

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JULIEN PETRESCO

## **Relations fondamentales définissant les groupes libres**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 10 (1956-1957), exp. n° 2, p. 1-8

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1956-1957\\_\\_10\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A2_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).  
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT  
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1956/57

-:-:-:-

RELATIONS FONDAMENTALES DÉFINISSANT LES GROUPES LIBRES.

(Exposé par Julien PETRESCO, le 19.11.1956)

La représentation d'un groupe  $G$  en tant que groupe quotient  $F/N$  du groupe libre  $F$  de rang  $m$ , n'est évidemment pas unique. Nous montrons dans ce qui suit que,  $G$  étant lui-même un groupe libre, on peut construire tous les sous-groupes normaux  $N$  satisfaisant à

$$(a) \quad G \simeq F/N .$$

S'il s'agit en particulier de représenter  $G$ , libre, avec une seule relation fondamentale, on peut donner la forme générale de toutes ces relations.

Le fait que  $N$  ne caractérise pas le groupe  $G$ , conduit à la recherche d'autres sous-groupes de  $F$  pouvant être rattachés univoquement à  $G$ . B.H. Neumann [2] considère par exemple le groupe  $V_m(G)$  des relations identiques (fonctions de  $m$  variables prenant la valeur 1, pour toute suite de  $m$  éléments de  $G$ ). Ce groupe est, dans  $F$ , l'intersection de tous les sous-groupes normaux  $S$  tels que  $F/S$  soit isomorphe à un sous-groupe de  $G$ .  $V_m(G)$  est un sous-groupe complètement invariant et on montre également qu'il est, pour chaque représentation (a), le sous-groupe maximum de cette espèce à être contenu par  $N$ .

Plus récemment, B.H. Neumann et Hanna Neumann [3] considèrent le groupe  $U_m(G)$ , intersection de tous les  $N$  satisfaisant à (a). Il correspond dans  $G$  à ce qu'on pourrait appeler l'ensemble des relations identiques entre générateurs (fonctions de  $m$  variables prenant la valeur 1, pour toute suite de  $m$  générateurs de  $G$ ). Il semble qu'un certain parallélisme puisse être établi avec le groupe  $V_m(G)$ ;  $U_m(G)$  est un sous-groupe super-caractéristique (nous exposons les quelques propriétés se rattachant à cette notion) et on peut raisonnablement conjecturer que  $U_m(G)$  est maximum de cette espèce à être contenu par  $N$ .

Le fait de connaître les sous-groupes  $N$ , dans le cas de  $G$  libre, laisse espérer un calcul simple de  $U_m(G)$ ; il en est ainsi pour  $G$  cyclique

infini,  $U_m(G)$  se réduisant au sous-groupe commutateur de  $F$ . Dans le cas de  $G$  libre de rang  $n < m$ , on peut ramener le calcul à l'intersection des agrégats commutateurs d'indice  $m-n$  (voir [4]) relatifs à chaque décomposition en produit libre de groupes cycliques infinis de  $F$ .

### 1.- Représentation des groupes libres.

Soit  $G = [[A]]$ ,  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  le groupe libre de rang  $n$ . On peut également définir ce groupe avec une  $m$ -suite  $A_m = \{a_1, \dots, a_n, \dots, a_m\}$   $n \leq m$ , de générateurs et la  $m-n$ -suite de relations fondamentales :

$$(0) \quad a_{n+1} = 1, \dots, a_m = 1$$

D'après la proposition 8.5 de [5].

(A). Si  $X_m$  et  $Y_m$  sont deux  $m$ -suites de générateurs de  $G$ , il existe une transformation  $\psi$  du groupe de Nielsen  $\mathcal{N}_m(G)$  telle que

$$Y_m = \psi X_m$$

D'autre part, d'après la proposition 2.2 de [6], on a pour tout groupe  $G$  :

(B). Si  $X_m$  est une  $m$ -suite de générateurs de  $G$ , si

$$R_t(x_i) = 1, \quad t = 1, 2, \dots$$

est une suite de relations fondamentales entre les éléments de  $X_m$  et si  $Y_m = \psi X_m$ , où  $\psi \in \mathcal{N}_m(G)$ ,

$$R_t(\psi^{-1} y_i) = 1, \quad t = 1, 2, \dots$$

constitue un système de relations fondamentales entre les éléments de  $Y_m$ .

On peut montrer facilement à l'aide de ces deux propositions que :

1.1.- Toute  $m$ -suite  $X_m$  de générateurs du groupe libre  $G$  de rang  $n$  admet un système de relations fondamentales de la forme

$$(1) \quad \psi x_{n+1} = 1, \dots, \psi x_m = 1,$$

où  $\psi \in \mathcal{N}_m(G)$ , et dans ce cas

$$(1') \quad \psi x_1, \dots, \psi x_n$$

constitue une base libre de  $G$ .

Soit en effet un groupe  $G = [X_m]$  défini par les relations (1). D'après les propriétés du groupe de Nielsen [5], si  $Y_m = \psi X_m$ , on a  $G = [Y_m]$  et d'après (B) appliquée à (1)

$$\psi(\psi^{-1}y_{m+1}) = 1, \dots, \psi(\psi^{-1}y_m) = 1$$

ou encore

$$y_{m+1} = 1, \dots, y_m = 1$$

constitue un système de relations fondamentales pour  $Y_m$ , donc

$$G = [[y_1, \dots, y_m]].$$

Réciproquement, soit  $G$  un groupe libre de rang  $n$ , défini avec la suite  $A_m$  et les relations (0). Une  $m$ -suite de générateurs de  $G$  est, d'après (A), et du fait que  $\mathcal{Y}_m(G)$  est un groupe, de la forme  $X_m = \psi^{-1}A_m$ , donc, d'après (B) appliquée à (0)

$$\psi x_{n+1} = 1, \dots, \psi x_m = 1$$

constitue un système de relations fondamentales pour  $X_m$ .

Si l'on tient compte du théorème de Magnus [1]: si  $G = [X_m]$  est défini par une seule relation  $R(x_i) = 1$ , toute relation fondamentale entre les éléments de  $X_m$  est de la forme  $v(x_i).R(x_i).v^{-1}(x_i) = 1$ ;  $v(x_i)$  étant des mots quelconques formés avec les éléments de  $X_m$ , on déduit en particulier de 1.1 :

COROLLAIRE.- Pour qu'une relation entre  $m$  variables  $X_m$  définisse un groupe libre, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme

$$v(x_i). \psi x_m. v^{-1}(x_i) = 1$$

et il s'agit alors du groupe libre de rang  $m - 1$ .

D'autre part, on peut, en faisant intervenir le théorème de Dyck, exprimer 1.1 comme suit :

1.1'. - Si  $F = [[X_m]]$  est le groupe libre de rang  $m$  et  $N$  un sous-groupe normal de  $F$ , la condition nécessaire et suffisante pour que  $F/N$  soit le groupe libre de rang  $n \leq m$  est que  $N$  soit engendré en tant que sous-groupe normal, par  $m - n$  éléments de la forme

$$\psi x_{n+1}, \dots, \psi x_m$$

où  $\psi \in \mathcal{Y}_m(F)$ , autrement dit par  $m - n$  éléments d'une base libre de  $F$ .

1.2. - Si  $X_m$  est un système minimal de générateurs d'un groupe quelconque  $G$ , on a

$$\psi x_i \neq 1$$

pour tout  $\psi \in \mathcal{Y}_m(G)$ .

Considérons le groupe libre  $F[[X_m]]$  et le sous-groupe normal  $N$  tel que  $F/N \cong G$  et soit  $N(\psi x_i)$  le sous-groupe normal engendré par  $\psi x_i$  dans  $F$ ; d'après 1.1',  $F/N(\psi x_i)$  est un groupe libre de rang  $m-1$ . Si maintenant  $\psi x_i \in N$ , donc  $N(\psi x_i) \subseteq N$ ,

$$G \cong F/N \cong F/N(\psi x_i) / N/N(\psi x_i)$$

ce qui montre l'existence d'un système de  $m-1$  générateurs pour  $G$ .

1.3.- Tout sous-groupe normal  $N$  du groupe libre  $F = [[X_m]]$  tel que  $F/N$  soit groupe libre est isomorphe au groupe libre de rang infini.

D'après 1.1',  $N$  est engendré par  $m-n$  éléments d'une base libre de  $F$  et par conséquent isomorphe au sous-groupe normal  $N(x_{n+1}, \dots, x_m)$  engendré par  $x_{n+1}, \dots, x_m$  dans  $F$ . Celui-ci est évidemment engendré par les conjugués des éléments  $x_i^{\pm 1}$ ,  $i = n+1, \dots, m$  qui peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} v_1 r_1 v_2 r_2 \dots r_{k-1} v_k \cdot x_i^{\pm 1} (v_1 r_1 \dots r_{k-1} v_k)^{-1} &= (v_1 r_1 v_1^{-1}) (v_1 v_2 r_2 v_2^{-1} v_1^{-1}) \dots \\ &\dots (v_1 \dots v_{k-1} r_{k-1} v_{k-1}^{-1} \dots v_1^{-1}) (v_1 \dots v_k x_i^{\pm 1} v_k^{-1} \dots v_1^{-1}) (v_1 \dots v_{k-1} r_{k-1}^{-1} v_{k-1}^{-1} \dots v_1^{-1}) \\ &\dots (v_1 r_1^{-1} v_1^{-1}) \end{aligned}$$

où  $v_j \in [[x_1, \dots, x_n]]$  et  $r_j \in \{x_{n+1}^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}\}$ .

On conclut que l'ensemble des éléments de la forme

$$(2) \quad v x_i v^{-1} \quad ; \quad i = n+1, \dots, m \quad ; \quad v \in [[x_1, \dots, x_n]]$$

constitue un système de générateurs de  $N(x_{n+1}, \dots, x_m)$ .

Soit maintenant  $\bar{R} = r_1 r_2 \dots r_h = 1$  une relation irréductible avec  $h \geq 3$  entre les éléments de (2). Notons  $r_j = v_j x_{i_j}^{\pm 1} v_j^{-1}$ ; le remplacement dans  $R$ , conduit à une identité  $\bar{R}^* = 1$  entre les éléments de  $X_m \cup X_m^{-1}$ ; soit  $\rho$  la segmentation concordante et unitaire qu'admet dans ce cas  $R^*$ . Puisque  $\{x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}\} \cap \{x_{n+1}^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}\} = \emptyset$ , on a nécessairement  $S_\rho(x_{i_j}^{\pm 1}) = S(x_{i_j}^{\pm 1} x_{i_k}^{\pm 1})$  et on peut supposer  $j \neq 1, h$  ainsi que  $j < k$ . On a dans ces conditions

$$\bar{S}(r_j r_k) = v_j \bar{S}(x_{i_j}^{\pm 1} x_{i_k}^{\pm 1}) v_k^{-1} = v_j v_k^{-1} \in [[x_1, \dots, x_n]]$$

et puisque  $[[x_1, \dots, x_n]] \cap N(x_{n+1}, \dots, x_m) = 1$ ,

$$\bar{S}(r_j r_k) = 1$$

ce qui est contradictoire.

On déduit que (2) est de plus un système libre.

## 2.- Sous-groupes super-caractéristiques.

Le sous-groupe normal  $N$  du groupe  $G$  est dit super-caractéristique si pour tout sous-groupe normal  $K$  de  $G$

$$(3) \quad G/K \simeq G/N \implies K \supseteq N ;$$

$N$  est dit ultra-caractéristique si, plus strictement,

$$(3') \quad G/K \simeq G/N \implies K = N .$$

Appelons d'autre part, d'après R. Baer, Q-groupe, un groupe dont les groupes quotients propres ne lui sont jamais isomorphes ; tel est le cas par exemple des groupes libres de rang fini.

2.1.- Pour que le sous-groupe super-caractéristique  $N$  soit ultra-caractéristique, il faut et il suffit que  $G/N$  soit un Q-groupe.

Si  $G/N$  n'est pas Q-groupe il existe  $K \supset N$ , normal, et tel que

$$G/N \simeq G/N / K/N = G/K$$

et réciproquement, s'il existe  $K \supset N$  avec  $G/N \simeq G/K$ ,

$$G/N \simeq G/N / K/N .$$

2.2.- Un sous-groupe  $N$  super-caractéristique est caractéristique.

Si  $\varphi$  est un automorphisme de  $G$ , on déduit de  $\varphi G = G$

$$G/\varphi N \simeq \varphi G / \varphi N \simeq G/N$$

donc d'après (3)

$$\varphi N \supseteq N$$

et de façon analogue

$$\varphi^{-1}N \supseteq N$$

ou encore en appliquant  $\varphi$

$$N \supseteq \varphi N .$$

2.3.- L'intersection d'un ensemble de sous-groupes super-caractéristiques ou ultra-caractéristiques est un sous-groupe de même nature.

Soit  $\sum$  un ensemble d'indices. Si les sous-groupes  $N_\sigma$ ,  $\sigma \in \sum$  sont

super-caractéristiques, d'après 2.2 ,

$$N = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} N_{\sigma}$$

est un sous-groupe normal. Considérons  $K$  tel que

$$G/K \simeq G/N$$

A chaque  $N_{\sigma}/N$  correspond dans cet isomorphisme un  $K_{\sigma}/K$  tel que

$$G/K_{\sigma} \simeq G/K / K_{\sigma}/K \simeq G/N / N_{\sigma}/N \simeq G/N_{\sigma}$$

donc d'après (3)

$$K_{\sigma} \supseteq N_{\sigma}$$

et d'autre part ce même isomorphisme entraîne

$$K = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} K_{\sigma}$$

de sorte que

$$K \supseteq N .$$

Le cas des sous-groupes ultra-caractéristiques est analogue (on remplace  $\supseteq$  par  $=$ ) .

2.4.- Soit  $\{N_{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma}$  l'ensemble des sous-groupes normaux de  $G$  dont les groupes quotients sont isomorphes à un certain groupe  $G_0$  :

$$G/N_{\sigma} \simeq G_0 ;$$

$N = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} N_{\sigma}$  est un sous-groupe super-caractéristique.

Soit en effet  $K$  tel que

$$G/K \simeq G/N .$$

Considérons comme dans la démonstration de 2.3 les  $K_{\sigma}/K$  correspondant biunivoquement aux  $N_{\sigma}/N$  ; on a

$$K = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} K_{\sigma}$$

et

$$G/K_{\sigma} \simeq G/H_{\sigma} \simeq G_0 ,$$

d'où, d'après l'hypothèse,  $K_{\sigma} = H_{\tau}$  pour un certain  $\tau \in \Sigma$  et par conséquent

$$K \supseteq N .$$

On voit de plus que : si  $\Sigma$  est fini  $N$  est ultra-caractéristique.

Considérons maintenant  $F \leq [[X_m]]$ , un groupe libre  $G$  de rang  $n \leq m$  et l'intersection  $U_m(G)$  des sous-groupes normaux  $N$  de  $F$  satisfaisant à

$$(a) \quad G = F/N$$

Si  $R$  est un produit d'éléments de  $X_m \cup X_m^{-1}$ , notons  $R(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$  le produit obtenu de  $R$  en supprimant les éléments qui sont de la forme  $x_{i_1}^{\pm 1}, \dots, x_{i_k}^{\pm 1}$ .

Considérons d'autre part l'ensemble  $\sum$  des décompositions

$$(\sigma) \quad F = [y_1] * [y_2] * \dots * [y_m]$$

de  $F$  en produits libres de groupes cycliques infinis et soit  $0_\sigma^\vee$  l'agrégat commutateur d'indice  $\vee$  relatif à  $(\sigma)$ , c'est-à-dire la réunion de toutes les formes commutatrices ou figurent au moins  $\vee + 1$  groupes  $[y_i]$ .

2.5.- Si  $G$  est libre de rang  $n$ , on a  $U_m(G) = \bigcap_{\sigma \in \sum} 0_\sigma^n$

D'après 1.1', tout sous-groupe normal  $N(y_{i_1}, \dots, y_{i_{m-n}})$  satisfait à (a); d'autre part ses éléments sont les produits  $R$  avec  $R(y_{i_1}, \dots, y_{i_{m-n}}) = 1$ . L'intersection de ces sous-groupes normaux est l'ensemble des  $R$  avec  $R(y_{i_1}, \dots, y_{i_{m-n}}) = 1$  pour tout ensemble  $\{y_{i_1}, \dots, y_{i_{m-n}}\}$  de  $m-n$  éléments de  $Y_m$ , ce qui dans le cas des groupes libres entraîne la même propriété pour tout ensemble de plus de  $m-n$  éléments. On conclut, d'après la proposition 5.1 de [4] que

$$\bigcap N(y_{i_1}, \dots, y_{i_{m-n}}) = 0_\sigma^n$$

et si l'on fait intervenir 1.1', on obtient 2.5.

On voit facilement que l'ensemble des  $R$  avec  $R(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m) = 1$  pour tout  $y_i$  est le sous-groupe commutateur  $C$  de  $F$ , c'est-à-dire que  $0_C^1 = C$  et par conséquent  $\bigcap_{\sigma \in \sum} 0_\sigma^1 = C$ , d'où :

Si  $G$  est cyclique infini,  $U_m(G) = C$ .



BIBLIOGRAPHIE.

- [1] W. MAGNUS : ~~Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden~~  
Relation, J. reine angew. Math., 163 (1930), p. 141-165.
  - [2] B.H. NEUMANN: Identical relations in groups. I. Math. Ann., 114 (1937),  
p. 506-525.
  - [3] B.H. NEUMANN et Hanna NEUMANN : Zwei Klassen charakteristischer Unter-  
gruppen und ihre Faktorgruppen, Math.  
Nachr., 4 (1951), p. 106-125.
  - [4] J. PETRESCO : Sur les commutateurs, Math. Z., 61 (1954), p. 348-356.
  - [5] J. PETRESCO : Sur les groupes libres, Bull. Sc. Math., 80 (1956), p. 6-33.
  - [6] J. PETRESCO : Systèmes minimaux de relations fondamentales dans les grou-  
pes de rang fini, Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT, 1955/56,  
exposé n° 1.
-