

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

GUY MAURY

Théorèmes de transfert en théorie des anneaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, n° 1 (1957-1958), exp. n° 2, p. 1-21

http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_1_A2_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1957-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

18 novembre 1957

Année 1957/58

-:-:-:-

THÉORÈMES DE TRANSFERT EN THÉORIE DES ANNEAUX

par Guy MAURY.

INTRODUCTION.

Par "anneau" nous entendrons dans toute la conférence "anneau commutatif, à élément unité".

Nous nous donnons un anneau A et un suranneau B de A , l'élément unité de B étant celui de A . θ sera un élément de B , entier sur A , sauf mention expresse du contraire. Nous cherchons à quelle condition portant sur les polynômes de $A[x]$, dont θ est racine, certaines propriétés de A sont encore vraies dans $A[\theta]$.

Ainsi, on examinera les cas suivants :

- I. $A[\theta]$ quasi-local, A l'étant.
- II. $A[\theta]$ normal, (c'est-à-dire noethérien, sans diviseurs de zéro, intégralement clos), A l'étant.
- III. $A[\theta]$ local régulier, A l'étant.
- IV. $A[\theta]$ intégralement clos dans son anneau complet des quotients, A l'étant, θ étant racine d'un polynôme unitaire $\varphi(x)$ de $A[x]$ et n'étant racine d'aucun polynôme de $A[x]$ de degré inférieur. Il sera fait, de plus, certaines hypothèses simplificatrices sur A .

Ces études entrent dans le cadre d'une étude générale d'une extension monogène $A[\theta]$ d'un anneau A . Signalons, à ce propos, une étude sur la théorie des idéaux dans $A[\theta]$, menée par M.J.P. LAFON et l'auteur [1]. Les résultats des parties I, II, III sont résumés dans une note de l'auteur aux "Comptes Rendus" [2].

Nous nous référons très souvent au mémoire de M. NAGATA [3] désigné dans la suite par B.T. [3]. Nous aurons besoin des propriétés fondamentales des anneaux locaux réguliers [parties II et III], que l'on pourra trouver dans NORTHOTT [4]. La connaissance de B.T. [3] est souhaitable pour l'intelligence de IV,

et de toute la conférence en général.

I. $A[\theta]$ quasi-local, ... l'étant.

1. — Dans cette partie A est un anneau quasi-local avec élément unité, plongé dans un anneau B . Nous appelons "anneau quasi-local", un anneau dont l'ensemble des éléments non inversibles forme un idéal. Celui-ci est alors son unique idéal maximal propre. Un anneau quasi-local noethérien est appelé un anneau local. Un anneau quasi-local peut être défini comme un anneau n'ayant qu'un seul idéal maximal propre : en effet, soient A' un tel anneau, \mathfrak{m}' son idéal maximal, et a un élément de A' , n'appartenant pas à \mathfrak{m}' ; (a) est égal à A' , ou bien (a) est compris dans un idéal maximal propre de A' , [dans un anneau A' commutatif à élément unité, tout idéal propre est contenu dans un idéal maximal. (KRULL)], c'est-à-dire dans \mathfrak{m}' . Seule la première hypothèse est possible et a est inversible.

Soit θ un élément de B , qui ne sera pas obligatoirement entier sur A dans ce paragraphe. L'anneau $A[\theta]$, c'est-à-dire l'ensemble des $\sum a_i \theta^i$ dans B , $a_i \in A$, sera noté aussi A^x . Si \mathfrak{m} est l'idéal maximal de A , \mathfrak{m}^x sera l'idéal de A^x formé par les $\sum m_i \theta^i$, $m_i \in \mathfrak{m}$.

\mathfrak{m}^x est propre si, et seulement si, θ n'est pas racine d'un polynôme de la forme $1 + \sum_0^N m_i x^i$, $m_i \in \mathfrak{m}$, $i = 0, \dots, N$.

A chaque polynôme $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N$, de $A[x]$, dont θ est racine (il peut n'y avoir que le polynôme 0), faisons correspondre le polynôme $\bar{f}(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \dots + \bar{a}_N x^N$, de $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$, \bar{a}_i étant la classe de a_i dans $\frac{A}{\mathfrak{m}}$.

a. Premier cas : \mathfrak{m}^x est propre; considérons $\frac{A^x}{\mathfrak{m}^x}$.

1° S'il n'y a pas de $\bar{f}(x)$ non nul, $\frac{A^x}{\mathfrak{m}^x}$ est isomorphe à $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$.

2° S'il y a un $\bar{f}(x)$ non nul, soient $\bar{\varphi}(x)$ un polynôme non nul de plus petit degré parmi les $\bar{f}(x)$, et $\bar{\varphi}(x) = \prod_{i=1}^q \bar{\varphi}_i^{n_i}(x)$, la décomposition de $\bar{\varphi}(x)$ en facteurs premiers dans $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$, [$\frac{A}{\mathfrak{m}}$ est un corps]. Il est facile de vérifier que $\frac{A^x}{\mathfrak{m}^x}$ est isomorphe à $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]/(\bar{\varphi}(x))$.

Soit $\bar{\varphi}_i(x) = \bar{\beta}_0 + \dots + \bar{\beta}_{n_i} x^{n_i}$, $\bar{\beta}_i \in \frac{A}{\mathfrak{m}}$, $i = 0, \dots, n_i$. Considérons $\varphi_i(x) = \beta_0 + \dots + \beta_{n_i} x^{n_i}$, β_i étant un représentant de $\bar{\beta}_i$. Les idéaux de A^x , dont l'intersection avec A est \mathfrak{m} , sont au nombre de q , engendrés

respectivement par $\varphi_i(\theta)$ et \mathfrak{m}_i , $i = 1, \dots, q$.

b. Deuxième cas : \mathfrak{m}^\times n'est pas propre.

Il n'y a pas d'idéaux de \mathfrak{A}^\times propres dont l'intersection avec \mathfrak{A} est \mathfrak{m} . Ceci ne peut se produire si θ est entier sur \mathfrak{A} (B.T. [3], page 66, corollaire 1).

2. - Si θ est entier sur \mathfrak{A} , nous sommes dans le cas a. 2° précédent. Les seuls idéaux maximaux de \mathfrak{A}^\times sont les idéaux engendrés par \mathfrak{m} et les $\mathfrak{m}_i(\theta)$, $i = 1, \dots, q$, dans \mathfrak{A}^\times : en effet, soit \mathfrak{p}' un idéal maximal dans \mathfrak{A}^\times , $\frac{\mathfrak{A}^\times}{\mathfrak{p}'}$ est un corps, entier sur l'anneau $\mathfrak{A}/\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{A}$. Or ceci entraîne que $\mathfrak{A}/\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{A}$ est un corps (B.T. [3], page 66, lemme 3). $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{A}$ n'est autre que \mathfrak{m} , \mathfrak{p}' contient \mathfrak{m}^\times et est, par suite, un des idéaux maximaux déjà trouvés. On déduit de là :

THÉOREME. - \mathfrak{A}^\times est quasi-local, si, et seulement si, la décomposition de $\overline{\varphi}(x)$ dans $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{m}}[x]$ est $\overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi}^\lambda(x)$, $\overline{\varphi}^\lambda(x)$ étant irréductible dans $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{m}}[x]$ et λ étant un entier naturel.

REMARQUES. - 1° Tout sous-anneau de \mathfrak{A}^\times contenant \mathfrak{A} est quasi-local.

2° Si \mathfrak{A}^\times est un anneau quasi-local, extension entière d'un anneau \mathfrak{A} , celui-ci est nécessairement quasi-local.

3° Supposons que θ soit racine d'un polynôme $\psi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, à coefficients dans \mathfrak{A} et que θ ne soit racine d'aucun polynôme de degré inférieur. Alors on peut prendre $\overline{\varphi}(x) = \overline{\psi}(x)$. En effet, tous les polynômes de $\mathfrak{A}[x]$, dont θ est racine, sont multiples de $\psi(x)$. Supposons que $\overline{\varphi}(x)$ provienne de $\varphi(x)$, on aura $\varphi(x) = \lambda(x)\psi(x)$ et $\overline{\varphi}(x) = \overline{\lambda}(x)\overline{\psi}(x)$, le degré de $\overline{\varphi}(x)$ étant supérieur ou égal à celui de $\overline{\psi}(x)$. D'après le choix de $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{\varphi}(x)$ et $\overline{\psi}(x)$ ont le même degré.

II. $\mathfrak{A}[\theta]$ normal, \mathfrak{A} l'étant.

1. - **NOTATIONS.** - \mathfrak{A} est ici un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, intégralement clos, plongé dans un anneau \mathfrak{B} sans diviseurs de zéro. Soit θ un élément de \mathfrak{B} , entier sur \mathfrak{A} . Comme dans I, $\mathfrak{A}[\theta]$ sera aussi noté \mathfrak{A}^\times . θ est alors racine d'un polynôme unitaire $\varphi(x)$ de $\mathfrak{A}[x]$, irréductible dans $\overline{\mathfrak{A}}[x]$, $\overline{\mathfrak{A}}$ étant le corps des quotients de \mathfrak{A} .

$\varphi(x)$ sera appelé le polynôme caractéristique de θ sur \mathfrak{A} . Soit n son degré. Nous cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que \mathfrak{A}^\times soit intégralement clos. Nous terminerons par quelques applications.

2. - RAPPEL. a. Etant donnés un anneau noethérien A' et un idéal premier ρ de A' , formons toutes les suites croissantes d'idéaux premiers de A' , distincts, et strictement compris dans ρ . Il existe un nombre entier r positif ou nul, tel qu'il existe une suite ayant r termes et qu'il n'existe pas de suite ayant $r + 1$ termes. Le nombre r est appelé le rang de ρ .

Le plus grand nombre r qu'on puisse ainsi trouver dans A' est appelé la dimension de A' .

b. S étant un ensemble multiplicativement stable d'éléments de A' , ne contenant pas 0, A' étant ici un anneau sans diviseurs de zéro quelconque, on notera A'_S l'anneau ensemble des fractions $\frac{a'}{s}$, où a' appartient à A' et s à S . Ainsi, si ρ est un idéal premier de A' , on peut considérer l'ensemble $S = A' - \rho$, et l'anneau A'_S , noté aussi dans ce cas A'_ρ .

c. ceci étant, on sait que, (B.T. [3], page 75, corollaire 1) : un anneau noethérien Λ , sans diviseurs de zéro, est intégralement clos, si, et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(H₁) : Pour chaque idéal premier ρ de Λ de rang 1, Λ_ρ est intégralement clos.

(H₂) : Chaque idéal principal de Λ n'a pas d'idéaux premiers essentiels immergés.

REMARQUE. - Si Λ n'a que des idéaux premiers, non nuls, de rang 1, la condition nécessaire et suffisante précédente se réduit à la condition (H₁).

3. - LEMME. - Soient A un anneau, sans diviseurs de zéro, intégralement clos, dans son corps des quotients \bar{A} , et S un ensemble multiplicativement stable de A , ne contenant pas 0, l'anneau A_S est intégralement clos dans son corps des quotients \bar{A} .

Soit u un élément de \bar{A} , entier sur A_S :

$$u^n + b_1 u^{n-1} + \dots + b_n = 0, \text{ avec } b_i = \frac{a_i}{s_i}, \quad s_i \in S, \quad a_i \in A, \quad i = 1, \dots, n.$$

Considérons $\beta = us_1 \dots s_n$:

$$\beta^n + c_1 \beta^{n-1} + \dots + c_n = 0, \quad c_i = b_i (s_1 \dots s_n)^n, \quad i = 1, \dots, n.$$

les c_i appartiennent à A . β est entier sur A , β appartient à A et u à A_S .

4. - Soit ρ^x un idéal premier de rang 1 de A^x et soit $\rho^x \cap A = \rho$. ρ est un idéal premier de rang 1, (B.T. [3], page 72, proposition 2). D'ailleurs si ρ est un idéal premier de rang 1 de A , il existe au moins un idéal premier ρ^x de A^x tel que $\rho^x \cap A = \rho$ et ρ^x est alors de rang 1.

Posons, ρ étant un idéal premier de rang 1 de A , $S = A - \rho$, et considérons $[A[\theta]]_S$: d'après (II,3) cet anneau est intégralement clos. Mais $[A[\theta]]_S = A_S[\theta]$, le polynôme caractéristique de θ sur A_S étant toujours $\varphi(x)$. Donc, si A^x est intégralement clos, $A_S[\theta]$ l'est aussi pour tout S relatif à un idéal premier de rang 1 de A .

Réciproquement, si $A_S[\theta]$ est intégralement clos, $S = A - \rho$, ρ idéal premier de rang 1 de A , il en est de même de $A_{S^x}^x$, où $S^x = A^x - \rho^x$, ρ^x étant un idéal premier de A^x , dont l'intersection avec A est ρ , car nous pouvons écrire

$$A_{S^x}^x = [(A[\theta])_S]_{S^x} = [A_S[\theta]]_{S^x}.$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme de (II,3).

Ainsi, une condition nécessaire pour que A^x soit intégralement clos, est que, pour tout idéal premier ρ de rang 1 de A , et $S = A - \rho$, $A_S[\theta]$ soit intégralement clos, et cette condition, si elle est réalisée, entraîne que la condition (H_1) est réalisée dans A^x .

5. - Considérons donc, étant donné $S = A - \rho$, ρ étant un idéal premier de rang 1 de A , $A_S[\theta]$:

$A_S[\theta]$ est une extension entière, sans diviseurs de zéro, de l'anneau local régulier de dimension 1, A_S . C'est un anneau semi-local d'idéaux maximaux

ρ_i^x , $i = 1, \dots, q$, engendrés respectivement par $\varphi_i(\theta)$ et ρ_S , ρ_S désignant l'idéal maximal de A_S , la décomposition de $\varphi(x)$ modulo ρ_S , dans $\frac{A_S}{\rho_S}[x]$ étant : $\overline{\varphi}_{\rho_S} = \prod_{i=1}^q \overline{\varphi}_i^{\alpha_i}(x)$, $\overline{\varphi}_i(x)$ étant irréductible dans $\frac{A_S}{\rho_S}[x]$, (voir I, 1 et 2 et I, 2 remarque 3).

Si $\overline{\varphi}_{\rho_S}$ est irréductible dans $\frac{A_S}{\rho_S}[x]$, alors $A_S[\theta]$ est local régulier de dimension 1, son idéal maximal étant engendré par un générateur u de ρ_S . Donc $A_S[\theta]$ est intégralement clos.

Si $\overline{\varphi}_{\rho_S}$ n'est pas irréductible et a la décomposition ci-dessus, quelle est la condition pour que $A_S[\theta]$ soit intégralement clos ?

6. - Soit un facteur $\overline{\varphi}_i(x)$, d'exposant $\alpha_i = 1$ dans la décomposition précédente de $\overline{\varphi}_{\rho_S}(x)$ et soit, u étant, comme ci-dessus, le générateur de ρ_S ,

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^q \varphi_i^{\alpha_i}(x) + u\mu(x),$$

$\mu(x)$ étant un polynôme de $A_S[x]$, de degré $n-1$ au plus. Posons $S_i^x = A_S^x - \mathfrak{p}_i^x$ et considérons $(A_S^x)_{S_i^x}$: c'est un anneau local de dimension 1 d'idéal maximal

\mathfrak{p}_i^x , dont une base est $[u, \varphi_i(\theta)]$. Mais comme $\varphi_i(\theta) = -\frac{u\mu(\theta)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q \varphi_j(\theta)}$, u est

une base. $(A_S^x)_{S_i^x}$ est donc régulier, et par suite intégralement clos.

Considérons maintenant, un facteur $\bar{\varphi}_i(x)$, d'exposant $\alpha_i > 1$ et supposons $A_S[\theta]$ intégralement clos : c'est alors un anneau semi-local, de Dedekind, donc à idéaux tous principaux [B.T. [3], page 74, proposition 1]. En particulier \mathfrak{p}_i^x est engendré par un certain élément $\lambda(\theta)$ et l'on a $\varphi_i(\theta) = \lambda(\theta)\lambda'(\theta)$, $\lambda'(\theta)$ étant un élément de A_S^x . Démontrons que $\lambda'(\theta)$ est inversible :

Si $\lambda'(\theta)$ n'était pas inversible, il appartiendrait à un \mathfrak{p}_j^x . Comme $\varphi_i(\theta)$ n'appartient pas à \mathfrak{p}_j^x pour $j \neq i$, $\lambda(\theta)$ appartiendrait à \mathfrak{p}_i^x . Mais n'oublions pas que, dans A_S^x/\mathfrak{p}_i^x , $\bar{\lambda}(\theta)$ et $\bar{\lambda}'(\theta)$ sont multiples de $\bar{\varphi}_i(\theta)$, $\bar{\theta}$ désignant la classe de θ dans A_S^x/\mathfrak{p}_i^x . On aurait donc :

$$\bar{\varphi}_i(\bar{\theta}) = \bar{\varphi}_i^2(\bar{\theta}) \bar{\psi}(\bar{\theta}), \quad \bar{\psi}(\bar{\theta}) \in A_S^x/\mathfrak{p}_i^x.$$

Par suite : $\bar{\varphi}_i(x) + \bar{\eta}(x) [\prod_{i=1}^q \bar{\varphi}_i^{\alpha_i}(x)] = \bar{\varphi}_i^2(x) \bar{\psi}(x)$, avec un certain polynôme $\bar{\eta}(x)$ appartenant à $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_i^x}[x]$. Le premier membre s'écrit $\bar{\varphi}_i(x) [1 + \bar{\eta}(x) (\prod_{k=1}^q \bar{\varphi}_k^{\alpha'_k}(x))]$, avec $\alpha'_k = \alpha_k$, si $k \neq i$ et $\alpha'_i = \alpha_i - 1$. $\bar{\varphi}_i(x)$ devrait diviser la quantité entre crochets, ce qui n'est pas puisque α'_i est supérieur ou égal à 1.

$\lambda'(\theta)$ est donc inversible, et on peut engendrer \mathfrak{p}_i^x par $\varphi_i(\theta)$ dans le cas $\alpha_i > 1$.

Mais, alors, dans $\varphi(x) = \prod_{i=1}^r \varphi_i^{\alpha_i}(x) + u\mu(x)$, faisons $x = \theta$: $\mu(\theta)$ n'est pas dans \mathfrak{p}_i^x , car autrement $\mu(\theta) = \varphi_i(\theta)\gamma(\theta)$, où

$$\gamma(\theta) = a_0 + \dots + a_{n-1} \theta^{n-1}, \quad a_i \in A_S, \quad i = 0, \dots, n-1;$$

θ serait racine du polynôme de $A_S[x]$ non identiquement nul de degré inférieur à

n : $\prod_{k=1}^r \varphi_k^{\alpha'_k}(x) + u(a_0 + \dots + a_{n-1} x^{n-1})$, où α'_k a la valeur précisée plus haut.

C'est impossible.

Donc, si $A_S[\theta]$ est intégralement clos, $\mu(\theta)$ n'appartient à aucun \mathfrak{P}_i^x , pour i , tel que α_i est supérieur à 1.

7. - Nous allons montrer que :

Réciproquement, si $\mu(\theta)$ n'appartient à aucun \mathfrak{P}_i^x , pour i , tel que α_i est supérieur à 1, $A_S[\theta]$ est intégralement clos.

En effet soit d'abord i , tel que $\alpha_i = 1$. Nous avons vu (II, 6), que $(A_S^x)_{S_i^x}$ est intégralement clos. Soit ensuite i , tel que $\alpha_i > 1$. Une base de $\mathfrak{P}_{iS_i^x}^x$ est

$[u, \varphi_i(\theta)]$, mais si $\mu(\theta)$ n'appartient pas à \mathfrak{P}_i^x , on peut écrire :

$$u = - \frac{\prod_{i=1}^q \varphi_i^{\alpha_i}(\theta)}{\mu(\theta)},$$

et par suite $\mathfrak{P}_{iS_i^x}^x$, est engendré dans $(A_S^x)_{S_i^x}$ par $\varphi_i(\theta)$, et $(A_S^x)_{S_i^x}$ est local

régulier de dimension 1, donc intégralement clos. Ainsi $A_S[\theta]$ est intégralement clos, d'après la remarque de (II, 2).

8. - Essayons d'exprimer la condition " $\mu(\theta)$ n'appartient pas à \mathfrak{P}_i^x ", à l'aide du polynôme $\mu(x)$ et même à l'aide de $\varphi(x)$.

\mathfrak{P}_i^x étant engendré par $\varphi_i(\theta)$ et $u, \mu(\theta)$ appartient à \mathfrak{P}_i^x si, et seulement si, il existe $\bar{\lambda}(\theta)$ dans A_S^x et $p_S(\theta)$ dans $\mathfrak{P}_S A_S^x$, tels que :

$$\mu(\theta) = \bar{\lambda}(\theta)\varphi_i(\theta) + p_S(\theta).$$

De façon générale, si $f(\theta) = a_0 + \dots + a_{n-1}\theta^{n-1}$, $a_i \in A_S$, $i = 0, \dots, n-1$, appelons $f(x)$ le polynôme $a_0 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$. Considérons alors $\Psi(x) = \bar{\lambda}(x)\varphi_i(x) + p_S(x)$. Le reste de la division de $\Psi(x)$ par $\varphi_i(x)$ a tous ses coefficients dans \mathfrak{P}_S .

Il en est de même du reste de la division de $\mu(x)$ par $\varphi_i(x)$. On a, en effet, $\psi(x) - \mu(x) = \eta(x)\varphi(x)$, $\eta(x)$ étant un certain polynôme de $A_S[x]$, puisque $\psi(0) - \mu(0)$ est nul. Nous pouvons donc écrire :

$$\mu(x) = \psi(x) + \eta(x) \left[\prod_{i=1}^q \varphi_i^{\alpha_i}(x) \right] + p_S'(x),$$

$p_S'(x)$ étant un polynôme à coefficients dans \mathfrak{P}_S .

Le reste de la division de $\mu(x)$ par $\varphi_i(x)$, comme celui de la division de $\psi(x)$ et $p_S'(x)$ par $\varphi_i(x)$ est à coefficients dans \mathfrak{P}_S . Réciproquement,

s'il en est ainsi, $\mu(\theta)$ appartient bien à \mathfrak{P}_i^x ; mais il revient au même de dire que le reste de la division de $\mu(x)$ par $\psi_i(x)$ a ses coefficients dans \mathfrak{P}_S , ou que le reste de la division de $\psi(x)$ par $\psi_i(x)$ a ses coefficients dans \mathfrak{P}_S^2 .

Donc, une condition nécessaire pour que $A[\theta]$ soit intégralement clos est que pour tout S relatif à un idéal premier \mathfrak{P} de A , de rang 1, on ait la condition (C) suivante :

(C) : "Si α_i est supérieur ou égal à 2, le reste de la division de $\psi(x)$ par $\psi_i(x)$ n'a pas tous ses coefficients dans \mathfrak{P}_S^2 ".

De plus, si (C) est réalisée, alors la condition (H_1) est vérifiée dans $A[\theta]$, (II, 4).

9. - Nous allons montrer que si (H_1) est vérifiée dans $A[\theta]$, alors (H_2) l'est également. Nous nous appuyerons sur un théorème de M. NAGATA (B.T. [3], page 76, corollaire 4) :

"Soit \mathfrak{o} un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, dans lequel (H_1) est réalisée. Si un idéal principal (a) de \mathfrak{o} , a un idéal premier essentiel immergé \mathfrak{q} , \mathfrak{q} est aussi un idéal premier essentiel immergé pour (b) , b étant un élément non nul quelconque de \mathfrak{q} ".

Supposons que (H_2) ne soit pas réalisée dans A^x , (H_1) l'étant. Il existe a^x dans A^x , tel que (a^x) a un idéal premier essentiel immergé \mathfrak{q}^x . Alors, pour a , non nul, appartenant à $\mathfrak{q}^x \cap A = \mathfrak{q}$, \mathfrak{q}^x est idéal premier essentiel immergé de $(a)^x$, idéal engendré par a dans A^x . Il existe donc b^x appartenant à A^x et n'appartenant pas à $(a)^x$, tel que b^x appartient à $(a)^x : \mathfrak{q}^x$. Posons $b^x = b_0 + \dots + b_{n-1} \theta^{n-1}$, $b_i \in A$, $i = 0, \dots, n-1$. Il existe un b_i , pour un certain i , qui n'appartient pas à (a) , idéal engendré par a dans A , puisque b^x n'appartient pas à $(a)^x$. En particulier, pour tout q , appartenant à \mathfrak{q} , $b^x q$ appartient à $(a)^x$ et par suite, $b_i q$ appartient à (a) , pour tout q appartenant à \mathfrak{q} . (On remarquera en effet, à ce propos, qu'un élément $c^x = c_0 + \dots + c_{n-1} \theta^{n-1}$, $c_i \in A$, $i = 0, \dots, n-1$, appartient à $(a)^x$ si, et seulement si, tous les c_i appartiennent à (a)). Or, ceci montre que $(a) : \mathfrak{q}$ contient effectivement (a) , donc que \mathfrak{q} est compris dans un idéal premier de (a) . Or \mathfrak{q} n'est pas de rang 1, puisqu'il a même rang que \mathfrak{q}^x . C'est impossible, puisque (H_2) est réalisé dans A .

10. - En résumé de cette étude, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. - Soit A un anneau, à élément unité, noethérien, intégralement clos,

sans diviseurs de zéro, plongé dans un suranneau B commutatif et sans diviseurs de zéro, ayant même unité que A , et soit θ un élément de B entier sur A , dont le polynome caractéristique sur A est noté $\varphi(x)$.

Soit \mathfrak{p} un idéal premier de rang 1 de A , posons $S = A - \mathfrak{p}$. A_S est un anneau local régulier de dimension 1, d'idéal maximal \mathfrak{p}_S . Soit $\bar{\varphi}_{\mathfrak{p}_S}(x)$, le polynome déduit de $\varphi(x)$ par passage aux classes des coefficients, modulo \mathfrak{p}_S , et soit $\prod_{i=1}^q \bar{\varphi}_i^{\alpha_i}(x)$, sa décomposition dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$ en facteurs premiers.

Soient $\bar{\varphi}_i(x) = \bar{\beta}_0 + \dots + \bar{\beta}_{n_i} x^{n_i}$, $\bar{\beta}_i \in \frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}$, $i = 0, \dots, n_i$, et $\varphi_i(x) = \beta_0 + \dots + \beta_{n_i} x^{n_i}$, où β_i est un représentant dans A_S de $\bar{\beta}_i$.

Alors pour que $A[\theta]$ soit intégralement clos, il faut et il suffit que, pour tout idéal premier \mathfrak{p} de rang 1 de A , la condition (C) suivante soit réalisée :

(C) : "Pour tout i , tel que α_i est supérieur ou égal à 2, le reste de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_i(x)$ n'a pas ses coefficients tous dans \mathfrak{p}_S^2 ."

REMARQUE. - Si un idéal premier \mathfrak{p} est tel que, dans la décomposition de $\bar{\varphi}_{\mathfrak{p}_S}$, il y ait un α_i supérieur ou égal à 2, alors $\varphi(x)$ a une racine double modulo \mathfrak{p}_S . Son discriminant d doit être nul modulo \mathfrak{p}_S . Or d appartient à A et (d) a pour idéaux premiers essentiels des idéaux $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r$ de A ; tous de rang 1. Il suffira de vérifier (C) pour ces idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$.

11. - Application au cas où A est l'anneau des entiers :

Remarquons d'abord d'une façon générale, que $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}$ est isomorphe au corps des quotients de $\frac{A}{\mathfrak{p}}$, donc à $\frac{A}{\mathfrak{p}}$, dans le cas où A est l'anneau des entiers, \mathfrak{p} désignant un idéal premier de A . Dans chaque classe de $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}$, il existe un élément de A . On peut donc relever $\bar{\varphi}_i(x)$ dans $A[x]$, au lieu de le relever dans $A_S[x]$, de sorte que la règle du paragraphe (II, 10) devient :

"Soit $\varphi(x)$ le polynome caractéristique de θ sur l'anneau des entiers A .

Soit $d = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs premiers du discriminant d de $\varphi(x)$. Désignons par $\mathfrak{p}_i = (p_i)$ l'idéal engendré par p_i dans A . Soit $\bar{\varphi}_{\mathfrak{p}_i}(x)$ le polynome déduit de $\varphi(x)$ par passage aux classes des coefficients modulo \mathfrak{p}_i et soit

$$\bar{\varphi}_{p_i}(x) = \prod_{j=1}^{r_i} \bar{\varphi}_{j_i}^{\alpha_{ji}}(x), \text{ la décomposition de } \bar{\varphi}_{p_i}(x) \text{ dans } \frac{\Lambda}{p_i}[x].$$

Soient

$$\bar{\varphi}_{j_i}(x) = \bar{\beta}_0^i + \dots + \bar{\beta}_{n_{ji}}^i x^{n_{ji}},$$

$$\bar{\beta}_k^i \in \frac{\Lambda}{p_i}, k = 0, \dots, n_{ji}$$

et

$$\varphi_{j_i}(x) = \beta_0^i + \dots + \beta_{n_{ji}}^i x^{n_{ji}},$$

β_k^i étant un représentant dans Λ de $\bar{\beta}_k^i$.

Alors pour que Λ^x soit intégralement clos, il faut et il suffit que la condition (C) suivante soit réalisée :

(C) : le reste de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi_{j_i}(x)$ relatif à j et i , tels que α_{ji} est supérieur ou égal à 2, n'a pas tous ses coefficients multiples de p_i^2 ."

EXEMPLES. - On pourra examiner les cas

$$\varphi(x) = x^2 - x - 1,$$

$$\varphi(x) = x^2 - 2x - 4, \quad \varphi(x) = x^3 - 3x - 5,$$

$$\varphi(x) = x^3 - 3x - 10.$$

12. - Application au cas $\Lambda = K[x]$, K étant un corps algébriquement clos, θ étant racine du polynôme en y , à coefficients dans $K[x]$, $y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n$, irréductible dans $K(x)[y]$.

Désignons par C la courbe plane $y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = \varphi(x, y) = 0$. Alors la condition du paragraphe (II, 10), pour que $\Lambda[\theta]$ soit intégralement clos est équivalente à la suivante :

"C n'a pas de point double"

Ceci est d'ailleurs bien connu en géométrie algébrique. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de Λ engendré par $x - a$, $a \in K$. On peut supposer $a = 0$, au besoin, en faisant un changement de variable. $A_{\mathfrak{p}}$ est l'anneau formé des éléments $\frac{f(x)}{g(x)}$,

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes de $K[x]$, $g(x)$ n'étant pas divisible par x . Si f_0 et g_0 sont les termes constants de $f(x)$ et $g(x)$, g_0 non nul, on vérifiera que $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_0}{g_0}$ modulo $\mathcal{P}_S - \frac{\mathcal{A}_S}{\mathcal{P}_S}$ est donc isomorphe au corps K . $\overline{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}_S}$ s'obtient en faisant $x = 0$ dans $\varphi(x, y)$ d'où :

$$\overline{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}_S} = y^n + a_1(0) y^{n-1} + \dots + a_n(0),$$

et la décomposition dans $\frac{\mathcal{A}_S}{\mathcal{P}_S}[y]$, c'est-à-dire dans $K[y]$, est : $\prod_{i=1}^q (y - a_i)^{\alpha_i}$, où les éléments a_i sont dans K et sont racines de $\overline{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}_S}$, la multiplicité de la racine a_i étant α_i . Les éléments a_i sont les ordonnées des points où $x = 0$ coupe C . Considérons un facteur $y - a_i$, d'exposant α_i plus grand que 1, s'il y en a. Nous pouvons supposer $a_i = 0$ (en faisant, au besoin, le changement de variables $Y = y - a_i$).

Appliquons la condition du paragraphe (II, 10), en remarquant d'abord qu'il n'y a pas de terme constant dans $\varphi(x, y)$ et qu'il n'y a pas de terme de la forme by , b appartenant à K non nul. Le reste de la division de $\varphi(x, y)$ par y n'est pas à coefficients multiples de x^2 , si, et seulement si, il existe dans $\varphi(x, y)$ un terme ax , a appartenant à K et non nul. D'où le résultat énoncé au début.

13. - Application au cas $\mathcal{A} = K[x, y]$, K étant un corps algébriquement clos, et θ étant racine du polynôme en z , à coefficients dans $K[x, y]$, irréductible dans $K(x, y)[z]$: $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$.

Désignons par S la surface $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = \varphi(x, y, z) = 0$.

Un raisonnement analogue au précédent montre que la condition du paragraphe (II, 10) est équivalente à :

" S n'a pas de courbes singulières."

EXEMPLE. - Si $z^2 = xy$, l'anneau correspondant est intégralement clos.

III. $\mathcal{A}[\theta]$ local régulier, \mathcal{A} l'étant.

1. - NOTATIONS. - \mathcal{A} est ici local régulier ; $u_1 \dots u_p$ est une base minimale de l'idéal maximal \mathfrak{m} de \mathcal{A} ; p est donc la dimension de \mathcal{A} . Soit B un suranneau de \mathcal{A} , commutatif et sans diviseurs de zéro. θ est un élément de B , entier sur \mathcal{A} . Soit $\varphi(x)$ le polynôme caractéristique de θ sur \mathcal{A} , et soit n son degré ; \mathfrak{m}^x est propre (I, 1, a), 2). De plus le polynôme $\overline{\varphi}(x)$ défini en

(I, 1, a), 2)) se déduit du polynôme $\varphi(x)$ par passage aux classes modulo \mathfrak{m} des coefficients (I, 2, remarque 3). Nous cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que $A[\theta]$ soit local régulier. $A[\theta]$ sera ainsi noté A^\times .

2. THÉORÈME. - Une condition nécessaire et suffisante pour que $A[\theta]$ soit local régulier, A l'étant, θ étant un élément de B , entier sur A , est que l'on ait :

(1) $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}'^\lambda(x)$, $\bar{\varphi}'(x)$ étant irréductible dans $\frac{A}{\mathfrak{m}}[x]$, λ étant un entier naturel plus grand ou égal à 1.

(2) Si λ est plus grand que 1, le reste de la division de $\varphi(x)$ par $\varphi'(x)$ n'a pas tous ses coefficients dans \mathfrak{m}^2 , $\varphi'(x)$ étant un polynôme de $A[x]$, de même degré que $\bar{\varphi}(x)$, tel qu'en prenant les classes modulo \mathfrak{m} de ses coefficients, on obtienne $\bar{\varphi}'(x)$.

1er point. - La condition (1) est équivalente à " A^\times est local" (I, 2). Si λ est égal à 1, l'idéal maximal \mathfrak{m}^\times de A^\times est alors engendré par \mathfrak{m} dans A^\times ; u_1, \dots, u_p est une base de \mathfrak{m}^\times et A^\times étant de dimension p , comme A , est local régulier.

2e point. - Supposons la condition (1) réalisée et supposons que λ est supérieur à 1. Démontrons que la condition (2) est réalisée, lorsque A^\times est local régulier, en supposant de plus que A a la dimension 1; u désignera un générateur de \mathfrak{m} .

\mathfrak{m}^\times est engendré par $\varphi'(\theta)$ et u . Comme A^\times est local régulier de dimension 1, cette base n'est pas une base minimale de \mathfrak{m}^\times : on peut tirer de cette base minimale une base minimale ayant un seul élément: cet élément ne peut être que $\varphi'(\theta)$. On peut écrire $\varphi(x) = [\varphi'(x)]^\lambda + u\mu(x)$, $\mu(x)$ étant un polynôme de $A[x]$ de degré $n-1$ au plus. Si $\mu(\theta)$ n'était pas inversible, on aurait: $\mu(\theta) = \varphi'(\theta)\lambda(\theta)$ avec $\lambda(\theta) = a_0 + \dots + a_{n-1}\theta^{n-1}$, $a_i \in A$, $i = 0, \dots, n-1$. Mais θ serait racine du polynôme, non identiquement nul, de degré inférieur à n :

$$[\varphi'(x)]^{\lambda-1} + u(a_0 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}).$$

C'est impossible et $\mu(\theta)$ est inversible. Or ceci est équivalent à la condition (2) (raisonnement déjà fait en II, 8).

3e point. - Supposons λ supérieur à 1 et les conditions (1) et (2) réalisées. p étant quelconque, montrons que A^\times est local régulier.

On peut écrire: $\varphi(x) = \varphi'(x)\lambda(x) + m_0 + \dots + m_{q-1}x^{q-1}$, $m_i \in \mathfrak{m}$, $i = 0, \dots, q-1$

q étant le degré de $\psi'(x)$.

Supposons que m_j n'appartienne pas à \mathfrak{m}^2 et posons

$$m_i = \lambda_1^i u_1 + \dots + \lambda_p^i u_p, \quad i = 0, \dots, q-1.$$

Comme m_j n'appartient pas à \mathfrak{m}^2 , il existe pour $1 \leq r \leq p$, un λ_r^j n'appartenant pas à \mathfrak{m} ; en isolant u_r dans :

$$\psi'(\theta)\lambda(\theta) + \sum_{i=0}^{q-1} m_i \theta^i = 0,$$

il vient :

$$\psi'(\theta)\lambda(\theta) + \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^p \lambda_k^i u_k \theta^i + u_r (\lambda_r^0 + \dots + \lambda_r^{q-1} \theta^{q-1}) = 0$$

posons

$$\Lambda(\theta) = \psi'(\theta)\lambda(\theta) + \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^p \lambda_k^i u_k \theta^i,$$

et remarquons que $\Lambda(\theta)$ appartient à l'idéal $(u_1, \dots, u_{r-1}, u_{r+1}, \dots, u_p, \psi'(\theta))$, engendré par ces éléments dans A^x .

L'élément $\lambda_r^0 + \dots + \lambda_r^{q-1} \theta^{q-1}$ est inversible puisque λ_r^j n'appartient pas à \mathfrak{m} (II, 8). Soit $\mu(\theta)$ son inverse. Alors on a $u_r = -\mu(\theta)\Lambda(\theta)$. Une base de l'idéal maximal \mathfrak{m}^x de A^x est $(u_1, \dots, u_{r-1}, u_{r+1}, \dots, u_p, \psi'(\theta))$: elle contient p éléments : A^x est local régulier.

4e point. - Il reste à prouver que, la condition (1) étant réalisée, et λ étant supérieur à 1, la condition (2) est réalisée, lorsque A^x est local régulier et lorsque la dimension de A , donc de A^x , p , est supérieur à 1. Pour $p = 1$, en effet, nous l'avons établi, (2e point). Si A^x est local régulier, une base minimale déduite de $(u_1, \dots, u_p) \psi'(\theta)$ comprend p éléments : un des u_i , soit u_p , s'exprime linéairement en fonction de $u_1, \dots, u_{p-1}, \psi'(\theta)$. L'idéal \mathfrak{i}^x engendré par u_1, \dots, u_{p-1} , dans A^x est premier et son intersection avec A est de rang $p-1$ et comprend l'idéal premier \mathfrak{i} engendré par u_1, \dots, u_{p-1} dans A . $\mathfrak{i}^x \cap A$ est distinct de \mathfrak{m} , dont le rang est p . $\mathfrak{i}^x \cap A$ ne peut contenir strictement \mathfrak{i} , car on aurait dans A la chaîne de $p+1$ idéaux premiers dans A , distincts : $(u_1), \dots, \mathfrak{i}, \mathfrak{i}^x \cap A, \mathfrak{m}$. Ceci est impossible et par suite $\mathfrak{i}^x \cap A = \mathfrak{i}$.

Désignons par $\psi'_i(x)$ le polynôme déduit du polynôme $\psi'(x)$ par passage aux

classes de $\frac{A}{\mathfrak{z}} = B$, et par $\overline{\varphi}'_i$, le polynome déduit de φ'_i en prenant les classes de B modulo $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}/\mathfrak{z}$: $\overline{\varphi}'_i$ est irréductible dans $\frac{B}{\mathfrak{n}}[x]$, puisque $\frac{B}{\mathfrak{n}}$ est isomorphe à A/\mathfrak{n} .

Cela étant, $B^x = \frac{A^x}{\mathfrak{z}^x}$ est local régulier et est extension entière de l'anneau local régulier $B = \frac{A}{\mathfrak{z}}$, qui est de dimension 1. Si η désigne la classe de θ modulo \mathfrak{z}^x , on peut écrire $B^x = B[\eta]$. On pourra vérifier que le polynome caractéristique de η , n'est autre que $\varphi'_i(x)$. La décomposition de ce polynome dans $\frac{B}{\mathfrak{n}}[x]$ est $\overline{\varphi}'_i(x) = [\overline{\varphi}_i(x)]^{\lambda_i}$, $\overline{\varphi}_i(x)$ étant irréductible dans $\frac{B}{\mathfrak{n}}[x]$, d'après ce que nous avons dit plus haut. De l'identité de la division par $\varphi'(x) : \varphi(x) = \varphi'(x)\lambda(x) + r(x)$, degré de $r(x) <$ degré de $\varphi'(x)$, on déduit :

$$\varphi'_i(x) = \varphi'_i(x)\lambda'_i(x) + r'_i(x), \text{ degré de } r'_i(x) < \text{ degré de } \varphi'_i(x), \dots$$

en prenant les classes, modulo \mathfrak{z} , des coefficients des polynomes. D'après le deuxième point, $r'_i(x)$ ne doit pas avoir tous ses coefficients dans \mathfrak{n}^2 et ceci entraîne que $r(x)$ n'a pas tous les siens dans \mathfrak{n}^2 .

Ainsi la condition (2) est réalisée.

IV. A $[\theta]$ intégralement clos dans son anneau complet des quotients ...

1. — Avant d'aborder le problème qui fait l'objet de cette partie et qui sera énoncé au paragraphe 8, il nous faut démontrer les généralisations suivantes de résultats figurant dans B.T. [3] :

Résultat R_1 : Un anneau \mathcal{O} noethérien est intégralement clos dans son anneau complet des quotients $\overline{\mathcal{O}}$, si et seulement si :

(H_1') : Pour tout idéal premier \mathfrak{P} , de rang 1, de \mathcal{O} , contenant un élément non diviseur de zéro, $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est un anneau local régulier de dimension 1.

(H_2') : a étant un élément de \mathcal{O} , qui n'est pas un diviseur de zéro, (a) n'a pas d'idéaux premiers essentiels immergés. (cf. II, 2).

Résultat R_2 : Soit un anneau noethérien \mathcal{O} . Supposons que, pour chaque idéal premier \mathfrak{P} , de rang 1, de \mathcal{O} , contenant un élément non diviseur de zéro, $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ est intégralement clos. Si un idéal principal (a) , a n'étant pas diviseur de zéro dans \mathcal{O} , a un idéal premier essentiel immergé \mathcal{Q} , pour tout élément b de \mathcal{Q} , non diviseur de zéro, (b) admet un idéal premier essentiel immergé. (B.T. [3], page 76, corollaire 4 ; cf. II, 9).

2. — RAPPEL. a. Soit $(0) = \bigcap_{i=1}^r \mathcal{Q}_i$, \mathcal{Q}_i étant \mathfrak{P}_i -primaire, $i = 1, \dots, r$.

Pour qu'un élément de \mathcal{O} soit diviseur de zéro, il faut et il suffit qu'il appartienne à un \mathfrak{p}_i .

b. Si \mathcal{O} ne contient que des éléments inversibles ou diviseurs de zéro, il est confondu avec $\bar{\mathcal{O}}$, donc intégralement clos. Dans la suite nous supposons toujours qu'il existe dans \mathcal{O} un élément non diviseur de zéro et non inversible.

c. Supposons que l'élément a de \mathcal{O} ne soit pas diviseur de \mathcal{O} , et soit $\frac{b}{a} = u$, un élément entier sur \mathcal{O} , alors il existe ℓ non diviseur de zéro dans \mathcal{O} , tel que pour tout entier naturel p , $u^p \ell$ appartient à \mathcal{O} . (Si u est racine du polynôme à coefficients dans A , $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, on peut prendre $\ell = a^{n-1}$).

d. Réciproquement, (B.T. [3], page 67, corollaire 3) : Soit \mathcal{O} un anneau noethérien, sous anneau d'un anneau \mathcal{O}' et soit b appartenant à \mathcal{O}' . S'il existe un élément a de \mathcal{O} , qui n'est pas diviseur de zéro dans \mathcal{O}' , tel que ab^n appartienne à \mathcal{O} , quel que soit l'entier naturel n , alors b est entier sur \mathcal{O} .

3. - "Soit un élément a non diviseur de zéro dans un anneau local noethérien \mathcal{O} , d'idéal maximal \mathfrak{p} de rang supérieur à 1, et soit b appartenant à $(a) : \mathfrak{p}$, alors $\frac{b}{a}$ est entier sur \mathcal{O} ". [Généralisation de B.T. [3], page 74, lemme 1].

Soit h appartenant à \mathfrak{p} et soit $c = \frac{b}{a} h$. D'après le choix de b , c appartient à \mathcal{O} . Supposons que c n'appartienne pas à \mathfrak{p} . Alors $(a) = (bh)$. Cela entraîne que b et h ne sont pas diviseurs de zéro. Il existe un idéal essentiel minimal \mathfrak{p}' de (h) de rang 1, (le rang d'un idéal principal dans un anneau noethérien est au plus 1, et comme ici h n'est pas diviseur de zéro, il ne peut appartenir à aucun idéal premier essentiel de (0)). \mathfrak{p}' est différent de \mathfrak{p} , car autrement, \mathfrak{p} serait de rang 1. a appartient à \mathfrak{p}' , et, \mathfrak{p}' étant de rang 1, est idéal premier essentiel de (a) . Soit \mathfrak{q}' la composante \mathfrak{p}' -primaire de (a) , (bien déterminée, puisque \mathfrak{p}' est minimal); puisque \mathfrak{p} est différent de \mathfrak{p}' , $\mathfrak{q}' : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}'$ et par suite b appartient à \mathfrak{q}' . Alors $(a) = (bh)$ montre que $\mathfrak{q}' \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}' \mathfrak{p}' \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}'}$, ce qui est une contradiction du corollaire 1 de la proposition 1 du chapitre "J-radical" de B.T. [3], parce que $\mathfrak{p}' \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}'}$ est le J-radical de $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}'}$.

Nous voyons que c appartient à \mathfrak{p} et de là que $(\frac{b}{a})^n h$ appartient à \mathfrak{p} , pour tout entier naturel n . Comme on peut prendre h non diviseur de zéro dans \mathcal{O} donc dans $\bar{\mathcal{O}}$, $\frac{b}{a}$ est entier sur \mathcal{O} , (IV, 2 d.).

4. - "Soit \mathcal{O} un anneau noethérien et soit a un élément de \mathcal{O} non diviseur de zéro. Si (a) a un idéal premier essentiel immergé, il existe b non nul

appartenant à \mathcal{O} , tel que $\frac{b}{a}$ est entier sur \mathcal{O} , et tel que $\frac{b}{a}$ n'appartient pas à \mathcal{O} . Réciproquement s'il existe un tel élément b , ou bien il existe un idéal premier essentiel \mathfrak{P} de rang 1 de (a) , tel que $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ n'est pas intégralement clos, ou bien (a) a un idéal essentiel immergé." (Généralisation de B.T. [3], page 75, proposition 2).

Supposons que (a) ait un idéal premier essentiel immergé \mathcal{Q} . Formons l'anneau des quotients $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$: on l'obtient ainsi: on fait d'abord l'homomorphisme $\sigma: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}' = \frac{\mathcal{O}}{\mathfrak{N}}$, \mathfrak{N} étant l'intersection des composantes primaires de (0) contenues dans \mathcal{Q} . Soit $\mathcal{Q}' = \frac{\mathcal{Q}}{\mathfrak{N}}$. Ensuite on prend l'anneau ordinaire des quotients $\mathcal{O}'_{\mathcal{Q}'}$. C'est cet anneau que l'on appelle aussi $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$. Remarquons que \mathcal{Q} est de rang supérieur à 1, car il ne peut être de rang 1, (a) ayant alors un idéal premier essentiel de rang 0, ce qui ne peut être (IV, 2, a.): donc $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$ noté aussi $\mathcal{O}'_{\mathcal{Q}'}$, est de rang supérieur à 1. Il existe b'' appartenant à $\mathcal{O}'_{\mathcal{Q}'}$, et à $a'_{\mathcal{Q}'}$: $\mathcal{O}'_{\mathcal{Q}'}$, et n'appartenant pas à $a'_{\mathcal{Q}'}$, a' étant la classe de a dans \mathcal{O}' . a' n'est pas diviseur de zéro dans \mathcal{O}' , car, autrement, il existerait λ n'appartenant pas à \mathfrak{N} , tel que $a\lambda$ appartienne à \mathfrak{N} ; avec les notations de (IV, 2, a.), λ n'appartient pas, par exemple, à \mathcal{Q}_1 et par suite a appartiendrait à \mathfrak{P}_1 , ce qui n'est pas (IV, 2, a.). D'après le paragraphe (IV, 3), $\frac{b''}{a'}$ est entier sur $\mathcal{O}'_{\mathcal{Q}'}$, et n'appartient pas à $\mathcal{O}'_{\mathcal{Q}'}$:

$$\left(\frac{b''}{a'}\right)^n + \frac{c'_1}{s'_1} \left(\frac{b''}{a'}\right)^{n-1} + \dots + \frac{c'_n}{s'_n} = 0, \quad s'_i \in S' = \mathcal{O}' - \mathcal{Q}', \quad c'_i \in \mathcal{O}', \quad i = 1, \dots, n.$$

On peut supposer $b'' = \frac{c'}{s'}$, $c' \in \mathcal{O}'$, $s' \in S'$. Posons $b'_1 = s'_1 s'_2 \dots s'_n c'$; $\frac{b'_1}{a'^n}$ est entier sur \mathcal{O}' . Donc, pour tout entier naturel p , $\left(\frac{b'_1}{a'^n}\right)^p \mathcal{O}'$ appartient à \mathcal{O}' , pour un \mathcal{O}' qu'on peut prendre égal à a'^{n-1} , (IV, 2, c.). Si donc, b_1 et \mathcal{O} sont des représentants dans \mathcal{O} de b' , \mathcal{O}' , on peut écrire:

$$b_1^p \mathcal{O} = a^p c_p + n_p, \quad c_p \in \mathcal{O}, \quad n_p \in \mathfrak{N}.$$

Soient, par numérotation convenable, $\mathcal{Q}_{i+1}, \dots, \mathcal{Q}_r$, les idéaux primaires de (0) non compris dans \mathcal{Q} , donc rencontrant $S = \mathcal{O} - \mathcal{Q}$; soit m_j un élément de $\mathcal{Q}_j \cap S$, $j = i+1, \dots, r$, et $m = \prod_{j=i+1}^r m_j$.

mn est nul pour tout $n \in \mathfrak{N}$, m n'étant pas nul, puisque S est multiplicativement fermé et ne contient pas zéro. Donc,

$$(mb_1)^p \mathcal{O} = a^p d_p, \quad d_p \in \mathcal{O}.$$

Comme on peut prendre $m = a^{n-1}$, non diviseur de zéro dans \mathcal{O} et dans $\bar{\mathcal{O}}$, $\frac{mb_1}{a}$ est entier sur \mathcal{O} (IV, 2, d.). Supposons que $\frac{mb_1}{a}$ appartienne à \mathcal{O} , alors $\frac{m'b'_1}{a}$ appartient à \mathcal{O}' , m' appartenant à S' , $\frac{b'_1}{a}$ appartiendrait à $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}'}$ et aussi $\frac{b''}{a}$, ce qui n'est pas. Il suffit alors de prendre $b = mb_1$.

Pour la deuxième partie du théorème, $\frac{b}{a}$ est entier sur \mathcal{O} et n'appartient pas à \mathcal{O} . Soient $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_h$, les idéaux premiers essentiels de (a) . Ils sont tous minimaux par hypothèse, donc de rang 1. Soit $(a) = \bigwedge_1 \cap \dots \cap \bigwedge_h$, \bigwedge_i étant \mathfrak{p}_i -primaire. Puisque $\frac{b}{a}$ est entier sur \mathcal{O} , $\frac{b'}{a}$ est entier sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}$ donc dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}_i}$, (\mathfrak{p}_i étant l'intersection des idéaux primaires de (0) contenus dans \mathfrak{p}_i , x' désigne la classe de x modulo \mathfrak{p}_i).

$b'_{\mathfrak{p}_i}$ est contenu dans $a'_{\mathfrak{p}_i} = \bigwedge'_i \mathfrak{p}_i$, et par suite b' appartient à $\bigwedge'_i \mathfrak{p}_i \cap \mathcal{O}' = \bigwedge'_i$. Donc b appartient à $(\bigwedge_i, \mathfrak{p}_i)$ et comme \bigwedge_i contient \mathfrak{p}_i , b appartient à \bigwedge_i pour $i = 1, \dots, h$ et b appartient à (a) . Il y a contradiction.

5. - Si \mathcal{O} est intégralement clos dans $\bar{\mathcal{O}}$, et si \mathfrak{p} est un idéal premier de rang 1, contenant un élément non diviseur de zéro, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier de dimension 1 (NORTHCOTT [4]).

6. - La condition (H'_2) est nécessaire d'après la première partie du lemme du paragraphe (IV, 4).

La condition (H'_1) est nécessaire d'après (IV, 5).

Les conditions (H'_1) et (H'_2) sont suffisantes d'après la deuxième partie du lemme du paragraphe (IV, 4).

La proposition R_1 est donc établie.

7. - DÉMONSTRATION de la proposition R_2 . - Soit b un élément non diviseur de zéro, autre que a , appartenant à \mathcal{O} . Considérons $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}'_1} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}'_1}$. Soit d' appartenant à $a'_{\mathfrak{p}'_1} : \mathcal{O}'_{\mathfrak{p}'_1}$, et n'appartenant pas à $a'_{\mathfrak{p}'_1}$. $\frac{d'}{a}$ n'appartient pas à $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}'_1}$ et est entier sur $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}'_1}$, (IV, 3), (remarquer en passant que a' et b' ne sont pas des diviseurs de zéro dans \mathcal{O}' , démonstration déjà faite en (IV, 4)).

Soit $c' = \frac{d'}{a} b'$; c' appartient à $\mathcal{O}'_{\mathfrak{p}'_1}$. $\frac{d'}{a} = \frac{c'}{b'}$ montre que $\frac{c'}{b'}$ est entier

sur \mathfrak{O}'_q , et qu'il n'appartient pas à \mathfrak{O}'_q . Alors un raisonnement déjà fait à la première partie du paragraphe (IV, 4) montre qu'il existe un élément $\frac{e}{b}$ n'appartenant pas à \mathfrak{O} et entier sur \mathfrak{O} , ($e \in \mathfrak{O}$). D'après le théorème du paragraphe (IV, 4), (b) admet un idéal premier essentiel immergé.

8. - Nous sommes maintenant en mesure d'aborder le problème qui fait l'objet de cette quatrième partie :

A est ici un anneau avec diviseurs de zéro, noethérien, intégralement clos dans son anneau complet des quotients et de dimension supérieur ou égal à 1. A vérifie de plus les deux hypothèses suivantes :

(1) les idéaux premiers essentiels de (0) sont tous minimaux.

(2) appelons idéal utile, un idéal premier essentiel de (0) , contenu dans un idéal premier de rang 1 de A . Alors, si \mathfrak{U} est un idéal utile, A/\mathfrak{U} est intégralement clos.

Soit B un suranneau de A , commutatif, dont l'élément unité est celui de A et soit θ un élément de B , racine d'un polynôme $\varphi(x)$, unitaire, à coefficients dans A , θ n'étant racine d'aucun polynôme de $A[x]$ de degré inférieur à celui de $\varphi(x)$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que $A[\theta]$, noté aussi A^x , soit intégralement clos. n est le degré de $\varphi(x)$.

9. - Tout idéal premier de rang 1 de A^x a pour restriction dans A un idéal premier de rang 1 :

En effet soit un idéal premier \mathfrak{p}^x , de rang 1, de A^x , $\mathfrak{p}^x \cap A = \mathfrak{p}$ est un idéal premier de A de rang supérieur ou égal à 1. \mathfrak{p} contient donc un élément a non diviseur de zéro, qui est non diviseur de zéro dans A^x (utiliser le fait que A^x est un A -module libre). aA^x admet \mathfrak{p}^x comme idéal premier essentiel, donc $aA^x : \mathfrak{p}^x$ comprend effectivement aA^x : il existe $b^x = b_0 + \dots + b_{n-1}\theta^{n-1}$, avec $b_i \in A$, $i = 0, \dots, n-1$, et avec un b_k pour $0 \leq k \leq n-1$, qui n'appartient pas à aA , tel que $b^x \mathfrak{p}^x$ appartient à $a^x A$, pour tout \mathfrak{p}^x appartenant à \mathfrak{p}^x . En particulier $b^x \mathfrak{p}$ appartient à aA^x , pour tout \mathfrak{p} appartenant à \mathfrak{p} et $b_k \mathfrak{p}$ appartient à aA pour tout \mathfrak{p} appartenant à \mathfrak{p} . Comme b_k n'appartient pas à aA , ceci entraîne que \mathfrak{p} est compris dans un idéal premier de aA et que \mathfrak{p} est de rang 1, [à cause de (H'_2)].

10. - Tout idéal utile de A^x est un idéal utile de A .

Soit, en effet, \mathfrak{U}^x un idéal utile de A^x , compris donc dans l'idéal premier de rang 1 \mathfrak{p}^x . $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^x \cap A$ est un idéal premier de rang 1 de A (IV, 9),

contenant $\mathfrak{r}^x \cap A = \mathfrak{r}$, nécessairement de rang 0. Ainsi \mathfrak{r} est un idéal utile de A . La réciproque résultera de la démonstration qui suit (IV, 12).

11. - Soit \mathfrak{r} un idéal utile de A . Posons $S = A - \mathfrak{r}$. Considérons A_S^x . A_S^x s'obtiendra en faisant d'abord l'homomorphie $\sigma : A^x \rightarrow \frac{A^x}{\mathfrak{r}^x}$, \mathfrak{r}^x étant égal à $\mathfrak{r}A^x$, (remarquer que \mathfrak{r} est la composante primaire de (\mathfrak{o}) relative à \mathfrak{r} , dans A), puis en prenant les quotients au sens ordinaire par $\sigma(S)$:

$$A_S^x = \sigma(A^x)_{\sigma(S)} = \left(\frac{A}{\mathfrak{r}} [e^x] \right)_{\sigma(S)} = A_S [e^x],$$

où e^x est racine de $\varphi_{\mathfrak{r}}(x)$ déduit de $\varphi(x)$ par passage aux classes modulo \mathfrak{r} des coefficients, e^x n'étant racine d'aucun polynôme de $\frac{A}{\mathfrak{r}} [x]$ de degré inférieur. A_S est le corps des quotients de $\frac{A}{\mathfrak{r}}$. Les idéaux premiers de A^x , dont l'intersection avec A est \mathfrak{r} , sont en correspondance biunivoque avec les idéaux premiers de $A_S [e^x]$ sur (\mathfrak{o}) . Ils sont donnés par la décomposition dans $A_S [x]$ de $\varphi_{\mathfrak{r}}(x)$

(I, 1). Soit $\varphi_{\mathfrak{r}}(x) = \prod_{i=1}^{r_{\mathfrak{r}}} f_i(x)$; puisque $\frac{A}{\mathfrak{r}}$ est intégralement clos par hypothèse, les $f_i(x)$ sont dans $\frac{A}{\mathfrak{r}} [x]$. Les $r_{\mathfrak{r}}$ idéaux premiers, dont l'intersection avec A est \mathfrak{r} , sont engendrés respectivement par $f_i'(\theta)$ et \mathfrak{r} , $i = 1, \dots, r_{\mathfrak{r}}$, $f_i'(x) = f_i(x)$ modulo \mathfrak{r} .

12. - Voyons maintenant comment sont obtenus les idéaux premiers de A^x de rang 1, ayant l'idéal \mathfrak{p} pour restriction à A . Appelons \mathfrak{r} l'idéal premier de (\mathfrak{o}) contenu dans \mathfrak{p} . \mathfrak{r} est la composante primaire de (\mathfrak{o}) relative à \mathfrak{r} . Les idéaux de rang 1, premiers, dont l'intersection avec A est \mathfrak{p} , sont en correspondance biunivoque avec les idéaux premiers de A_S^x , $S = A - \mathfrak{p}$, dont l'intersection avec A_S est \mathfrak{p}_S . On verrait comme en (IV, 11), que $A_S^x = A_S [e^x]$, e^x étant racine de $\varphi_{\mathfrak{r}}(x)$. Les idéaux premiers de A_S^x , dont l'intersection avec A_S est \mathfrak{p}_S , sont donnés par la décomposition de $\varphi_{\mathfrak{r}}(x)$ dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S} [x]$, donc par les décompositions des $f_i(x)$ dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S} [x]$. On trouvera donc toujours un idéal premier de rang 1 de A_S^x , contenant \mathfrak{r}_S^x , engendré dans A_S^x par $f_i(\theta^x)$, donc un idéal premier de rang 1 de A^x , contenant l'idéal premier \mathfrak{r}^x , engendré par $f_i'(\theta)$ et \mathfrak{r} dans A^x , dont l'intersection avec A est \mathfrak{r} :

Tout idéal premier de A^x , dont la restriction à A est un idéal utile de A , est un idéal utile de A^x .

13. - Supposons A^x intégralement clos. L'idéal premier \mathfrak{r}^x de A^x engendré par

$f_i'(\theta)$ et \mathfrak{U} , idéal utile de \mathfrak{A} , est un idéal utile de \mathfrak{A}^x : la composante primaire de (\mathfrak{a}) relative à \mathfrak{U}^x est \mathfrak{U}^x lui-même. Il n'y a donc pas d'idéaux \mathfrak{U}^x -primaires distincts de \mathfrak{U}^x dans \mathfrak{A}^x et ceci a lieu si et seulement si $\beta_i = 1$, (définition de β_i en IV, 11).

Par ailleurs \mathfrak{p}^x étant un idéal premier de \mathfrak{A}^x , dont l'intersection avec \mathfrak{A} est l'idéal premier \mathfrak{p} de rang 1, contenant \mathfrak{U} , \mathfrak{p}^x est un idéal de rang 1, qui ne doit contenir qu'un seul idéal premier essentiel de (\mathfrak{a}) , dont l'intersection avec \mathfrak{A} est obligatoirement \mathfrak{U} . Ceci a lieu si et seulement si, en posant $S = \mathfrak{A} - \mathfrak{p}$, $\overline{F}_i(S)$ désignant le polynôme déduit de $f_i(x)$ par passage aux classes des coefficients dans $\frac{\mathfrak{A}S}{\mathfrak{p}S}$, $\overline{F}_i(S)$ et $\overline{F}_j(S)$ n'ont pas de facteurs en commun pour tout $i, j, i \neq j$.

14. - Soit, enfin \mathfrak{p}^x un idéal premier de \mathfrak{A}^x de rang 1, contenant un seul idéal premier essentiel de (\mathfrak{a}) , \mathfrak{U}^x , qui est aussi la composante primaire de (\mathfrak{a}) relative à \mathfrak{U}^x lui-même. Posons $S^x = \mathfrak{A}^x - \mathfrak{p}^x$ et considérons $\mathfrak{A}_{S^x}^x$; $\mathfrak{A}_{S^x}^x = \left(\frac{\mathfrak{A}^x}{\mathfrak{U}^x}\right) S^x/\mathfrak{U}^x$

Or $\frac{\mathfrak{A}^x}{\mathfrak{U}^x} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{U}}[\theta^x]$, le polynôme caractéristique de θ^x sur $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{U}}$ étant $f_i(x)$, (\mathfrak{U}^x étant engendré par $f_i'(\theta)$ et \mathfrak{U}). On peut écrire :

$$\left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{U}}[\theta^x]\right)_{S^x/\mathfrak{U}^x} = \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{U}}[\theta^x]\right)_{S/\mathfrak{U}} \frac{S^x}{S} \frac{S^x}{\mathfrak{U}^x} = (\mathfrak{A}_S[\theta^x])_{S^x/\mathfrak{U}^x},$$

(on pose $S = \mathfrak{A} - \mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^x \cap \mathfrak{A}$).

Soit \mathfrak{p}_S^x l'idéal $\frac{\mathfrak{p}^x}{\mathfrak{U}^x} \mathfrak{A}_S[\theta^x]$ et soit $S_S^x = \mathfrak{A}_S[\theta^x] - \mathfrak{p}_S^x$. Comme S_S^x contient S^x/\mathfrak{U}^x , on peut écrire

$$(\mathfrak{A}_S[\theta^x])_{S_S^x} = \left[(\mathfrak{A}_S[\theta^x])_{\frac{S^x}{\mathfrak{U}^x}} \right]_{S_S^x} = \left(\frac{\mathfrak{A}^x}{S^x}\right)_{S_S^x}.$$

Si \mathfrak{A}^x est supposé intégralement clos, $\mathfrak{A}_{S^x}^x$ l'est d'après la condition (H_1') et par suite aussi $(\mathfrak{A}_S[\theta^x])_{S_S^x}$. Comme ceci a lieu pour tous les idéaux premiers \mathfrak{p}^x de \mathfrak{A}^x , contenant \mathfrak{U}^x , dont l'intersection avec \mathfrak{A} est \mathfrak{p} , on peut voir (II, 2, remarque) que $\mathfrak{A}_S[\theta^x]$ est intégralement clos.

Donc pour que \mathfrak{A}^x soit intégralement clos, il est nécessaire, que, \mathfrak{p} étant un idéal premier de rang 1 de \mathfrak{A} quelconque, dont on appelle \mathfrak{U} l'idéal utile,

et S étant égal à $A - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}_S[x](f_i(x))$, $i = 1, \dots, r_n$, soit intégralement clos.

Si cette condition est réalisée, la condition (H'_1) est réalisée dans A^x .

Si la condition (H'_1) est réalisée dans A^x , un raisonnement, utilisant R_2 , analogue à celui du paragraphe (II, 8) montre que la condition (H'_2) l'est aussi.

15. - On peut donc énoncer :

Pour que $A[\theta]$ soit intégralement clos, sous les hypothèses énoncées au paragraphe (IV, 8) il faut et il suffit que les conditions C_1, C_2, C_3 suivantes soient simultanément réalisées :

C_1 : \mathfrak{a} étant un idéal utile quelconque,

$$\mathfrak{a}_n(x) = \prod_{i=1}^{r_n} f_i(x),$$

$f_i(x)$ appartenant à $\frac{A}{\mathfrak{a}}[x]$, et étant irréductible dans $\frac{A}{\mathfrak{a}}[x]$, $i = 1, \dots, r_n$.

C_2 : Si $\bar{f}_i^{(S)}(x)$ désigne ce que devient $f_i(x)$ modulo \mathfrak{p}_S , $S = A - \mathfrak{p}$, \mathfrak{p} étant un idéal premier quelconque de rang 1 de A , dont on note \mathfrak{a} l'idéal utile, $\bar{f}_i^{(S)}(x)$ et $\bar{f}_j^{(S)}(x)$ n'ont pas de facteur commun dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$, pour tout i et j , variant de 1 à r_n , $i \neq j$.

C_3 : Si $\bar{f}_i^{(S)}(x) = \prod_{k=1}^h \bar{g}_{ik}^{\alpha_{ik}}(x)$ est la décomposition de $\bar{f}_i^{(S)}(x)$ en facteurs premiers dans $\frac{A_S}{\mathfrak{p}_S}[x]$, et $\bar{g}_{ik}(x)$ se relevant en un polynôme $g_{ik}(x)$, de même degré que $\bar{g}_{ik}(x)$, dans $A_S[x]$, le reste de la division de $f_i(x)$ par un $g_{ik}(x)$ relatif à un α_{ik} supérieur à 1, n'a pas tous ses coefficients dans \mathfrak{p}_S^2 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LAFON (J.-P.) et MAURY (G.). - Théorie des idéaux dans $A[\theta]$, extension simple d'un anneau A , C.R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 392-393.
- [2] MAURY (Guy). - Théorèmes de transfert de certaines propriétés de l'anneau $A[\theta]$ extension simple entière de A , C.R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 265-267.
- [3] NAGATA (Masayoshi). - Basic theorems on general commutative rings, Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto, Série A, t. 29, 1955, p. 59-77.
- [4] NORTHCOTT (D.G.). - Ideal theory. - Cambridge, University Press, 1953.