

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

PAUL JAFFARD

Dimension des anneaux de polynômes, I

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, n° 2 (1957-1958), exp. n° 22,
p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A8_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

Séminaire F. DUBREIL
 M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
 (ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
 Année 1957/58

28 avril 1958

-:-:-

DIMENSION DES ANNEAUX DE POLYNÔMES, I.

par Paul JAFFARD

1. Introduction.

Tous les anneaux que nous considérerons seront commutatifs et munis d'un élément unité.

Etant donné un anneau A , rappelons que l'on appelle dimension de A la longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers de A , l'anneau A tout entier n'étant pas considéré comme un idéal premier, mais (0) l'étant dans le cas où A est intègre. On notera cette dimension $\dim A$. En particulier les corps (commutatifs) s'identifient aux anneaux d'intégrité de dimension 0.

Nous noterons par la suite $A^{(n)}$ l'anneau des polynômes à n variables sur A , et nous nous proposerons d'étudier le comportement de $\dim A^{(n)}$ lorsque n est suffisamment grand.

Rappelons brièvement les résultats suivants (dûs pour la plus grande part à KRULL) :

Si A est un anneau noethérien, on a l'égalité :

$$\dim A^{(n)} = \dim A + n$$

En particulier, si K est un corps :

$$\dim K^{(n)} = n$$

De manière générale (que A soit noethérien ou non), on a les inégalités :

$$(1) \quad \dim A + 1 \leq \dim A^{(1)} \leq 2 \dim A + 1$$

SEIDENBERG a montré d'autre part que $\dim A^{(1)}$ pouvait prendre toutes les valeurs comprises entre $\dim A + 1$ et $2 \dim A + 1$.

Par récurrence sur n , l'inégalité (1) donne :

$$(2) \quad \dim A + n \leq \dim A^{(n)} \leq 2^n (\dim A + 1) - 1$$

En fait les inégalités (2) peuvent être améliorées :

l'idéal premier \mathfrak{P} de $A^{(n)}$ sera dit reposer sur l'idéal (premier) \mathfrak{p} de A si on a $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$. On a alors le :

THÉORÈME 1 (KRULL). - Si les idéaux d'une chaîne de $A^{(n)}$ reposent tous sur un même idéal premier de A , cette chaîne est nécessairement de longueur inférieure ou égale à n .

Soit

$$\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{P}_s$$

une telle chaîne.

On a
$$\mathfrak{P}_0 \cap A = \mathfrak{P}_1 \cap A = \dots = \mathfrak{P}_s \cap A = \mathfrak{p}$$

On peut passer au quotient par \mathfrak{P}_0 dans $A^{(n)}$, ce qui implique un passage au quotient par \mathfrak{p} dans A , et supposer par suite $\mathfrak{P}_0 = (0)$, $\mathfrak{p} = (0)$.

A est alors un anneau d'intégrité ayant un corps des fractions K . On a

$$\mathfrak{P}_i \cap A = (0) \quad (1 \leq i \leq s).$$

Or les idéaux de $A^{(n)}$ ayant une intersection vide avec l'ensemble multiplicativement clos A^* , formé par les éléments non nuls de A , sont en correspondance biunivoque (conservant l'inclusion) avec les idéaux de l'anneau $(A^{(n)})_{A^*} = B$ (anneau des fractions de $A^{(n)}$ relativement au sous-ensemble A^*). On voit facilement que B est isomorphe à $K^{(n)}$, donc une chaîne de B ne peut avoir une chaîne strictement supérieure à n , ce qui démontre le théorème.

COROLLAIRE. - On a l'inégalité :

$$(3) \quad \dim A^{(n)} \leq (n+1) \dim A + n.$$

En effet, toute chaîne d'idéaux premiers de $A^{(n)}$ est de la forme :

$$(0) = \mathfrak{P}_{0,0} \subset \mathfrak{P}_{0,1} \subset \dots \subset \mathfrak{P}_{0,\alpha(0)} \subset \mathfrak{P}_{1,0} \subset \dots \subset \mathfrak{P}_{i,0} \subset \dots \subset \mathfrak{P}_{i,\alpha(i)} \\ \subset \mathfrak{P}_{i+1,0} \subset \dots \subset \mathfrak{P}_{k,\alpha(k)}$$

avec $\mathfrak{P}_{i,j} \cap A = \mathfrak{P}_{i',j'} \cap A$ si et seulement si $i = i'$.

En posant $\mathfrak{P}_{i,j} \cap A = \mathfrak{p}_i$, on obtient dans A la chaîne :

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_k$$

On a donc, par définition, $k \leq \dim A$.

D'autre part, le théorème 1 et les égalités :

$$\mathfrak{P}_{i,0} \cap A = \mathfrak{P}_{i,1} \cap A = \dots = \mathfrak{P}_{i,\alpha(i)} \cap A$$

montrent que $\alpha(i) \leq n$.

La chaîne considérée a pour longueur :

$$s = \alpha(0) + (\alpha(1) + 1) + \dots + (\alpha(k) + 1)$$

(en tenant compte des chaînons $\mathfrak{P}_{i,\alpha(i)} \subset \mathfrak{P}_{i+1,0}$).

Par suite $s \leq n + k(n+1) \leq n + (n+1) \dim A$.

C.Q.F.D.

SEIDENBERG a donné une condition nécessaire et suffisante pour que, A étant supposé intègre et de dimension 1, l'anneau $A^{(1)}$ soit de dimension 2. Cette dernière est que la fermeture intégrale de A soit un anneau de Prüfer, c'est-à-dire tel que l'ensemble des idéaux fractionnaires finis de A forme un groupe multiplicatif. Il a montré d'autre part que lorsqu'il en est ainsi, on a toujours $\dim A^{(n)} = \dim A + n$.

Or KRULL a donné une caractérisation très simple des anneaux de Prüfer : pour qu'un anneau d'intégrité A soit de Prüfer, il faut et il suffit que, quel que soit l'idéal premier \mathfrak{P} de A , l'anneau de fractions $A_{\mathfrak{P}}$ soit un anneau de valuation.

Dans ce qui suit nous utilisons systématiquement les méthodes valuatives introduites par SEIDENBERG et nous obtenons à partir d'elles le résultat suivant :

Il existe un nombre N tel que pour tout $n \gg N$ on ait l'égalité :

$$\dim A^{(n)} = (\pi + 1)n + \epsilon$$

π et ϵ étant deux constantes ≥ 0 .

C'est-à-dire qu'à partir d'un entier N la dimension de l'anneau $A^{(n)}$ des polynômes à n variables sur A est une fonction linéaire de n . Nous donnons une interprétation de π particulièrement simple dans le cas où $\pi = 0$. Dans ce dernier cas, nous interprétons également ϵ .

Nous aurons besoin par la suite du résultat suivant dû à KRULL :

THÉORÈME 2. - K étant un corps et \mathfrak{P} un idéal premier de l'anneau de polynômes $K^{(n)}$, la longueur maximale h des chaînes d'idéaux premiers de $K^{(n)}$ commençant à (0) et finissant à \mathfrak{P} est donnée par la formule $h = n - t$

où t désigne le degré de transcendance sur K du corps des fractions de $K^{(n)}/K$.

Nous admettons sans démonstration ce théorème (KRULL [1], Théorème 14)

2. Dimension valuative d'un anneau.

Rappelons d'abord quelques résultats relatifs aux corps valués. Soient v une valuation de Krull d'un corps K , et Γ le groupe de valeurs correspondant. L'ensemble Γ_+ des éléments positifs ou nuls de Γ est partagé en classes d'équivalences dites étages de Γ de la manière suivante :

Deux éléments α et β appartiennent à un même étage si et seulement s'il existe deux entiers m et n tels que $\beta \leq m\alpha$ et $\alpha \leq n\beta$. On appelle rang du groupe totalement ordonné Γ le nombre (fini ou non) des étages de Γ différent de l'étage constitué par l'élément neutre 0 du groupe. En particulier les groupes de rang un ou groupes archimédiens sont caractérisés comme étant les groupes ordonnés isomorphes aux sous-groupes de \mathbb{R} (groupe ordonné additif des nombres réels).

Les étages de Γ sont en correspondances biunivoques avec les idéaux premiers non nuls de l'anneau A de la valuation v : à l'étage \mathbb{E} est associé l'idéal premier \mathfrak{p} des éléments x de A tels que $v(x) \in \mathbb{E}$. Cette correspondance permet de donner une interprétation du rang au moyen des spécialisations :

On sait que les valuations d'un corps K sont en correspondance biunivoque (à des isomorphismes près du corps résiduel et du groupe des valeurs) avec les spécialisations de K , c'est-à-dire avec les applications de K dans les ensembles du type $k_\infty = (k \cup \infty)$ où k est un corps (corps projectif). Une telle application φ doit avoir les propriétés suivantes :

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \varphi(b)$$

avec $1/\infty = 0$, $1/0 = \infty$, $a + \infty = \infty$ (si $a \neq \infty$). La spécialisation φ sera dite triviale si $\varphi(K) = 0$ (à cette dernière ne correspond pas de valuation de K) ou si φ est l'application identique de K sur lui-même (cas de $\Gamma = (0)$).

Si $\varphi(K) \supset k$, nous dirons par abus de langage que φ spécialise K sur k (quoique l'on puisse avoir $\infty \in \varphi(K)$), et on écrira $\varphi : K \rightarrow k$ ou $K \xrightarrow{\varphi} k$. On notera même parfois $\varphi(K)$ au lieu de k sans qu'aucune confusion puisse en résulter.

On définit sans peine une spécialisation produit de plusieurs spécialisations. Une spécialisation φ sera dite de rang s si elle est le produit de s spécialisations non triviales et n'est pas le produit de $s + 1$ spécialisations non triviales.

Il est alors facile de voir que le rang de la spécialisation φ est égal au rang de la valuation correspondante (fini ou non).

Soit une spécialisation φ produit de deux spécialisations φ_1 et φ_2 :

$$\varphi : K \xrightarrow{\varphi_1} k_1 \xrightarrow{\varphi_2} k_2$$

φ et φ_1 définissent deux valuations v et v_1 de K . De même φ_2 définit une valuation v_2 de k_1 . On dit que v est une valuation composée de v_2 et v_1 . La valuation v est plus fine que v_1 , c'est-à-dire que l'anneau de la valuation v_1 contient l'anneau de la valuation v . On écrira alors $v_1 \leq v$ et $v_1 < v$, si v est strictement plus fine que v_1 . Réciproquement si v et w sont deux valuations de K telles que v soit plus fine que w , la valuation v est la composée d'une valuation w' du corps résiduel de la valuation w et de la valuation w . Si v est une valuation de rang s du corps K , il existe exactement s valuations de K strictement moins fines que v (la valuation triviale identiquement nulle étant comprise).

Etant donné un anneau d'intégrité A et son corps des fractions K , nous dirons qu'une valuation de K est compatible avec A si $v(A) \geq 0$. Par abréviation, nous appellerons par la suite valuation de A toute valuation de K compatible avec A . Si v est une valuation de A , on appelle centre de v sur A l'idéal premier de A formé par tous les éléments x de A tels que $v(x) > 0$. On montre que tout idéal premier \mathfrak{p} de A ($\mathfrak{p} \neq A$) est le centre d'une valuation de A et qu'étant donnée une valuation v de A de centre \mathfrak{p} sur A et un idéal premier \mathfrak{q} de A tel que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, il existe une valuation w de A , plus fine que v , et ayant \mathfrak{q} pour centre sur A .

Etant donné un anneau d'intégrité A , nous considérerons dans ce qui suit les chaînes (sans répétition) de valuations de A :

$$v_0 < v_1 < \dots < v_s$$

(chaque v_i est une valuation de A strictement plus fine que v_{i-1}).

On appellera dimension valuative de A et on désignera par $\dim_v A$ la longueur maximale des chaînes de valuations de A (une chaîne maximale de valuations doit nécessairement commencer par la valuation nulle). C'est aussi le rang le plus

élevé des valuations de A , c'est-à-dire encore le rang le plus élevé des spécialisations du corps des fractions de A qui restent finies sur A (c'est-à-dire $\in \mathcal{P}(A)$).

3. Propriétés de la dimension valuative.

Dans tout ce qui suit, toutes les fois que L' désignera un sous-corps d'un corps L , on désignera par d.t. $[L : L']$ le degré de transcendance de L sur L' .

THEOREME 3. - Soit K un surcorps de K' tel que d.t. $[K : K'] = d$. Si v est une valuation de rang n du corps K induisant sur k une valuation w de rang n' , on a :

$$n \leq n' + d$$

les nombres intervenant étant finis ou non.

Soient Γ le groupe des valeurs de v , et Γ' le groupe des valeurs de w qui est un sous-groupe de Γ . Si $\gamma \geq 0$ est un élément de Γ' , il définit un étage $\mathcal{E}(\gamma)$ (resp. $\mathcal{E}'(\gamma)$) dans Γ (resp. dans Γ') tel que $\mathcal{E}'(\gamma) = \mathcal{E}(\gamma) \cap \Gamma'$.

Tout revient donc à montrer que le groupe Γ ne peut pas avoir plus de d étages dont l'intersection avec Γ' est vide.

Soient x_1, \dots, x_m des éléments de K tels que $v(x_1), \dots, v(x_m)$ définissent des étages de Γ , tous différents, et ayant une intersection vide avec Γ' . Supposons d'autre part le numérotage fait de telle manière que

$$v(x_1) < v(x_2) < \dots < v(x_m).$$

Tout revient à montrer que $m \leq d$. Montrons pour cela que les x_i sont algébriquement indépendants sur K' . Supposons qu'il existe une relation algébrique entre les x_i à coefficients dans K' :

$$\sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} = 0 \quad (a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \in K')$$

On en déduit une égalité de la forme :

$$v(a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}) = v(a_{\beta_1 \dots \beta_m} x_1^{\beta_1} \dots x_m^{\beta_m})$$

avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (\beta_1, \dots, \beta_m)$

Ceci entraîne :

$$v(a_{\alpha_1 \dots \alpha_m}) - v(a_{\beta_1 \dots \beta_m}) + (\alpha_1 - \beta_1) v(x_1) + \dots + (\alpha_m - \beta_m) v(x_m) = 0.$$

Soit p le plus grand des nombres i tels que $\alpha_i - \beta_i \neq 0$. On peut toujours supposer $\alpha_p > \beta_p$.

Alors $(\alpha_1 - \beta_1) v(x_1) + \dots + (\alpha_m - \beta_m) v(x_m)$ est un élément > 0 dont l'étage est celui de $v(x_p)$, donc $v(a_{\beta_1 \dots \beta_m}) - v(a_{\alpha_1 \dots \alpha_m})$ est un élément > 0 de Γ dont l'étage dans Γ est celui de $v(x_p)$ d'où une contradiction qui entraîne le théorème.

On en déduit immédiatement le :

COROLLAIRE 1 (KRULL). - Si K est un surcorps de K' tel que d.t. $[K : K'] = d$, toute valuation de K triviale sur K' a un rang $\leq d$.

COROLLAIRE 2. - Soit A un anneau d'intégrité ayant un corps de fractions K . Si k est un sous-corps de A , la dimension valuative de A est inférieure ou égale au degré de transcendance de K sur k .

COROLLAIRE 3. - Soit A un anneau d'intégrité ayant un corps de fractions K . Si d est le degré de transcendance de K , la dimension valuative de A est inférieure ou égale à d si A est de caractéristique non nulle et inférieure ou égale à $d + 1$ si K est de caractéristique nulle.

Soit k_0 le sous-corps premier de K . On applique le théorème 3 à k_0 et K . On remarque que si la caractéristique n'est pas nulle, k_0 est un sous-corps fini, donc n'admet que des valuations triviales ($m = 0$) et si la caractéristique est 0, k_0 est isomorphe au corps \mathbb{Q} des nombres rationnels qui n'admet que des valuations de rang 0 ou 1 ($m \leq 1$).

Nous allons maintenant établir une inégalité qui sera fondamentale au cours de cette étude :

THÉORÈME 4. - Soit ψ une spécialisation de rang n d'un corps K induisant une spécialisation de rang m sur un sous-corps k de K . On a :

$$(4) \quad n + \text{d.t. } [\psi(K) : \psi(k)] \leq m + \text{d.t. } [K : k]$$

Les nombres intervenant étant finis ou non.

Dans le cas où, soit m , soit d.t. $[K : k]$ est infini, l'affirmation est triviale. Supposons ces deux nombres finis. Ceci entraîne nécessairement n fini

d'après le théorème 3. Il suffit donc de montrer le théorème 4 dans les cas n fini, ce que nous allons supposer désormais.

φ est le produit de n spécialisations de rang 1 :

$$K \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow K_n = K' = \varphi(K) .$$

Cette suite de spécialisations induit la suite :

$$k \longrightarrow k_1 \longrightarrow k_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow k_n = k' = \varphi(k) .$$

Il suffit de montrer l'inégalité (4) pour chacune des spécialisations $K_{i-1} \longrightarrow K_i$ (et d'additionner les inégalités alors obtenues). On peut donc supposer $n = 1$.

Comme $m \leq n$, deux cas sont à envisager :

1er Cas : $m = 1$. - C'est le cas où φ n'est pas triviale sur k . Il s'agit alors de démontrer l'inégalité :

$$\text{d.t. } [K' : k'] \leq \text{d.t. } [K : k]$$

Soient x'_1, \dots, x'_d des éléments de K' algébriquement indépendants sur k' . Désignons par x_i un élément de K tel que $\varphi(x_i) = x'_i$ ($1 \leq i \leq d$) et montrons que les x_i sont algébriquement indépendants sur k .

Supposons qu'il existe une relation algébrique entre les x_i à coefficients dans k :

$$(5) \quad \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_d} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_d} x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} = 0$$

les $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}$ étant des éléments non tous nuls de k .

Soit v la valuation (non nulle) de k définie par la spécialisation $k \longrightarrow \varphi(k)$. En multipliant les $a_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}$ par un élément convenable de k , on peut toujours supposer que :

$$\inf [v(a_{\alpha_1, \dots, \alpha_d})]_{\alpha_1, \dots, \alpha_d} = 0 .$$

Par suite, aucun des $\varphi(a_{\alpha_1, \dots, \alpha_d})$ n'est infini et les $\varphi(a_{\alpha_1, \dots, \alpha_d})$ ne sont pas tous nuls. On déduit alors de l'égalité (5) une égalité :

$$\sum \varphi(a_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}) x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} = 0$$

qui montre que les x_i' ne sont pas algébriquement indépendants sur k' . Ceci contredit les hypothèses, par suite les x_i sont algébriquement indépendants sur k et il en résulte bien

$$\text{d.t. } [K' : k'] \leq \text{d.t. } [K : k]$$

2e Cas : $m = 0$. - C'est le cas où φ est triviale sur k , c'est-à-dire définit un isomorphisme de k sur k' . On peut alors identifier k à k' par φ . Il faut montrer :

$$\text{d.t. } [K' : k'] \leq \text{d.t. } [K : k] - 1$$

φ n'étant pas triviale sur K , il existe un élément x de K tel que $\varphi(x) = 0$. L'élément x ne peut être algébrique sur k , sinon il existerait une relation de la forme :

$$a_0 x^n + \dots + a_n = 0 \quad (a_i \in k \quad (0 \leq i \leq n) ; a_n \neq 0) .$$

On en déduirait :

$$\varphi(a_0) \varphi(x)^n + \dots + \varphi(a_n) = 0$$

c'est-à-dire $\varphi(a_n) = 0$ ou $a_n = 0$ ce qui est absurde.

x étant transcendant sur k , désignons par L le sous-corps $k(x)$ de K , et par L' le sous-corps image $\varphi(L)$ de K' (en fait $\varphi(L) = L'_{\infty}$).

L' est certainement algébrique sur k . Sinon il existerait une spécialisation $L' \rightarrow L''$ triviale sur k . On en déduirait une spécialisation de rang 2 : $L \rightarrow L''$ triviale sur k , ce qui contredirait le théorème 3. Donc

$$\text{d.t. } [L' : k] = 0$$

φ induisant une spécialisation de rang un sur L' , le cas 1 montre que

$$\text{d.t. } [K' : L'] \leq \text{d.t. } [K : L],$$

ce qui s'écrit encore :

$$\text{d.t. } [K' : k] - \text{d.t. } [L' : k] \leq \text{d.t. } [K : k] - \text{d.t. } [L : k]$$

c'est-à-dire :

$$\text{d.t. } [K' : k] \leq \text{d.t. } [K : k] + \text{d.t. } [L' : k] - \text{d.t. } [L : k] = \text{d.t. } [K : k] + 0 - 1$$

On a bien l'inégalité :

$$\text{d.t. } [K' : k] \leq \text{d.t. } [K : k] - 1$$

ce qui démontre complètement le théorème 4.

COROLLAIRE. - d.t. $[\varphi(K) : \varphi(k)] \leq$ d.t. $[K : k]$

En effet on a toujours $m \leq n$.

Montrons maintenant le :

THEOREME 5. - La dimension d'un anneau d'intégrité A est toujours inférieure ou égale à sa dimension valuative.

Soit :

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_n$$

une chaîne d'idéaux premiers de A . Soit v_0 une valuation de A de centre \mathfrak{p}_0 sur A . Il existe une valuation (strictement) plus fine v_1 de A ayant pour centre \mathfrak{p}_1 sur A et, en continuant le procédé, on trouve une chaîne

$$v_0 < v_1 < \dots < v_n$$

de valuations de A , ce qui montre le théorème.

Si A est un anneau de Prüfer, quel que soit l'idéal premier \mathfrak{p} de A , $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation. Il y a donc correspondance biunivoque entre valuations et idéaux premiers de A . Si à l'idéal premier \mathfrak{p} est attaché la valuation $v_{\mathfrak{p}}$, on voit que :

$$\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \iff v_{\mathfrak{q}} \leq v_{\mathfrak{p}}$$

par suite :

THEOREME 6. - La dimension d'un anneau de Prüfer est égale à sa dimension valuative.

Les résultats de SEIDENBERG montrent que l'on peut énoncer la réciproque partielle :

Pour que la fermeture intégrale d'un anneau d'intégrité de dimension 1 soit de Prüfer, il faut et il suffit que sa dimension valuative soit égale à 1.

Enfin il résultera de ce qui suit que :

La dimension d'un anneau d'intégrité noethérien est égale à sa dimension valuative.

Les théorèmes 3 et 5 permettent dans de nombreux cas de borner supérieurement la dimension d'un anneau, en particulier tout anneau de nombres algébriques est de dimension 1. Tout anneau de fonctions algébriques à n variables contenant le corps des constantes est de dimension inférieure ou égale à n .

Nous allons maintenant montrer le :

THEOREME 7. - Si A est un anneau d'intégrité de dimension valuative d , l'anneau de polynômes $A[x]$ à une variable sur A a pour dimension valuative $d + 1$.

Désignons par K (resp. \mathcal{K}) le corps des fractions de A (resp. $A[x]$) et soit une valuation de rang m de l'anneau A . Elle définit une suite de m spécialisations non triviales :

$$K \longrightarrow K_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow K_m$$

cette suite induit sur A la suite de spécialisations :

$$A \longrightarrow A/\mathfrak{P}_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow A/\mathfrak{P}_m$$

Considérons le sous-anneau V de \mathcal{K} ainsi défini : un élément y de \mathcal{K} appartient à V s'il est nul ou de la forme :

$$y = \frac{a_0 x^m + \dots + a_p x^p}{b_0 x^n + \dots + b_q x^q}$$

avec $a_p ; b_q \neq 0$ et $p \geq q$.

On voit facilement que V est un anneau de valuation de \mathcal{K} qui définit une spécialisation de \mathcal{K} sur K . La valuation correspondante est compatible avec $A[x]$ et $A[x]$ se trouve canoniquement spécialisé sur A , x étant spécialisé sur 0 . On en déduit la suite de spécialisations :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{K} & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & K_m \\ | & & | & & & & & & | \\ A[x] & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/\mathfrak{P}_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & A/\mathfrak{P}_m \end{array}$$

Donc à toute valuation de rang m de A on peut faire correspondre une valuation de rang $m + 1$ de $A[x]$. On a donc, que d soit fini ou non :

$$\dim_V A[x] \geq d + 1$$

Par suite, si $d = \infty$, on a $\dim_V A[x] = \dim_V A + 1$

Supposons donc $d < \infty$.

Soit $n = \dim_V A[x]$ (n fini ou non), et soit une valuation de rang n de $A[x]$. Elle définit une valuation de rang m de A et on a les spécialisations :

$$\begin{array}{ccc} \psi : & \mathcal{K} & \longrightarrow & \mathcal{K}' \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & K & \longrightarrow & K' \end{array}$$

Le théorème 4 permet d'écrire :

$$n + \text{d.t.} [\mathcal{K}' : K'] \leq m + \text{d.t.} [\mathcal{K} : K].$$

L'égalité $\text{d.t.} [\mathcal{K} : K] = 1$ et l'inégalité $m \leq d$ montrent que n et $\text{d.t.} [\mathcal{K}' : K']$ sont deux nombres finis. On a donc :

$$n \leq m + \text{d.t.} [\mathcal{K} : K] - \text{d.t.} [\mathcal{K}' : K'] \leq m + \text{d.t.} [\mathcal{K} : K] \leq d + 1$$

d'où le théorème.

COROLLAIRE 1. - Quel que soit l'anneau d'intégrité A , on a :

$$\dim_{\mathcal{V}} A^{(n)} = n + \dim_{\mathcal{V}} A$$

COROLLAIRE 2 (SEIDENBERG). - Si A est un anneau de Prüfer, on a :

$$\dim A^{(n)} = n + \dim A$$

En effet, $\dim_{\mathcal{V}} A = \dim A$ donc $\dim_{\mathcal{V}} A^{(n)} = n + \dim A$ et le corollaire est une conséquence immédiate de l'inégalité (2) et du théorème 5.

THEOREME 8. - Si A est un anneau d'intégrité de dimension valuative finie, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on ait :

$$\dim A^{(n)} = n + \delta$$

où δ est un entier inférieur ou égal à $\dim_{\mathcal{V}} A$.

Considérons la fonction $f(n) = \dim_{\mathcal{V}} A^{(n)} - \dim A^{(n)}$.

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= (\dim_{\mathcal{V}} A^{(n+1)} - \dim_{\mathcal{V}} A^{(n)}) - (\dim A^{(n+1)} - \dim A^{(n)}) \\ &= 1 - (\dim A^{(n+1)} - \dim A^{(n)}) \quad (\text{Théorème 7}) \leq 0 \quad (\text{Inégalité (1)}). \end{aligned}$$

Comme $f(n)$ est une fonction décroissante bornée inférieurement par 0 (Théorème 5), elle admet une borne inférieure α qu'elle atteint pour $n = N$. Par suite $n \geq N$ entraîne $f(n) = \alpha$ ou $\dim A^{(n)} = \dim_{\mathcal{V}} A^{(n)} - \alpha$ et, comme $\dim_{\mathcal{V}} A^{(n)} = n + \dim_{\mathcal{V}} A$, on voit donc que $n \geq N$ entraîne

$$\dim A^{(n)} = n + \dim_{\mathcal{V}} A - \alpha.$$

On voit de plus que $\delta = \dim_{\mathcal{V}} A - \alpha \leq \dim_{\mathcal{V}} A$, ce qui achève de démontrer le théorème. On verra plus tard qu'en fait

$$\delta = \dim_{\mathcal{V}} A.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KRULL (Wolfgang). - Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, III. Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie, Math. Z., t. 42, 1937, p. 745-766.
 - [2] KRULL (Wolfgang). - Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie, Math. Z., t. 54, 1951, p. 354-387.
 - [3] SEIDENBERG (A.). - A note on the dimension theory of rings, Pac. J. Math., t. 3, 1953, p. 505-512.
 - [4] SEIDENBERG (A.). - On the dimension theory of rings, II, Pac. J. Math., t. 4, 1954, p. 603-614.
-