Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Ch. Pisot

Quelques résultats nouveaux dans l'étude d'un ensemble remarquable d'entiers algébriques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. n° 15, p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A7_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THEORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 15

QUELQUES RÉSULTATS NOUVEAUX DANS L'ÉTUDE D'UN ENSEMBLE REMARQUABLE D'ENTIERS ALGÉBRIQUES.

(Résumé de la conférence faite par Ch. PISOT, le 21 février 1955).

[les démonstrations viennent de paraître [3] et [4].].

-:-:-:-

Soit θ un entier algébrique, zéro du polynome $P(z) \equiv p_0 + p_1 z + \ldots + \varepsilon z^s$, $p_0 > 0$, $\varepsilon = \pm 1$, dont tous les conjugués θ_i , sauf θ , vérifient les inégalités <u>strictes</u> $|\theta_i| < 1$; posons $Q(z) \equiv \varepsilon z^s P(1/z)$. L'étude de l'ensemble S des nombres θ est intimement liée à celle des fractions rationnelles $A(z)/Q(z)$, où $|A(z)| \leqq |Q(z)|$ sur $|z| = 1$ et où $A(z)$ est un polynome à coefficients entiers. Ces fractions forment dans $|z| < 1$ une famille normale fermée [2] ; il en résulte que l'ensemble S est fermé [5] et que les nombres θ de S qui appartiennent à l'ensemble dérivé S' sont caractérisés par l'existence d'un polynome $A(z)$ pour lequel l'égalité $|A(z)| = |Q(z)|$ sur $|z| = 1$ n'a lieu qu'en un nombre fini de points au plus [1].

Les fractions rationnelles $A(z)/Q(z)$ ont un seul pôle $z = 1/\theta$ dans $|z| \leqq 1$; leur développement $u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots$ a des coefficients u_n entiers rationnels. Une méthode d'étude [3] de l'ensemble S peut être déduite du "problème des coefficients" pour les fonctions $f(z)$ méromorphes dans $|z| \leqq 1$, réelles pour z réel, ayant un seul pôle $z = \alpha > 0$ dans $|z| \leqq 1$ et vérifiant $|f(z)| \leqq 1$ sur $|z| = 1$, avec $f(0) = u_0 \geqq 1$. Dans le cas où $u_0 > 1$, on considère la fonction

$$f_1(z) \equiv z \frac{u_0 f(z) - 1}{f(z) - u_0} \quad ; \text{ si } u_0 = 1 \text{ , on considère}$$

$$g_2(z) = \frac{(z^2 + u_1 z - 1) f(z) - (z^2 - 1)}{(z^2 - u_1 z - 1) - (z^2 - 1) f(z)} \quad ; \text{ les fonctions } f_1(z) \text{ ou } g_2(z)$$

sont holomorphes dans $|z| \leqq 1$ et bornées supérieurement par 1 sur

$|z| = 1$; on peut alors, par un procédé classique, obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour le développement de $f(z)$, ne faisant intervenir que les coefficients u_n . En appliquant les résultats obtenus aux fonctions $f(z) \equiv A(z)/Q(z)$, on peut ainsi déterminer tous les nombres de S inférieurs à $\theta'_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; on en déduit que θ'_1 est le plus petit nombre de S' (cf.[6] et [1]). On peut de même montrer [4] , que les seuls nombres de S' inférieurs à 1,8 sont θ'_1 et $\theta'_2 = 1{,}75 \ldots$, zéro de $1 - z + 2z^2 - z^3$, carré du plus petit nombre de S .

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Dufresnoy et Ch. Pisot, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. t.70 (1953), p. 105-133.

[2] J. Dufresnoy et Ch. Pisot, Bull. Sc. Math. t.77 (1953), p. 129-136.

[3] J.Dufresnoy et Ch. Pisot , Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. t.72 (1955), p. 69-92.

[4] J. Dufresnoy et Ch. Pisot, Bull. Sc. Math. t.79 (1955), sous presse.

[5] R. Salem Duke Math. J. t.11 (1944), p. 103-108.

[6] C. Siegel Duke Math. J. t.11 (1944), p. 597-602.