est inférieur ou égal à 4 ; il reste à examiner les diverses éventualités du 3°.

Si $ab = \alpha^2$ avec par exemple $\alpha = a$, on a $xy = a^{k+h}$, donc $xy = x^{h+1}$ si $k = 1$, et $xy = x^2$ si $k = h = 2$; il reste le cas $k = 3$, $h = 1$; il ne se produit ni dans le cas 1°, ni dans le cas 3°, car alors a^4 est élément de Γ_e ; dans le cas 2°, $a^4 = b^4$, donc $xy = y^4$.

Si $ab = \alpha^3$ avec par exemple $\alpha = a$, on a $xy = a^{k+2h}$, donc $xy = x^3$ si $k = h = 1$ et $xy = x^2$ si $k = 2$, $h = 1$; ce sont les deux seuls cas possibles.

Si $ab = a^4$ ou b^4 il n'y a qu'un seul cas possible $k = h = 1$ et par suite $xy = x^4$ ou y^4 .

Ces conditions sont donc bien suffisantes.

Si D satisfait à l'ensemble de conditions (I) et si e et f sont deux idempotents distincts de D tels que $\{e, f\}$ soit un demi-treillis avec par exemple $ef = fe = e$ alors $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$, ab est élément de (a) ; en effet la condition 5 montre que ab et ba sont éléments de $(a) \cup (b)$ et la condition 2 que ab et ba sont éléments de F_e .

LEMME 6. - Dans un demi-groupe périodique, si e et f sont deux idempotents distincts, tels que $ef = e$, et si F_e est stable et satisfait aux conditions 1 et 2 du théorème 7, la condition " $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$ ", ab est élément de (a) " est équivalente à l'ensemble de conditions suivant :

$$1^\circ F_e \cdot F_f \subseteq F_e;$$

$$2^\circ \forall b \in F_f : eb = e;$$

$$3^\circ \forall a \in F_e - F_e^2 \text{ et } \forall b \in F_f, \text{ tels que } ab \in F_e - \Gamma_e, \text{ on a :}$$

$$\text{soit } 1^\circ \quad ab = a^2; \quad a^3 \in \Gamma_e \quad ;$$

$$\text{soit } 2^\circ \quad ab = a, \quad a^3 \text{ ou } a^4 \quad .$$

Ces conditions sont nécessaires : la première et la seconde car (a) est contenu dans F_e et (e) est égal à $\{e\}$; la troisième résulte de ce que a^5 est élément de Γ_e et de ce que $ab = a^2$, $a^3 \notin \Gamma_e$ entraîne $a^2 b = a^3 \notin (a^2)$ et est donc impossible.

Ces conditions sont suffisantes ; soit en effet $x \in F_e$ et $y \in F_f$. Si xy est élément de Γ_e , on a

$$xy = e(xy) = (ex)y = (xe)y = x(ey) = xe \in (x) \quad .$$

Si xy est élément de $F_e - \Gamma_e$, x est aussi élément de $F_e - \Gamma_e$; en effet $x \in \Gamma_e$ entraîne

$$xy = (xe)y = x(ey) = xe \in \Gamma_e \quad ;$$

il existe donc un élément a de $F_e - F_e^2$ tel que $x = a^k$ avec d'ailleurs $k \leq 4$; il reste à examiner les diverses éventualités du 3° :

si $ay = a$, on a

$$xy = x \in (x) \quad ;$$

si $ay = a^2$; $a^3 \in \Gamma_e$, il n'y a qu'un seul cas possible

$$k = 1, \text{ d'où } xy = x^2 \quad ;$$

si $ay = a^3$, on a

$$\text{soit } k = 1, \quad xy = x^3 \quad ;$$

$$\text{soit } k = 2, \quad xy = x^2 \quad ;$$

si $ay = a^4$, il n'y a qu'un seul cas possible

$$k = 1, \text{ d'où } xy = x^4 \quad .$$

Un lemme évidemment analogue est relatif au cas $ef = f$, $ab \in (b)$.

Si D satisfait à l'ensemble de conditions (I), et si e et f sont deux idempotents distincts de D tels que $\{e, f\}$ soit un antisemigroupe avec par exemple $ef = e$, $fe = f$, alors $\forall a \in F_e$ et $\forall b \in F_f$,

$$ab \text{ est élément de } (a) \cup \{[a] \vee (eb)\} \quad ;$$

en effet la condition 4 montre que

$$ab \text{ est élément de } (a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\} \quad ,$$

la condition 2 montre que

ab est élément de F_e

et

$$\{[a] \vee [b]\} \cap F_e \text{ est égal à } [a] \vee (eb) \quad .$$

LEMME 7. - Dans un demi-groupe périodique, si e et f sont deux idempotents distincts tels que $\{e, f\}$ soit un antisemigroupe avec, par exemple $ef = e$, $fe = f$ (⁵), et si F_e et F_f sont stables et satisfont aux conditions 1 et 2 du théorème 7, la condition

$$\forall a \in F_e \text{ et } \forall b \in F_f, ab \text{ est élément de } (a) \cup \{[a] \vee (eb)\}$$

est équivalente à l'ensemble de conditions suivant :

$$1^\circ F_e \cdot F_f \subseteq F_e ;$$

$$2^\circ \forall a \in F_e - F_e^2 \text{ et } \forall b \in F_f - F_f^2 \text{ tels que } ab \in F_e - \Gamma_e, \text{ on a :}$$

$$\text{soit } 1^\circ \quad ab = a^2 ; \quad a^3 \in \Gamma_e \quad ;$$

$$\text{soit } 2^\circ \quad ab = a^3 \text{ ou } a^4 \quad .$$

Ces conditions sont nécessaires : la première car $(a) \cup \{[a] \vee (eb)\}$ est contenu dans F_e , la seconde est conséquence des trois remarques suivantes :

$$1^\circ a^5 \text{ est élément de } \Gamma_e ;$$

$$2^\circ ab = a^2 ; \quad a^3 \notin \Gamma_e \text{ est impossible, car entraîne}$$

$$a^2 b = a^3 \notin (a^2) \cup \{[a^2] \vee (eb)\} \quad ;$$

$3^\circ ab = a$ est également impossible, car il existe k tel que $b^k = f$ et par suite $ab = a$ entraîne

$$a = ab = ab^k = af = a(fe) = (af)e = e(af) = (ea)f = (ae)f = a(ef) = ae \in \Gamma_e \quad .$$

Ces conditions sont suffisantes ; soit en effet $x \in F_e$ et $y \in F_f$. Si xy est élément de Γ_e , on a :

$$xy = e(xy) = (ex)y = (xe)y = x(ee)y = (xe)(ey) \in [x] \vee (ey) \quad .$$

Si xy est élément de $F_e - \Gamma_e$, x est élément de $F_e - \Gamma_e$ et y est élément de $F_f - \Gamma_f$; en effet $x \in \Gamma_e$ entraîne

$$xy = (ex)y = e(xy) \in \Gamma_e$$

et $y \in \Gamma_f$ entraîne

$$xy = x(yf) = xy(fe) = x(yf)e = (xy)e \in \Gamma_e \quad ;$$

il existe donc un élément a de $F_e - F_e^2$ et un élément b de $F_f - F_f^2$ tels que $x = a^k$ et $y = b^h$ avec d'ailleurs k et h inférieurs ou égaux à 4; il reste à examiner les diverses éventualités du 2° :

si $ab = a^2$; $a^3 \in \Gamma_e$, il n'y a qu'un seul cas possible

$$k = h = 1, \text{ d'où } xy = x^2 \quad ;$$

si $ab = a^3$, on a

$$\text{soit } k = h = 1, \quad xy = x^3 \quad ;$$

$$\text{soit } k = 2, \quad h = 1, \quad xy = x^2 \quad ;$$

si $ab = a^4$, il n'y a qu'un seul cas possible

$$k = h = 1, \text{ d'où } xy = x^4 \quad .$$

THÉOREME 8. - L'ensemble de condition (I) est équivalent à l'ensemble (II) suivant :

- 1° D est périodique ;
- 2° D est bande sur I de ses fuseaux ;
- 3° Pour tout couple e et f d'éléments de I le produit ef est égal à e ou à f ;
- 4° Chaque fuseau F_e satisfait à :
 - a. Tout élément de $F_e - \Gamma_e$ est puissance d'un élément de $F_e - F_e^2$;
 - b. $F_e^5 = \Gamma_e$;

c. Pour tout couple $a, b \in F_e - F_e^2$, tel que $ab \in F_e - \Gamma_e$, α désignant l'un des éléments a ou b , β l'autre, on a :

soit : $ab = \alpha^2$; $\alpha^3 \in \Gamma_e$;

soit : $ab = \alpha^2$ et $\forall n \geq 3$: $a^n = b^n$;

soit : $ab = \alpha^2$; $\alpha^3 = \beta^4$; $\alpha^4 = \alpha^5 = e = \beta^5 = \beta^6$;

soit : $ab = a^3, b^3, a^4$ ou b^4 .

5° Si e et f sont deux éléments distincts de I tels que $\{e, f\}$ soit un demi-treillis avec par exemple $ef = fe = e$ ⁽⁶⁾, la multiplication de F_e par F_f satisfait à :

a. $\forall b \in F_f$: $eb = e$;

b. $\forall a \in F_e - F_e^2$ et $\forall b \in F_f$, tels que $ab \in F_e - \Gamma_e$, on a :

soit 1° $ab = a^2$; $a^3 \in \Gamma_e$;

soit 2° $ab = a, a^3$ ou a^4 .

6° Si e et f sont deux éléments distincts de I tels que $\{e, f\}$ soit un antisemigroupe avec par exemple $ef = e, fe = f$ ⁽⁵⁾, la multiplication de F_e par F_f satisfait à :

$\forall a \in F_e - F_e^2$ et $\forall b \in F_f - F_f^2$, tels que $ab \in F_e - \Gamma_e$, on a :

soit 1° $ab = a^2$; $a^3 \in \Gamma_e$;

soit 2° $ab = a^3$ ou a^4 .

On a déjà vu que (I) entraîne (II).

Réciproquement (II) permet d'utiliser les réciproques des lemmes 6 et 7, puisque la deuxième condition de (II) entraîne $F_e \cdot F_f \subseteq F_{ef} = F_e$; dès lors on a

$$ab \in (a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\}, \quad \forall a \text{ et } b \in F_e, \quad ,$$

$$ab \in (a), \quad \forall a \in F_e \text{ et } \forall b \in F_f \text{ avec } e \neq f \text{ et } ef = fe = e$$

et

$$ab \in (a) \cup \{[a] \vee (eb)\}, \quad \forall a \in F_e \text{ et } \forall b \in F_f \text{ avec } e \neq f, \quad ef = e \text{ et } fe = f.$$

⁽⁶⁾ Les conditions relatives au cas $ef = fe = f$ s'en déduisent aisément.

Ces conditions, ainsi que celles relatives au cas $ef = fe = f$ et $ef = f$, $fe = e$, jointes aux conditions 1 et 3 de (II) ont déjà permis d'établir l'ensemble de conditions (I).

THÉOREME 9. - Si P est le produit direct d'un antisemigroupe S et d'un groupe périodique Γ , il y a équivalence entre

- 1° $T(P)$ satisfait à la condition (2) et $\mathcal{C}(\Gamma)$ satisfait à la condition (2) ;
- 2° $T(P)$ est semi-modulaire et $\mathcal{C}(\Gamma)$ est semi-modulaire ;
- 3° Dans le cas où S contient plus d'un élément entre :

$T(P)$ est modulaire, $T(P)$ est distributif et Γ est réduit à son élément unité .

Tout d'abord e désignant un élément arbitraire de S , (e, Γ) est un sous-demi-groupe de $P = (S, \Gamma)$ isomorphe à Γ ; il en résulte que $\mathcal{C}(\Gamma)$ est isomorphe à un segment du treillis $T(P)$; tout segment d'un treillis satisfaisant à la condition (2) (resp. à la semi-modularité) satisfaisant lui-même à la condition (2) (resp. à la semi-modularité) il en résulte les implications de gauche à droite des équivalences 1° et 2°.

Considérons maintenant $T(P)$; tout sous-demi-groupe de P est une réunion de groupes dont l'ensemble des éléments unités forme un antisemigroupe ; tout sous-demi-groupe de P est donc produit direct d'un certain sous-demi-groupe A de S par un certain sous-demi-groupe H de Γ . Cette représentation est alors nécessairement unique si le sous-demi-groupe est non vide, l'ensemble vide ayant pour représentation $\emptyset \times H$, $\forall H \in T(\Gamma)$ et $A \times \emptyset$, $\forall A \in T(S)$. Si U et V sont deux éléments non vides de $T(P)$, $U = A_U \times H_U$ et $V = A_V \times H_V$, on a alors trivialement

$$(1) \quad U \cap V = (A_U \cap A_V) \times (H_U \cap H_V)$$

$$(2) \quad U \vee V = (A_U \cup A_V) \times (H_U \vee H_V)$$

et $U \subset V$ si et seulement si

$$\text{soit } 1^\circ \quad A_U \subseteq A_V ; \quad H_U \subset H_V ;$$

$$\text{soit } 2^\circ \quad A_U \subset A_V ; \quad H_U \subseteq H_V .$$

La formule (1) donne la représentation unique de $U \cap V$ si $U \cap V \neq \emptyset$ mais reste valable quels que soient U et V éléments de $T(P)$.

Supposons alors qu'il existe un sous-treillis de $T(P)$ isomorphe à \mathcal{C}_0 ; il en résulte que X , Y et Z sont non vides. Nous distinguerons deux cas :

1° $Y \cap Z \neq \emptyset$; on a alors :

$$A_Y \cap A_Z \subseteq A_X \subseteq A_Z \subseteq A_X \cup A_Y \quad ,$$

d'où, $T(S)$ étant distributif

$$A_X = A_X \cup (A_Y \cap A_Z) = (A_X \cup A_Y) \cap (A_X \cup A_Z) = (A_X \cup A_Y) \cap A_Z = A_Z \quad ;$$

dès lors on a

$$H_Y \cap H_Z \subseteq H_X \subseteq H_Z \subseteq H_X \vee H_Y \quad ;$$

on en déduit

$$H_Y \cap H_Z \neq H_X$$

car de l'égalité $H_Y \cap H_Z = H_X$ résulterait $H_X \subseteq H_Y$, d'où

$$H_X \vee H_Y = H_Y$$

et finalement

$$H_Z \subseteq H_Y \quad ,$$

en contradiction avec $H_Y \cap H_Z = H_X$; par dualité on voit qu'on a de même

$$H_Z \neq H_X \vee H_Y$$

d'où la relation

$$\emptyset \subset H_Y \cap H_Z \subset H_X \subset H_Z \subset H_X \vee H_Y \quad .$$

Il en résulte l'existence d'un sous-treillis de $\mathcal{C}(\Gamma)$ isomorphe à \mathcal{C}_0 . Si $\mathcal{C}(\Gamma)$ satisfait à la condition (2), il existe $K \in \mathcal{C}(\Gamma)$ tel que $H_Y \cap H_Z \subset K \subset H_Y$. Dès lors l'élément $T = (A_Y \cap A_Z) \times K$ de $T(P)$ satisfait à $Y \cap Z \subset T \subset Y$, ce qui démontre, dans ce premier cas, l'implication de droite à gauche de l'équivalence 1°. Si $\mathcal{C}(\Gamma)$ est semi-modulaire, il existe $K \in \mathcal{C}(\Gamma)$ tel que

$$H_Y \cap H_Z \subset K \subset H_Y$$

et tel que

$$H_X = (H_X \vee K) \cap H_Z \quad .$$

Dès lors l'élément

$$T = (A_Y \cap A_Z) \times K$$

de $T(P)$ satisfait à

$$Y \cap Z \subset T \subset Y$$

et à

$$(X \vee T) \cap Z = \{(A_X \cup (A_Y \cap A_Z)) \cap A_Z\} \times \{(H_X \vee K) \cap H_Z\} = A_X \times H_X = X$$

ce qui démontre dans ce premier cas l'implication de droite à gauche de l'équivalence 2°.

2° $Y \cap Z = \emptyset$; Y et Z étant non vides, H_Y et H_Z sont non vides, donc aussi $H_Y \cap H_Z$; dès lors $Y \cap Z = \emptyset$ entraîne $A_Y \cap A_Z = \emptyset$; en en déduit

$$A_Y \cap A_Z \subseteq A_X \subseteq A_Z \subseteq A_X \cup A_Y$$

donc

$$A_X = A_Z$$

et par suite

$$H_X \subset H_Z \subseteq H_X \vee H_Y \quad ;$$

il en résulte

$$H_Z \subseteq H_Z \vee H_Y$$

donc

$$H_Z \subseteq H_Y$$

et enfin

$$H_X \subset H_Y \quad .$$

Posant alors $T = A_Y \times H_X$, on a

$$Y \cap Z \subset T \subset Y$$

et

$$(X \vee T) \cap Z = \{(A_X \cup A_Y) \cap A_Z\} \times \{(H_X \vee H_X) \cap H_Z\} = A_Z \times H_X = A_X \times H_X = X \quad .$$

Sans faire aucune hypothèse sur $\mathcal{C}(\Gamma)$ on établit dans ce second cas l'implication de droite à gauche des équivalences 1° et 2°.

Démontrons la troisième équivalence. D'une part $T(P)$ distributif entraîne $T(P)$ modulaire et Γ réduit à son élément unité entraînant P isomorphe à S implique $T(P)$ distributif. D'autre part si Γ n'est pas réduit à son élément unité $T(P)$ n'est pas modulaire ; soient en effet e et f deux idempotents distincts de S , E le sous-demi-groupe de Γ constitué par l'élément unité de Γ ; considérons alors les trois éléments X , Y et Z de $T(P)$ définis par

$$X = \{e\} \times E, \quad Y = \{f\} \times \Gamma \quad \text{et} \quad Z = \{e\} \times \Gamma \quad ;$$

ils sont tels que

$$Y \cap Z = \emptyset \quad \text{et} \quad X \vee Y = \{e, f\} \times \Gamma \quad ;$$

il en résulte

$$Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$$

ce qui équivaut à l'existence d'un sous-treillis de $T(P)$ isomorphe à \mathcal{C}_0 : $T(P)$ n'est pas modulaire.

Nous avons alors les théorèmes fondamentaux :

THÉOREME 10. - Un demi-groupe D a le treillis $T(D)$ de ses sous-demi-groupes satisfaisant à la condition (2) (resp. à la semi-modularité) si et seulement si :

1° D satisfait aux ensembles de conditions équivalentes (I) ou (II) ;

2° Chaque groupe maximal Γ_e a le treillis $\mathcal{C}(\Gamma_e)$ de ses sous-groupes satisfaisant à la condition (2) (resp. à la semi-modularité).

Ces conditions sont nécessaires : la seconde car $T(P_i)$ satisfait pour tout i à la condition (2) (resp. à la semi-modularité).

Montrons qu'elles sont suffisantes. Soient X, Y et Z trois éléments de $T(\Phi_i)$ satisfaisant à $Y \cap Z \subset X \subset Z \subset X \vee Y$; posant

$$X' = X \cap P_i \quad ,$$

$$Y' = Y \cap P_i \quad ,$$

$$Z' = Z \cap P_i \quad ,$$

$$X'' = X - X' = X \cap (\Phi_i - P_i) \quad ,$$

$$Y'' = Y - Y'$$

et

$$Z'' = Z - Z'$$

il vient :

$$(Y \cap Z)' = Y' \cap Z' \quad ,$$

$$(Y \cap Z)'' = Y'' \cap Z'' \quad ,$$

$$(X \vee Y)' = \{X \cup Y \cup (X' \vee Y')\} \cap P_i = X' \vee Y'$$

et

$$(X \vee Y)'' = \{X \cup Y \cup (X' \vee Y')\} \cap (\Phi_i - P_i) = X'' \cup Y'' \quad .$$

On a alors

$$Y'' \cap Z'' \subseteq X'' \subseteq Z'' \subseteq X'' \cup Y''$$

d'où il résulte, compte tenu de la distributivité de $\mathcal{P}(\Phi_i - P_i)$ et selon un raisonnement déjà utilisé au théorème 9,

$$X'' = Z''$$

puis

$$Y' \cap Z' \subset X' \subset Z' \subset X' \vee Y' \quad .$$

Compte tenu de la condition 2°, $T(P_i)$ satisfait pour tout i à la condition (2) (resp. à la semi-modularité). Dans le premier cas on en déduit l'existence d'un élément T_i' de $T(P_i)$ tel que $Y' \cap Z' \subset T_i' \subset Y'$; posant alors :

$$T = T_i' \vee (Y \cap Z) = T_i' \cup (Y \cap Z) \cap \{T_i' \vee (Y' \cap Z')\} = T_i' \cup (Y \cap Z)$$

il vient

$$T' = \{T_i' \cup (Y \cap Z)\} \cap P_i = T_i' \cup (Y' \cap Z') = T_i' \quad , \quad T'' = Y'' = Y'' \cap Z''$$

d'où

$$Y' \cap Z' \subset T' \subset Y' \quad \text{et} \quad Y'' \cap Z'' = T'' \subseteq Y''$$

et par suite

$$Y \cap Z \subset T \subset Y$$

$T(\Phi_i)$ satisfait à la condition (2).

Dans le second cas il existe un élément T_i' qui satisfait de plus à :

$$X' = (X' \vee T_i') \cap Z' \quad ; \quad \text{il en résulte}$$

$$\begin{aligned} (X \vee T) \cap Z &= \{X \cup T \cup (X' \vee T')\} \cap Z = (X \cap Z) \cup (T \cap Z) \cup \{(X' \vee T') \cap Z\} \\ &= X \cup (T \cap Z) \cup \{(X' \vee T') \cap Z'\} = X \cup (T \cap Z) \cup X' \quad ; \end{aligned}$$

cependant on a

$$T \cap Z \subseteq Y \cap Z \subseteq X \quad \text{et} \quad X' \subseteq X$$

et par suite

$$(X \vee T) \cap Z = X$$

$T(\Phi_i)$ est semi-modulaire.

Le produit cardinal général de treillis satisfaisant à la condition (2) (resp. à la semi-modularité) satisfaisant lui-même à la condition (2) (resp. à la semi-modularité), compte tenu de la condition 5 de (I), $T(D)$ satisfait à la condition (2) (resp. à la semi-modularité).

THÉORÈME 11. - Un demi-groupe D a le treillis $T(D)$ de ses sous-demi-groupes modulaire (resp. distributif) si et seulement si :

- 1° D satisfait aux ensembles de conditions équivalents (I) ou (II) ;
- 2° Chaque groupe maximal Γ_e est de l'un des deux types suivants :
 - a. Γ_e a le treillis $\mathfrak{A}(\Gamma_e)$ de ses sous-groupes modulaire (resp. distributif) si e constitue à lui seul un antisemigroupe S_i de la décomposition de I ;
 - b. $\Gamma_e = \{e\}$ dans le cas contraire.

Ces conditions sont nécessaires : la seconde car $T(P_i)$ est pour tout i modulaire (resp. distributif).

Ces conditions sont suffisantes. Compte tenu de la condition 2°, $T(P_i)$ est, pour tout i , modulaire (resp. distributif).

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse $T(P_i)$ distributif. Considérons alors trois éléments X, Y et Z de $T(\Phi_i)$ et leur intersection X', Y' et Z' avec P_i . $T(P_i)$ étant distributif, on a

$$Z' \cap (Y' \vee X') = (Z' \cap Y') \vee (Z' \cap X')$$

et par suite :

$$\begin{aligned} Z \cap (Y \vee X) &= Z \cap \{Y \cup X \cup (Y' \vee X')\} = (Z \cap Y) \cup (Z \cap X) \cup \{Z \cap (Y' \vee X')\} \\ &= (Z \cap Y) \cup (Z \cap X) \cup \{Z' \cap (Y' \vee X')\} = (Z \cap Y) \cup (Z \cap X) \cup \{(Z' \cap Y') \vee (Z' \cap X')\} \\ &= (Z \cap Y \cup (Z \cap X)) \cup \{(Z \cap Y)' \vee (Z \cap X)'\} = (Z \cap Y) \vee (Z \cap X) \quad . \end{aligned}$$

$T(\Phi_i)$ est distributif.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse $T(P_i)$ modulaire et considérons trois éléments X, Y et Z de $T(\Phi_i)$ tels que $Z \supseteq X$. Leurs intersections X', Y' et Z' avec P_i sont telles que, $Z' \supseteq X'$; $T(P_i)$ étant modulaire, on a :

$$Z' \cap (Y' \vee X') = (Z' \cap Y') \vee (Z' \cap X') \quad ;$$

un raisonnement analogue à celui fait dans le cas distributif montre que

$$Z \cap (Y \vee X) = (Z \cap Y) \vee (Z \cap X) \quad .$$

$T(\Phi_i)$ est modulaire.

Le produit cardinal général de treillis modulaires (resp. distributifs) étant modulaire (resp. distributif), $T(D)$ est modulaire (resp. distributif).

Remarque 1. - Dans le cas modulaire et, par conséquent, dans le cas distributif, $T(D)$ est aussi le produit cardinal général des treillis $T(F_e)$ pour $e \in I$.

Soit en effet $a \in F_e, b \in F_f$ avec $e \neq f$. Si $\{e, f\}$ est un demi-treillis, on a $ab \in (a) \cup (b)$; si $\{e, f\}$ est un antisemigroupe, compte tenu du deuxième cas de la condition 2°, on a

$$\Gamma_e = \{e\} \text{ et } \Gamma_f = \{f\}$$

donc

$$[a] \vee [b] = \{e, f\}$$

et par suite

$$ab \in (a) \cup (b) \cup \{[a] \vee [b]\} = (a) \cup (b) \quad .$$

Dès lors $\forall A \in T(F_e)$ et $\forall B \in T(F_f)$ avec $e \neq f$, on a

$$A \vee B = A \cup B$$

d'où il résulte, par une démonstration analogue à celle faite au théorème 6, que $T(D)$ est le produit cardinal général des treillis $T(F_e)$ pour $e \in I$.

Remarque 2. - La condition nécessaire et suffisante, pour qu'un groupe G ait le treillis $\mathcal{C}(G)$ de ses sous-groupes distributif, étant qu'il soit localement cyclique, tout demi-groupe cyclique fini, dont la période commence à un rang inférieur ou égal à 5, a le treillis de ses sous-demi-groupes distributif : nous complétons ainsi la remarque consécutive au théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CLIFFORD (A. H.). - Bands of semigroups, Proc. Amer. math. Soc., t. 5, 1954, p. 499-504.
 - [2] DUBREIL-JACOTIN (M.-L.), LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. - Paris, Gauthier-Villars, 1953 (Cahiers scientifiques, 21).
 - [3] DUBREIL (Paul). - Demi-groupes d'endomorphismes, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, t. 14, 1960/61, n° 16.
 - [4] McLEAN (David). - Idempotent semigroups, Amer. math. Monthly, t. 61, 1954, p. 110-113.
 - [5] MILLER (D. D.) and CLIFFORD (A. H.). - Regular \mathcal{O} -classes in semigroups, Trans. Amer. math. Soc., T. 82, 1956, p. 270-280.
 - [6] SUZUKI (Michio). - Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups. - Berlin, Springer-Verlag, 1956 (Ergebnisse der Mathematik ... , Neue Folge, 10, Reihe : Gruppentheorie).
-