

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

GISÈLE VORS

**Neutrices ; application à la formule sommatoire d'Euler et
aux équations aux différences finies**

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 1 (1961-1962), exp. n° 9,
p. 1-20

http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_1_A6_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NEUTRICES ; APPLICATION À LA FORMULE SOMMATOIRE D'EULER
ET AUX ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES

par Mme Gisèle VORS

1. Définitions et propriétés.

On considère l'ensemble N' des fonctions réelles ou complexes $f(\xi)$ ayant pour domaine l'ensemble des réels. Une neutrice N est un sous-groupe additif de N' tel que $N \cap C = 0$ (C ensemble des fonctions constantes). Les fonctions $\nu(\xi)$, appartenant à la neutrice N , sont dites négligeables.

Remarque. - Si $\gamma \equiv \gamma_1 \pmod{N}$, alors $\gamma = \gamma_1$ puisque $N \cap C = 0$.

Par conséquent, si $g(\xi) \in N'$, et si $g(\xi) \equiv \gamma \pmod{N}$, alors cette constante γ est définie de façon unique. En effet, si

$$\left\{ \begin{array}{l} g(\xi) \equiv \gamma \pmod{N} \\ \text{et} \\ g(\xi) \equiv \gamma_1 \pmod{N} \end{array} \right. ,$$

alors $\gamma \equiv \gamma_1 \pmod{N}$ et, d'après la remarque précédente, $\gamma = \gamma_1$. On en déduit la définition suivante :

On appelle valeur neutralisée le représentant unique dans l'ensemble des complexes du groupe quotient de N' par la neutrice N . Cette valeur neutralisée se note $g(N)$.

Exemple. - Toutes les fonctions qui peuvent être écrites sous la forme $p(\xi) + o(1)$, où $p(\xi)$ représente un polynôme en ξ sans terme constant, et où $o(1)$ représente une fonction de ξ , définie pour $\xi > 1$, qui tend vers zéro pour $\xi \rightarrow \infty$, forment une neutrice ayant pour domaine $1 < \xi < \infty$. En effet si $p(\xi) + o(1) = \gamma$ ($1 < \xi < \infty$) où γ est indépendant de ξ , alors tous les coefficients figurant dans $p(\xi)$, ainsi que le terme constant γ , sont égaux à zéro, de telle sorte que N satisfait à la condition des neutrices. Comme

$\int_1^\xi x \, dx = \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{2}$, où $\frac{1}{2} \xi^2$ est négligeable dans N , on peut écrire

$$\int_1^N x \, dx = -\frac{1}{2} .$$

D'autre part, $\int_1^N \frac{dx}{d}$ ne convient pas puisque $\int_1^\xi \frac{dx}{x} = \log \xi$ ne peut être écrit comme une constante plus une fonction négligeable dans N .

Ceci signifie que la neutrice N est trop faible pour englober des intégrales de cette forme. Dans de tels cas, nous élargirons notre neutrice.

En d'autres termes, nous essaierons de construire une neutrice E telle que chaque fonction négligeable dans N soit certainement négligeable dans E , et que l'intégrale précédente obtienne une valeur quand on remplace N par E .

Par exemple, la neutrice E , formée par les fonctions de la forme $p(\xi) + c \log \xi + o(1)$, où les coefficients c sont des constantes complexes arbitraires, possède la propriété requise.

Le fait que E satisfait à la condition des neutrices est clair, car si $p(\xi) + c \log \xi + o(1) = \gamma$ ($1 < \xi < \infty$) où γ est indépendant de ξ , alors tous les coefficients dans $p(\xi)$, ainsi que les coefficients c et γ , sont égaux à zéro.

La neutrice E a la propriété que $\int_1^E \frac{dx}{x} = 0$ puisque la fonction $\log \xi$ est négligeable dans E . Nous allons voir comment, en général, une telle extension est possible.

Définition. - Considérons un ensemble totalement ordonné de neutrices $N_h : N_h < N_{h+1}$. La réunion de ces neutrices est elle-même une neutrice. En effet si une fonction $\nu(\xi)$ appartient à la réunion U et est égale à une constante, alors $\nu(\xi)$ est négligeable dans au moins une neutrice N_h de telle sorte que $\gamma = 0$ d'après la condition des neutrices imposée à la neutrice N_h .

PROPRIÉTÉ 1. - Soit un ensemble totalement ordonné de neutrices N_h , $N_h < N_{h+1}$; si $f_h(\xi) \in N'$ a dans N_h une valeur neutralisée, alors $f_h(\xi)$ a dans U la même valeur neutralisée.

Démonstration. - Pour chaque élément ξ de N' , on a

$$f_h(\xi) = \gamma_h + \nu_h(\xi)$$

où $\gamma_h = f_h(N_h)$ et où $\nu_h(\xi)$ est négligeable dans U de telle sorte que $f_h(\xi)$ a dans U , la valeur neutralisée γ_h .

PROPRIÉTÉ 2. - On demande à N d'être maintenant un espace vectoriel sur l'ensemble Q des nombres rationnels.

Pour chaque fonction $f(\xi) \in N'$, il est possible de trouver une neutrice M avec les propriétés suivantes :

- 1° $f(\xi)$ a dans M une valeur neutralisée ;
- 2° $N < M$;
- 3° M est un espace vectoriel sur Q .

Démonstration. - Si $f(\xi)$ a dans N une valeur neutralisée, alors $M = N$ a la propriété cherchée. Si $f(\xi)$ n'a pas dans N de valeur neutralisée, alors on choisit pour M la suite formée par les fonctions de la forme

$$\mu(\xi) = \rho[f(\xi) - \gamma_0] + \nu(\xi) \quad ,$$

où γ_0 est une constante donnée, où les coefficients ρ sont des constantes arbitraires rationnelles et où les termes $\nu(\xi)$ représentent des fonctions arbitraires négligeables dans N .

En effet, si $\mu(\xi) = \gamma$, où γ est constante, alors $\rho = 0$, sinon,

$$f(\xi) = -\frac{\nu(\xi)}{\rho} + \gamma_0 + \frac{\gamma}{\rho}$$

aurait dans N la valeur neutralisée $\gamma_0 + \frac{\gamma}{\rho}$, contrairement aux hypothèses ; $\rho = 0$ implique $\nu(\xi) = \gamma$, alors $\gamma = 0$.

En choisissant $\rho = 1$ et $\nu(\xi) = 0$, on voit que $f(\xi) - \gamma_0$ est négligeable dans M de telle sorte que $f(\xi)$ a dans M la valeur neutralisée γ_0 .

En choisissant $\rho = 0$, on voit que chaque fonction $\mu(\xi)$, négligeable dans N , est aussi négligeable dans M .

PROPRIÉTÉ 3. - Soit N une neutrice qui est un espace vectoriel sur Q .

Si les fonctions $f_h(\xi)$ ($h = 0, 1, 2, \dots$) $\in N'$, il est alors possible de trouver une neutrice U , ayant pour domaine N' , telle que chaque fonction négligeable en N soit négligeable en U , et que chaque fonction $f_h(\xi)$ ait dans U une valeur neutralisée.

Démonstration. - D'après la propriété précédente, nous pouvons construire une neutrice N_0 telle que $N < N_0$ et que $f_0(\xi)$ ait dans N_0 une valeur neutralisée. N_0 est un espace vectoriel sur Q .

De même, on peut construire N_1 telle que $N < N_0 < N_1$ et telle que $f_1(\xi)$

ait dans N_1 une valeur neutralisée, et ainsi de suite. On a

$$N < N_0 < N_1 < \dots < N_h < N_{h+1} \quad .$$

La réunion U de ces neutrices possède, d'après la propriété 1, la propriété requise.

2. Neutrices intégrales.

Soit $a < b$; a peut être $-\infty$, b peut être $+\infty$.

On dit qu'une fonction est intégrable de a_+ à b si elle est intégrable de α à b pour chaque α pris entre a et b . On dit qu'une fonction est intégrable de a à b_- si elle est intégrable de a à β pour chaque β pris entre a et b . On dit qu'une fonction est intégrable de a_+ à b_- , si elle est intégrable de α à β pour 2 points quelconques $a < \alpha < \beta < b$.

Une neutrice intégrale I_{a+} , avec pour domaine $a < \xi < b$, est une neutrice ayant les 2 propriétés suivantes :

1° pour chaque $g(x)$ intégrable de a à b_- , la fonction $\int_a^\xi g(x) dx$ est négligeable dans I_{a+} ;

2° I_{a+} est un espace vectoriel sur \mathbb{Q} .

L'existence de telles neutrices se déduit du théorème suivant

THÉOREME. - Soit N une neutrice avec pour domaine $a < \xi < b$, ayant les 2 propriétés suivantes :

(1) Chaque fonction, définie dans $a < \xi < b$ et tendant vers zéro quand ξ tend vers a , est négligeable dans N ;

(2) N est un espace vectoriel sur \mathbb{Q} .

N est une neutrice intégrale I_{a+} .

Démonstration. - L'intégrale $\int_a^\xi g(x) dx$ tend vers zéro quand $\xi \rightarrow a$, et est alors négligeable dans N .

Soit I_{a+} une neutrice intégrale arbitraire ayant pour domaine $a < \xi < b$.
Soit $\beta \geq b$.

Nous disons qu'une fonction intégrable de a_+ à β est intégrable de I_{a+} à β si la fonction

$$\int_\xi^b f(x) dx \quad (a < \xi < b)$$

a dans I_{a+} une valeur neutralisée. Cette valeur neutralisée est désignée par la notation

$$\int_{I_{a+}}^{\beta} f(x) dx \quad .$$

THÉORÈME. - Si I_{a+} est une neutrice intégrale ayant pour domaine $a < \xi < b$, et si $f(x)$ est intégrable de a à β où $\beta \geq b$, alors $f(x)$ est certainement intégrable de I_{a+} à β , et on a

$$\int_{I_{a+}}^{\beta} f(x) dx = \int_a^{\beta} f(x) dx \quad .$$

Démonstration. - Par définition l'intégrale

$$\int_a^{\xi} f(x) dx$$

est négligeable dans I_{a+} ; ainsi

$$\int_{\xi}^{\beta} f(x) dx = \int_a^{\beta} f(x) dx - \int_a^{\xi} f(x) dx$$

a une valeur neutralisée dans I_{a+} qui est égale au premier terme du deuxième membre.

THÉORÈME. - Soit $a < b$. Si une infinité de fonctions $f_h(x)$ ($h = 1, 2, \dots$) sont intégrables de $a+$ à b , alors il existe une neutrice intégrale I_{a+} ayant pour domaine $a < \xi < b$ telle que chacune de ces fonctions $f_h(x)$ ($h = 1, 2, \dots$) est intégrable de I_{a+} à b .

Démonstration. - Soit I_{a+}^* une neutrice intégrale arbitraire. D'après la propriété 3, il existe une neutrice U telle que chaque fonction négligeable dans I_{a+}^* est négligeable dans U et que chaque fonction

$$\int_{\xi}^b f_h(x) dx \quad (a < \xi < b) \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

a dans U une valeur neutralisée. U est une neutrice intégrale I_{a+} avec la propriété requise. En effet, si $g(x)$ est intégrable de a à $b-$, alors $\int_a^{\xi} g(x) dx$ est négligeable dans I_{a+}^* donc certainement dans U .

Définition. - Une neutrice intégrale I_{b-} ayant pour domaine $a < \xi < b$ est une neutrice avec les 2 propriétés suivantes

1° pour chaque fonction $g(x)$ intégrable de $a+$ à b , la fonction $\int_{\xi}^b g(x) dx$ est négligeable dans I_{b-} ;

2° I_{b-} est un espace vectoriel sur \mathbb{Q} .

Supposons $\alpha \leq a$. Nous disons qu'une fonction intégrable de α à $b-$ est intégrable de α à I_{b-} si la fonction $\int_{\alpha}^{\xi} f(x) dx$ a dans I_{b-} une valeur neutralisée.

Cette valeur est notée par $\int_{\alpha}^{I_{b-}} f(x) dx$.

Les intégrales avec limite I_{b-} , ont des propriétés analogues aux intégrales avec I_{a+} .

3. Formule sommatoire d'Euler.

Si $f(x)$ est m fois continuellement différentiable dans l'intervalle $a \leq x \leq b$, alors

$$\begin{aligned} & \sum_{a < n < b} f(n) - \int_a^b f(x) dx \\ &= \Lambda_m(b-, f) - \Lambda_m(a+, f) + (-1)^{m-1} \int_a^b f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx \quad , \end{aligned}$$

où

$$\Lambda_m(x, f) = \sum_{h=0}^{m-1} (-1)^{h+1} f^{(h)}(x) \varphi_{h+1}(x)$$

où $\varphi_1(x)$ est une fonction périodique de x , ayant pour période 1 qui est égale à $x - 1/2$ dans l'intervalle $0 < x < 1$, et égale à zéro pour $x = 0$.

$\varphi_{h+1}(x)$ ($h \geq 1$) est l'intégrale de $\varphi_h(x)$ uniquement définie par la condition

$$\int_0^1 \varphi_{h+1}(x) dx = 0 \quad .$$

Les fonctions $\varphi_{h+1}(x)$ sont des fonctions périodiques de x , de période 1. Pour $h = 0$, cela découle de la définition ; si $h \geq 1$ et si $\varphi_h(x)$ a pour période 1, alors

$$\varphi_{h+1}(x+1) - \varphi_h(x) = \int_x^{x+1} \varphi_h(t) dt = \int_0^1 \varphi_h(t) dt = 0 \quad ,$$

ainsi $\varphi_{h+1}(x)$ a aussi pour période 1. Les fonctions périodiques $h!$ $\varphi_h(x)$ sont appelées fonctions de Bernoulli.

Démonstration. - L'intégration par parties, répétée, donne

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(x) \varphi_1'(x) dx \\ &= \sum_{a < n < b} f(n) - \int_a^b f'(x) \varphi_1(x) dx + f(b) \varphi_1(b-) - f(a) \varphi_1(a+) \\ &= \sum_{a < n < b} f(n) - \Lambda_m(b-, f) + \Lambda_m(a+, f) - (-1)^{m-1} \int_a^b f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx, \end{aligned}$$

ce qui donne la formule sommatoire d'Euler.

4. Neutrices périodiques.

Définition. - On considère les fonctions $f(x)$, définies pour x positif suffisamment grand, qui ont la propriété suivante : il existe une constante positive m telle que $f(x)$ soit m fois continuellement différentiable, que $f^{(m)}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$ et que $f^{(m)}(x)$ soit absolument intégrable à l'infini.

Une neutrice périodique P ayant pour domaine $\alpha < \xi < \infty$ est la classe formée par toutes les fonctions $v(\xi)$, définies dans l'intervalle $\alpha < \xi < \infty$, qui peuvent être écrites sous la forme

$$v(\xi) = \sum_{h=0}^{n-1} s_h(\xi) p_h(\xi) + o(1) \quad (\alpha < \xi < \infty),$$

où $o(1)$ désigne une fonction de ξ qui tend vers zéro quand $\xi \rightarrow \infty$, où n désigne une constante entière ≥ 0 , où $s_h(\xi)$ ($h = 0, 1, \dots, n-1$) désigne une fonction ayant la propriété précédente et enfin où $p_h(\xi)$ ($h = 0, 1, \dots, n-1$) désigne des fonctions périodiques, bornées, intégrables, de période 1 et avec

$$\int_0^1 p_h(x) dx = 0.$$

THÉORÈME. - Si $a \leq \alpha$, si I_{a+} est une neutrice intégrale et si la fonction $f(x)$, ayant la propriété précédente, est définie pour $x > a$ et intégrable de I_{a+} à l'infini, alors

$$r(I_{a+}, \xi, f) = \sum_{a < n < \xi} f(n) - \int_{I_{a+}}^{\xi} f(x) dx$$

est une fonction de $\xi > a$ qui a une valeur neutralisée dans la neutrice périodique P ayant pour domaine $\alpha < \xi < \infty$. Cette valeur neutralisée est appelée le résidu $r(I_{a+}, P, f)$ à I_{a+} de $f(x)$ avec la neutrice P .

Dans le cas particulier où $f(x)$ est intégrable de a à $+\infty$, alors r est indépendant du choix de la neutrice I_{a+} , et on note $r(I_{a+}, \xi, f)$ et $r(I_{a+}, P, f)$ simplement par $r(a, \xi, f)$ et $r(a, P, f)$.

Chaque entier positif m , tel que $f^{(m)}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$ et avec la propriété que $f^{(m)}(x)$ est absolument intégrable à l'infini, satisfait, pour chaque ξ suffisamment grand, à la relation

$$(1) \quad r(I_{a+}, P, f) \\ = r(I_{a+}, \xi, f) - \Lambda_m(\xi, f) + (-1)^{m-1} \int_{\xi}^{\infty} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx \quad .$$

Démonstration. - Choisissons $\alpha \geq a$ de telle façon que $f(x)$ soit m fois continuellement différentiable pour $x > \alpha$. Si $\alpha \leq \xi^* \leq \xi$, alors

$$r(I_{a+}, \xi, f) - r(I_{a+}, \xi^*, f) = \sum_{\xi^* \leq n < \xi} f(n) - \int_{\xi^*}^{\xi} f(x) dx \quad .$$

La formule sommatoire d'Euler permet d'écrire :

$$r(I_{a+}, \xi, f) - r(I_{a+}, \xi^*, f) \\ = \Lambda_m(\xi, f) - \Lambda_m(\xi^*, f) + (-1)^{m-1} \int_{\xi^*}^{\xi} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx \quad .$$

En intervertissant ξ et ξ^* , on voit que la formule est aussi vraie si $\alpha \leq \xi \leq \xi^*$. L'intégrale précédente est intégrable à l'infini de telle façon que

$$r(I_{a+}, \xi, f) = r(I_{a+}, \xi^*, f) - \Lambda_m(\xi^*, f) + (-1)^{m-1} \int_{\xi^*}^{\infty} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx \\ + \Lambda_m(\xi, f) - (-1)^{m-1} \int_{\xi}^{\infty} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx \quad .$$

Le dernier terme tend vers zéro quand $\xi \rightarrow \infty$. Chaque terme de la somme $\Lambda_m(\xi, f)$ a la forme $s(\xi) p(\xi)$, où $s(\xi)$ est telle que $s^{(m)}(\xi) \rightarrow 0$ quand $\xi \rightarrow \infty$ et où $p(\xi)$ est périodique, de période 1, bornée et intégrable avec $\int_0^1 p(x) dx = 0$.

En conséquence $r(I_{a+}, P, f)$ existe et est égale à la somme des trois premiers termes du second membre de l'équation précédente.

Remarque.

$$(2) \quad r(I_{a+}, P, f) = \sum_{n>a} f(n) - \int_{I_{a+}}^{\infty} f(x) dx, \quad ,$$

si la somme et l'intégrale du deuxième membre convergent ensemble.

En effet, la différence entre les premiers membres de (1) et (2) tend vers zéro quand $\xi \rightarrow \infty$ et, par conséquent, est négligeable dans P .

THÉORÈME de translation. - Si u est un entier et si $r(I_{a+u}, P, f(x-u))$ existe, alors $r(I_{a+}, P, f(x))$ existe et a la même valeur.

Démonstration. - Pour chaque $\eta > a + u$, nous avons

$$\begin{aligned} r(I_{a+u}, \eta, f(x-u)) &= \sum_{a+u < n < \eta} f(n-u) - \int_{I_{a+u}}^{\eta} f(x-u) dx \\ &= \sum_{a < n < \eta-u} f(n) - \int_{I_{a+}}^{\eta-u} f(x) dx \\ &= r(I_{a+}, \eta-u, f(x)) \quad . \end{aligned}$$

Par hypothèse,

$$r(I_{a+u}, \eta, f(x-u)) = \gamma + \nu(\eta)$$

où $\gamma = r(I_{a+u}, P, f(x-u))$ et où $\nu(\eta)$ est négligeable dans P . Par conséquent, pour $\xi > a$,

$$r(I_{a+}, \xi, f(x)) = \gamma + \nu(\xi+u) \quad .$$

Si $s(x)$ est telle que $s^{(m)}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$, il en est de même de $s(x+u)$. De la définition de la neutrice périodique P , il s'ensuit que $\nu(\xi+u)$ est, pour chaque choix de l'entier u , négligeable dans P .

La formule précédente montre alors que $r(I_{a+}, P, f(x))$ existe et est égale à γ .

La neutrice périodique $(-P)$.

Définition. - Si $f(x)$ est telle que $f^{(m)}(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \infty$, il en est de

même de $f(-x)$.

Si P est une neutrice périodique ayant pour domaine $\alpha < \xi < \infty$, alors les fonctions $f(x)$, définies pour $x > \alpha$ et appartenant à P , ont la propriété que les fonctions $f(-x)$ forment une neutrice ayant pour domaine $-\infty < \eta < -\alpha$. Cette neutrice est appelée la neutrice périodique $-P$ avec pour domaine $-\infty < \eta < -\alpha$. On a de même

THÉOREME. — Si $\beta \leq b$, si la fonction $f(x)$ définie pour $-\infty < x < b$ et telle que $f^{(m)}(x) \rightarrow 0$, si $x \rightarrow -\infty$ et est intégrable de $-\infty$ à la neutrice intégrale I_{b-} , alors

$$r(I_{b-}, \xi, f) = \sum_{\xi < n < b} f(n) - \int_{\xi}^{I_{b-}} f(x) dx$$

est une fonction de $\xi < b$ qui a une valeur neutralisée dans la neutrice $-P$. Chaque entier positif m tel que $f^{(m)}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$ et que $f^{(m)}(x)$ soit absolument intégrable à $-\infty$ satisfait, pour chaque $\xi < 0$ suffisamment grand, à la relation

$$r(I_{b-}, -P, f) = r(I_{b-}, \xi, f) + \Lambda_m(\xi, f) + (-1)^{m-1} \int_{-\infty}^{\xi} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx.$$

De même

THÉOREME de translation. — Si u est un entier et si $r(I_{u-b+}, P, f(u-x))$ existe, alors $r(I_{b-}, -P, f(x))$ existe et a la même valeur.

5. Neutrices asymptotiques.

Définition. Soit Ω une suite non bornée du plan complexe. On veut déterminer, pour les éléments ω de Ω avec $|\omega|$ grand, le développement asymptotique de certaines fonctions de ω .

a et b sont dits asymptotiquement égaux, et on écrit $a \sim b$, si, pour chaque réel q fixé, ils satisfont à la relation $a - b = O(|\omega|^{-q})$.

Ceci signifie que pour chaque réel fixé q , il est possible de trouver deux nombres fixés c et γ tels que, pour chaque point ω de Ω avec $|\omega| \geq \gamma$, les nombres a et b soient définis et satisfassent à l'inégalité

$$|a - b| \leq c|\omega|^{-q}.$$

Définition. - Soit $N(\omega)$ un groupe additif formé de fonctions $\nu(\xi) \in N'$. Ce groupe est appelé une neutrice asymptotique quand il satisfait à la condition suivante.

Condition de neutrice asymptotique. - Si $\gamma(\omega)$ est indépendant de ξ et si pour chaque nombre réel q , il est possible de trouver dans le groupe additif des fonctions $\nu(\xi)$ telles que la relation $\nu(\xi, \omega) = \gamma(\omega) + O|\omega|^{-q}$ ait lieu pour chaque ξ , uniformément en ξ , alors $\gamma(\omega) \sim 0$.

Exemple. - Soit s un nombre fixé $\neq 0$. Si $\omega \geq 1$, alors les fonctions $c \xi s^{-1} e^{-\omega}$, où les coefficients c sont des entiers fixés, forment une neutrice asymptotique, ayant pour domaine $1 < \xi < 2$. En effet, si un nombre γ qui peut dépendre de ω ou de s , mais non de ξ et de q , a la propriété que, pour chaque nombre réel q , il est possible de trouver un nombre c qui peut dépendre de s et de q , mais non de ω et ξ , tel que

$$\gamma(s, \omega) = c(s, q) \xi s^{-1} e^{-\omega} + O|\omega|^{-q} \quad (1 < \xi < 2) \quad ,$$

alors $\gamma = O|\omega|^{-q}$, donc $\gamma \sim 0$.

En effet, la relation précédente peut s'écrire

$$\frac{\gamma(s, \omega)}{|\omega|^{-q}} = \frac{c(s, q) \xi s^{-1} e^{-\omega}}{|\omega|^{-q}} + \frac{O|\omega|^{-q}}{|\omega|^{-q}} \quad ,$$

et les 2 termes du 2e membre ont une valeur bornée d'après les hypothèses précédentes ; donc $\gamma(s, \omega) = O|\omega|^{-q}$ ou $\gamma \sim 0$.

Définition. - Soit $g(\xi) \in N'$.

Si γ , indépendant de ξ , a la propriété que, pour chaque nombre réel q , il est possible de trouver une fonction $\nu(\xi)$ négligeable dans N tel que la relation

$$g(\xi, \omega) = \gamma(\omega) + \nu(\xi, \omega) + O|\omega|^{-q} \quad .$$

ait lieu pour chaque ξ , uniformément en ξ , alors le développement asymptotique de $\gamma(\omega)$ est défini de façon unique.

En effet, nous pouvons écrire $g(\xi)$ sous la forme

$$g(\xi, \omega) = \gamma_1(\omega) + \nu_1(\xi, \omega) + O|\omega|^{-q} \quad ,$$

où $\gamma_1(\omega)$ est indépendant de ξ et q , et où $\nu_1(\xi, \omega)$ est négligeable dans N , alors

$$\gamma - \gamma_1 = \nu_1(\xi) - \nu(\xi) + O|\omega|^{-q}$$

où $\nu_1(\xi, \omega) - \nu(\xi, \omega)$ est négligeable dans N de telle sorte que $\gamma(\omega) - \gamma_1(\omega) \sim 0$ suivant la condition de neutrice satisfaite dans N .

On dit que $\gamma(\omega)$ est la valeur asymptotique neutralisée que $g(\xi, \omega)$ a dans la neutrice asymptotique N . Cette valeur se note $g(N_\omega)$.

La neutrice asymptotique périodique Q . - Soit $\alpha < \beta$, α peut être $-\infty$, et β peut être $+\infty$. On considère les fonctions asymptotiquement "smooth" dans $\alpha < x < \beta$, qui, dans cet intervalle, sont infiniment différentiables, qui, pour les grandes valeurs de ω , ont des dérivées $f^{(m)}(x)$ qui tendent, uniformément en x ($\alpha < x < \beta$), asymptotiquement vers zéro quand $m \rightarrow \infty$ et si finalement $\int_\alpha^\beta |f^{(m)}(x)| dx$ tend asymptotiquement vers zéro quand $m \rightarrow \infty$.

Supposons que $\beta - \alpha \rightarrow \infty$ quand $|\omega| \rightarrow \infty$.

La neutrice périodique Q ayant pour domaine $\alpha < \xi < \beta$ est la classe formée par les fonctions $\pi(\xi)$ ($\alpha < \xi < \beta$) qui, pour chaque nombre réel q fixé, satisfait une autre relation de la forme

$$\pi(\xi) = \sum_{h=0}^{n-1} s_h(\xi) p_h(\xi) + O|\omega|^{-q},$$

uniformément en ξ ($\alpha < \xi < \beta$) où n est indépendant de ω et ξ , où les fonctions $s_h(\xi)$ ($h = 0, 1, \dots, n-1$) sont asymptotiquement "smooth" pour $\alpha < \xi < \beta$ et où les fonctions $p_h(\xi)$ ($h = 0, 1, \dots, n-1$) sont périodiques, bornées, intégrales de période 1 et $\int_0^1 p_h(x) dx = 0$.

THÉORÈME. - Si $a \leq \alpha < \beta$ ou $\beta - \alpha \rightarrow \infty$ comme $|\omega| \rightarrow \infty$, si $f(x)$, définie pour $a < x < \beta$, est intégrable à partir d'une neutrice intégrale I_{a+} à β et si $f(x)$ est asymptotiquement "smooth" dans $\alpha < x < \beta$, alors

$$r(I_{a+}, \xi, f) = \sum_{a < n < \xi} f(n) - \int_{I_{a+}}^{\xi} f(x) dx$$

est une fonction de ξ ($\alpha < \xi < \beta$) qui a la valeur neutralisée pour la neutrice asymptotique périodique Q avec pour domaine $\alpha < \xi < \beta$.

La valeur neutralisée est appelée résidu $r(I_{a+}, Q, f)$ de I_{a+} à f avec

la neutrice Q et possède uniformément en ξ ($\alpha < \xi < \beta$) le développement asymptotique de la série asymptotiquement convergente

$$\Lambda_{\infty}(\xi, f) \sim \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^{h+1} f^{(h)}(\xi) \varphi_{h+1}(\xi) \quad .$$

Dans le cas spécial où $f(x)$ est intégrable de a à β , alors $r(I_{a+}, \xi, f)$ et $r(I_{a+}, Q, f)$ sont indépendants du choix de la neutrice intégrale I_{a+} et sont notés simplement par $r(a, \xi, f)$ et $r(a, Q, f)$.

Démonstration. - La formule d'Euler donne :

$$\begin{aligned} r(I_{a+}, \xi, f) - r(I_{a+}, \xi^*, f) \\ = \Lambda_m(\xi, f) - \Lambda_m(\xi^*, f) + (-1)^{m-1} \int_{\xi^*}^{\xi} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx \end{aligned}$$

pour 2 points ξ et ξ^* pris dans l'intervalle $\alpha < x < \beta$. Si q est un nombre réel fixé, alors on a pour les valeurs de m suffisamment grandes

$$\int_{\xi^*}^{\xi} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx = O|\omega|^{-q}$$

et

$$\Lambda_m(\xi^*, f) = \Lambda_{\infty}(\xi^*, f) + O|\omega|^{-q}$$

de telle sorte que

$$r(I_{a+}, \xi, f) = r(I_{a+}, \xi^*, f) - \Lambda_{\infty}(\xi^*, f) + \Lambda_m(\xi, f) + O|\omega|^{-q} \quad .$$

Chaque terme de la somme $\Lambda_m(\xi, f)$ est de la forme $s(\xi) p(\xi)$ où $s(\xi)$ est asymptotiquement "smooth" dans $\alpha < \xi < \beta$ et où $p(\xi)$ est périodique, bornée, intégrable, avec $\int_0^1 p(x) dx = 0$.

En conséquence, chaque terme figurant dans la somme $\Lambda_m(\xi, f)$ est négligeable dans Q de telle sorte que $r(I_{a+}, Q, f)$ existe et est asymptotiquement égale à la somme des deux premiers termes du second membre.

THÉORÈME. - Si les conditions du théorème précédent sont satisfaites, et si la fonction $f(\xi)$ et chacune de ses dérivées tendent vers zéro comme $\xi < \beta$ tend vers β , alors

$$r(I_{a+}, Q, f) \sim \lim_{\xi \rightarrow \beta} r(I_{a+}, \xi, f)$$

pourvu que la limite écrite au second membre existe.

Démonstration. - On a

$$r(I_{a+}, Q, f) \sim r(I_{a+}, \xi, f) - \Lambda_{\infty}(\xi, f) \quad .$$

Il existe, pour chaque réel q fixé, un entier positif m indépendant de ω et ξ tel que, dans l'intervalle $\alpha < \xi < \beta$ uniformément en ξ ,

$$r(I_{a+}, Q, f) = r(I_{a+}, \xi, f) - \Lambda_{\infty}(\xi, f) + O|\omega|^{-q} \quad .$$

Comme $\xi \rightarrow \beta$, chaque terme dans la somme $\Lambda_m(\xi, f)$ tend par hypothèse vers zéro de telle sorte que

$$r(I_{a+}, Q, f) = \lim_{\xi \rightarrow \beta} r(I_{a+}, \xi, f) + O|\omega|^{-q} \quad .$$

THÉORÈME. - Supposons $a < \alpha$ et $f(x)$, définie pour $x > a$, intégrable d'une neutrice intégrale I_{a+} à l'infini. Si $f(x)$ est asymptotiquement "smooth" dans l'intervalle $\alpha < x < \infty$ et si, pour chaque valeur de m fixé, suffisamment grande, $f^{(m)}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$, alors $r(I_{a+}, Q, f)$ et $r(I_{a+}, P, f)$ existent et

$$r(I_{a+}, Q, f) \sim r(I_{a+}, P, f)$$

où Q est la neutrice périodique asymptotique avec pour domaine $\alpha < \xi < \infty$.

Ce théorème relie les résidus avec la neutrice Q et les résidus avec la neutrice P .

Démonstration. - On avait

$$r(I_{a+}, P, f) = r(I_{a+}, \xi, f) - \Lambda_m(\xi, f) + (-1)^{m-1} \int_{\xi}^{\infty} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx \quad .$$

En utilisant le fait que, pour $\xi > \alpha$, le dernier terme tend asymptotiquement vers zéro quand m tend vers l'infini, nous obtenons

$$r(I_{a+}, P, f) \sim r(I_{a+}, \xi, f) - \Lambda_{\infty}(\xi, f)$$

et dans le théorème précédent, nous avons le même développement asymptotique pour $r(I_{a+}, Q, f)$.

On obtient des résultats analogues avec la neutrice I_{b-} .

THÉORÈME. - Si $\alpha < \beta \leq b$, où $\beta - \alpha \rightarrow \infty$ quand $|\omega| \rightarrow \infty$, si $f(x)$ ($\alpha < x < b$) est intégrable de α à une neutrice intégrale I_{b-} , et si $f(x)$ est asymptotiquement "smooth" dans $\alpha < x < \beta$, alors

$$r(I_{b-}, \xi, f) = \sum_{\xi < n < b} f(n) - \int_{\xi}^{I_{b-}} f(x) dx$$

est une fonction de ξ ($\alpha < \xi < \beta$) qui a la valeur neutralisée $r(I_{b-}, \xi, f)$ dans la neutrice périodique Q avec pour domaine $\alpha < \xi < \beta$.

Ce résidu possède, uniformément en ξ ($\alpha < \xi < \beta$) l'expression asymptotique

$$r(I_{b-}, Q, f) \sim r(I_{b-}, \xi, f) - \Lambda_{\infty}(\xi, f) \quad .$$

Si $f(x)$ est intégrale de α à b , alors nous pouvons écrire $r(b, \xi, f)$ et $r(b, Q, f)$ au lieu de $r(I_{b-}, \xi, f)$ et $r(I_{b-}, Q, f)$.

THÉORÈME. - Si les conditions du théorème précédent sont satisfaites, et si $f(x)$ et chacune de ses dérivées tendent vers zéro lorsque $x > \alpha$ tend vers α , alors

$$r(I_{b-}, Q, f) \sim \lim_{\xi \rightarrow \alpha} r(I_{b-}, \xi, f)$$

pourvu que la limite du 2e membre existe.

THÉORÈME. - Soit $\beta < b$. Supposons que $f(x)$ est intégrable de $-\infty$ à une neutrice intégrale I_{b-} . Si $f(x)$ est asymptotiquement "smooth" dans l'intervalle $-\infty < x < \beta$ et si, pour chaque valeur de m suffisamment grande, $f^{(m)}(x)$ tend vers zéro lorsque $x \rightarrow -\infty$, alors $r(I_{b-}, Q, f)$ et $r(I_{b-}, -P, f)$ existent, et l'on a

$$r(I_{b-}, Q, f) \sim r(I_{b-}, -P, f)$$

où Q est la neutrice périodique asymptotique ayant pour domaine $-\infty < \xi < \beta$.

6. Formule sommatoire d'Euler neutralisée.

Soit

$$a \leq \alpha \leq \beta \leq \alpha^* \leq \beta^* \leq b$$

où $\beta - \alpha$ et $\beta^* - \alpha^*$ tendent vers l'infini quand $|\omega| \rightarrow \infty$. Soient Q et Q^* les neutrices périodiques asymptotiques avec domaines respectifs $\alpha < x < \beta$ et

$\alpha^* < x < \beta^*$. Si $f(x)$ est intégrable à partir d'une neutrice intégrale I_{a+} à une neutrice intégrale I_{b-} , et si $f(x)$ est asymptotiquement "smooth" dans l'intervalle $\alpha < x < \beta^*$, alors

$$\sum_{a < n < b} f(n) \sim \int_{I_{a+}}^{I_{b-}} f(x) dx + r(I_{a+}, Q, f) + r(I_{b-}, Q^*, f) \quad .$$

Démonstration. - Si $\alpha < \xi < \beta$ et $\alpha^* < \xi^* < \beta^*$, alors on a, suivant la formule sommatoire d'Euler,

$$\begin{aligned} \sum_{\xi < n < \xi^*} f(n) - \int_{\xi}^{\xi^*} f(x) dx \\ = \Lambda_m(\xi^*, f) - \Lambda_m(\xi, f) + (-1)^{m-1} \int_{\xi}^{1/2(\alpha+\beta^*)} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx \\ + (-1)^{m-1} \int_{1/2(\alpha+\beta^*)}^{\xi^*} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\sum_{a < n < b} f(n) - \int_{I_{a+}}^{I_{b-}} f(x) dx = u(\xi) + v(\xi^*)$$

où

$$(1) \quad u(\xi) = r(I_{a+}, \xi, f) - \Lambda_m(\xi, f) + (-1)^{m-1} \int_{\xi}^{1/2(\alpha+\beta^*)} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx \quad ,$$

$$(2) \quad v(\xi^*) = r(I_{b-}, \xi^*, f) + \Lambda_m(\xi^*, f) + (-1)^{m-1} \int_{1/2(\alpha+\beta^*)}^{\xi^*} f^{(m)}(x) \varphi_m(x) dx \quad .$$

Pour chaque nombre réel fixé q , le dernier terme de (1) est $O|\omega|^{-q}$ si l'entier positif fixé m est assez grand. Puisque chaque terme de la somme $\Lambda_m(\xi, f)$ est négligeable dans Q , nous pouvons trouver alors pour un nombre réel fixé q

$$u(Q) = r(I_{a+}, Q, f) + O|\omega|^{-q} \quad \text{et} \quad u(Q) \sim r(I_{a+}, Q, f) \quad .$$

De la même façon nous trouvons

$$v(Q^*) \sim r(I_{b-}, Q^*, f) \quad .$$

Ceci donne le résultat cherché.

7. Application aux équations aux différences finies.

On étudie la solution générale de l'équation

$$\Delta_{\omega} f(x) = \frac{f(x + \omega) - f(x)}{\omega} = \varphi(x) \quad ,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction donnée.

Cette solution générale qu'on appelle somme indéfinie de $\varphi(x)$ est de la forme

$$f(x) = F(x) + \pi(x) \quad ,$$

$F(x)$ désignant une solution particulière et $\pi(x)$ une fonction arbitraire de période ω . Sa détermination s'appellera la sommation de l'équation. Pour pouvoir caractériser une solution principale, il faut en outre préciser le caractère de $\varphi(x)$ à l'infini.

Somme d'une fonction. - Pour résoudre l'équation

$$(1) \quad \Delta_{\omega} f(x) = \varphi(x)$$

où ω est un nombre positif, NORLUND considère, au lieu de la solution formelle $-\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(x + \nu\omega)$, qui diverge généralement, la série

$$F_{\eta} \left(\frac{x}{\omega} \right) = \int_a^{\infty} \varphi(z) e^{-\eta z} dz - \omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(x + \nu\omega) e^{-\eta(x + \nu\omega)}$$

a étant une constante indéterminée. Pour que cette série converge, quelque petit que soit le nombre positif η , il suffit de supposer que $\varphi(x)$ est une fonction, réelle ou non, continue pour $x \geq b$, et telle que l'on ait

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) e^{-\eta x} = 0 \quad \text{quel que soit } \eta > 0 \quad .$$

Or on a

$$\Delta_{\omega} F_{\eta} \left(\frac{x}{\omega} \right) = \varphi(x) e^{-\eta x}$$

donc si $F_{\eta} \left(\frac{x}{\omega} \right)$ tend uniformément vers une limite quand η tend vers zéro, cette limite $F \left(\frac{x}{\omega} \right)$ est une solution de (1).

Elle est définie à une constante additive près, et nous l'appellerons la solution

principale de (1) ou somme de $\varphi(x)$. Elle sera désignée par la notation

$$F\left(\frac{x}{\omega}\right) = \int_a^x \varphi(z) \Delta z = \lim_{\eta \rightarrow 0} F_{\eta}\left(\frac{x}{\omega}\right)$$

NORLUND démontre le théorème suivant.

THÉORÈME d'existence. - $F\left(\frac{x}{\omega}\right)$ existe dans le cas où :

1° $\varphi(x)$ admet pour $x \geq b$ une dérivée m -ième continue, infiniment petite à l'infini ;

2° L'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{B_m(-z)}{B_m(-z)} \varphi^{(m)}(x + \omega z) dz$ converge uniformément dans l'intervalle $b \leq x \leq b + \omega$.

Les fonctions $B_m(x)$ sont les fonctions de Bernoulli, et les fonctions $\overline{B}_m(x)$ sont les fonctions de période 1 qui coïncident avec $B_m(x)$ dans l'intervalle $0 \leq x < 1$.

NORLUND démontre le résultat suivant :

$$F\left(\frac{x + \omega h}{\omega}\right) = \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^{\nu}}{\nu!} B_{\nu}(h) \varphi^{(\nu-1)}(x) \\ + \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^{\infty} \frac{\overline{B}_m(h-z)}{B_m(h-z)} \varphi^{(m)}(x + \omega z) dz \quad .$$

Valeur neutralisée. - On rappelle qu'une neutrice périodique P est la classe formée de toutes les fonctions $\nu(\xi)$ qui peuvent s'écrire

$$\nu(\xi) = \sum_{h=0}^{n-1} s_h(\xi) p_h(\xi) + o(1) \quad ,$$

$o(1)$ désignant une fonction de ξ qui tend vers zéro quand $\xi \rightarrow \infty$.

1° Supposons d'abord que $\varphi(x)$ et toutes ses dérivées tendent vers zéro quand x tend vers l'infini.

On suppose $b \leq \xi \leq \xi^*$.

On peut écrire

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{\xi + \omega h}{\omega}\right) - F\left(\frac{\xi^* + \omega h}{\omega}\right) &= \int_{\xi^*}^{\infty} \varphi(z) dz - \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \varphi^{(\nu-1)}(\xi^*) \\
&- \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^{\infty} \frac{1}{B_m(h-z)} \varphi^{(m)}(\xi^* + \omega z) dz \\
&- \int_{\xi}^{\infty} \varphi(z) dz + \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \varphi^{(\nu-1)}(\xi) \\
&+ \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^{\infty} \frac{1}{B_m(h-z)} \varphi^{(m)}(\xi + \omega z) dz \quad .
\end{aligned}$$

Lorsque $\xi \rightarrow \infty$, $\int_{\xi}^{\infty} \varphi(z) dz \rightarrow 0$, d'autre part

$$\sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \varphi^{(\nu-1)}(\xi) \quad ,$$

et,

$$\frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^{\infty} \frac{1}{B_m(h-z)} \varphi^{(m)}(\xi + \omega z) dz \quad ,$$

tendent vers zéro en vertu des hypothèses faites.

Par conséquent, lorsque $\xi \rightarrow \infty$, $F\left(\frac{\xi + \omega h}{\omega}\right)$ tend vers une valeur neutralisée $F_P(\xi)$ telle que

$$\begin{aligned}
F_P(\xi) &= F\left(\frac{\xi + \omega h}{\omega}\right) + \int_{\xi}^{\infty} \varphi(z) dz \\
&- \sum_{\nu=1}^m B_\nu(h) \varphi^{(\nu-1)}(\xi) - \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^{\infty} \frac{1}{B_m(h-z)} \varphi^{(m)}(\xi + \omega z) dz
\end{aligned}$$

où

$$F_P(\xi) = \int_a^{\infty} \varphi(z) dz \quad .$$

2° Supposons que $\varphi(x)$ ne tende pas vers zéro quand $x \rightarrow \infty$, mais que sa dérivée première et toutes les suivantes tendent vers zéro quand $x \rightarrow \infty$.

On a

$$F\left(\frac{x + \omega h}{\omega}\right) - \omega B_1(h) \varphi(x) = \int_a^x \varphi(z) dz + \sum_{\nu=2}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \varphi^{(\nu-1)}(x) \\ + \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \frac{B_m(h-z)}{B_m(h-z)} \varphi^{(m)}(x + \omega z) dz \quad ,$$

et on montre de même que la fonction

$$F\left(\frac{x + \omega h}{\omega}\right) - \omega B_1(h) \varphi(x)$$

a pour valeur neutralisée

$$F_P(\xi) = \int_a^\infty \varphi(z) dz \quad .$$

3° Si $\varphi^{(m)}(x)$ est la première dérivée tendant vers zéro quand x tend vers l'infini, on écrit

$$F\left(\frac{x + \omega h}{\omega}\right) - \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \varphi^{(\nu-1)}(x) = \int_a^x \varphi(z) dz + \frac{\omega^{m+1}}{m!} \int_0^\infty \frac{B_m(h-z)}{B_m(h-z)} \varphi^{(m)}(x + \omega z) dz$$

et on montre de même que la fonction

$$F\left(\frac{x + \omega h}{\omega}\right) - \sum_{\nu=1}^m \frac{\omega^\nu}{\nu!} B_\nu(h) \varphi^{(\nu-1)}(x)$$

on a une valeur neutralisée

$$F_P(\xi) = \int_a^\infty \varphi(z) dz \quad .$$
