Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

P. Samuel

Courbes planes en caractéristique 2

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. n° 13, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A5_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 13

COURBES PLANES EN CARACTÉRISTIQUE 2.

(Exposé de P. SAMUEL, le 21 février 1955)

-:-:-:-

Nous nous proposons de mettre en évidence certains points sur lesquels la "Géométrie différentielle" des courbes algébriques planes sur un corps de caractéristique 2 diffère de la Géométrie classique.

1.- Soit C une courbe plane (irréductible) définie sur un corps quelconque k, $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ son équation homogène, (x_0, x_1, x_2) les coordonnées strictement homogènes d'un point générique de C [1]. La tangente à C au point (x_0, x_1, x_2) a pour équation $\sum_i u_i X_i = 0$ où $u_i = F'_{x_i}$. Soit $\varphi(U_0, U_1, U_2) = 0$ l'équation tangentielle homogène de C, c'est-à-dire un générateur de l'idéal homogène formé par les polynômes sur k qui s'annulent en (u_0, u_1, u_2). Supposons, ce qui est loisible après un éventuel changement de coordonnées, que l'on a $x_0 \neq 0$ et $u_0 \neq 0$; et posons $u = u_1/u_0$, $v = u_2/u_0$, $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$. Alors $k(u, v)$ est (sauf si C est une droite) une extension régulière et de degré de transcendance 1 de k (en tant que sous-extension de $k(x, y)$) ; elle admet donc, à un facteur près, une et une seule k-dérivation non nulle D. On démontre [2] que, comme dans la théorie classique, le point commun aux deux droites

$$(1) \quad uX + vY + 1 = 0$$
$$(2) \quad (Du)X + (Dv)Y = 0$$

est le point caractéristique de la tangente $T(x, y)$ à C au point (x, y), c'est-à-dire, en désignant par (x', y') un point générique de C sur $k(x, y)$, l'unique spécialisation du point $T(x, y).T(x', y')$ sur $k(x, y)$ prolongeant $(x', y') \to (x, y)$. Prolongeons D en une dérivation D' de l'extension transcendante simple $k(u_0, u_1, u_2)$ de $k(u, v)$. En tenant compte de (1), l'équation (2) s'écrit $\sum_i (D'u_i)X_i = 0$. Comme on a

---

[1] Pour les définitions des notions de Géométrie Algébrique utilisées, nous renvoyons le lecteur à : P. Samuel, "Méthodes d'Algèbre abstraite en Géométrie Algébrique", Erg. der Math., Berlin (Springer), 1955.

[2] P. Boughon.

$\sum_i u_i \varphi'_{u_i} = 0$ d'après l'identité d'Euler, et $\sum_i (D'u_i)\varphi'_{u_i} = 0$ par application de D' à la relation $\varphi(u_0 , u_1 , u_2) = 0$, le point $(\varphi'_{u_0} , \varphi'_{u_1} , \varphi'_{u_2})$ est le point caractéristique de la tangente T . Tout ceci a un sens puisqu'aucun des polynômes F , φ n'a toutes ses dérivées partielles nulles, étant donné que chacun engendre un idéal qui reste premier par toute extension de k . Nous supposerons, ce qui est loisible, que l'on a $\varphi'_{u_0} \neq 0$, et poserons $a = \varphi'_{u_1}/\varphi'_{u_0}$, $b = \varphi'_{u_2}/\varphi'_{u_0}$.

Théorème 1 - Si k est un corps de caractéristique 2 , les coefficients (u , v) de la tangente T à C en (x , y) appartiennent à $k(x^2 , y^2)$, et les coordonnées (a , b) du point caractéristique de T appartiennent à $k(x^4 , y^4)$.

Il suffit de montrer que u et v appartiennent à $k(x^2 , y^2)$, puisque la seconde assertion en résulte par application à l'équation tangentielle φ . Or on a $u = F'_{x_1}/F'_{x_0} = F'_{x_1}F'_{x_0}/(F'_{x_0})^2$. Par passage à des coordonnées non homogènes notre assertion va donc résulter du lemme suivant :

Lemme - Soient k un corps de caractéristique 2, et (s , t) un point générique sur k d'uhe courbe plane d'équation non homogène $G(S , T) = 0$. Alors $G'_s G'_t \in k(s^2 , t^2)$.

Ecrivons en effet $G(S , T) = A(S^2 , T^2) + SB(S^2 , T^2) + TC(S^2 , T^2) + STD(S^2 , T^2)$. Comme $G'_S = B + T.D$ et $G'_T = C + S.D$, il vient

$G'_S . G'_T = B.C + D(S.B + T.C + ST.D)$;

d'où $G'_s G'_t = B(s^2 , t^2)\, C\,(s^2 , t^2) + D(s^2 , t^2)\, A\,(s^2 , t^2)$, puisque $G(s , t) = 0$. CQFD.

Il résulte du théorème 1 que le point caractéristique de la tangente T à C n'est jamais son point de contact (x , y) avec C .

Remarque - Soit $uX + vY + 1 = 0$ l'élément générique d'une famille à un paramètre de droites, k(u , v) étant une extension régulière de k . Si la droite $uX + vY + 1 = 0$ contient un point (a , b) tel que k(u , v) soit une extension algébrique inséparable de k(a , b) , alors (a , b) est point caractériqtique de cette droite. En effet il existe une k-dérivation non nulle D de k(u , v) qui est nulle sur k(a , b) ; et, par application de D à la relation $ua + vb + 1 = 0$, on obtient $(Du)a + (Dv)b = 0$.

Exemples - 1) Un calcul direct montre aussitôt que toutes les tangentes à la coniques $\sum_{i \leqslant j} a_{ij} x_i x_j = 0$ passent par le point $(a_{12} , a_{02} , a_{01})$. Le fait que

toutes les tangentes à une conique C sont **concourantes** résulte aussi du théorème de Frégier et du fait que la correspondance identique sur C est une involution (puisque $t = t'$ équivaut à $t + t' = 0$ en caractéristique 2).

2) Une cubique à point de rebroussement peut toujours être ramenée à la forme $x^3 + y^3 + y^2 = 0$. Ses tangentes $x^2X + y^2(Y + 1) = 0$ passent toutes par le point $(0 , 1)$, qui est l'unique point d'inflexion de la cubique.

3) Une cubique à point double ordinaire peut toujours être ramenée à la forme $x^3 + y^3 + xy = 0$. L'équation générale de ses tangentes est $X(x^2 + y) + Y(y^2 + x) + xy = 0$, ou encore $Xy^4 + Yx^4 + x^2y^2 = 0$. Son équation tangentielle est $uv + 1 = 0$. Les points caractéristiques de ses tangentes décrivent donc la droite de l'infini, qui est d'ailleurs la droite joignant les trois points d'inflexion de la cubique.

4) L'équation d'une cubique sans singularité peut toujours se ramener à $x^3 + y^3 + qxy + 1 = 0$ $(q \in k)$. On a $u = (x^2 + qy^4)/(1 + qxy)^2$ et $v = (y^2 + qx^4)/(1 + qxy)^2$.
Son équation tangentielle est $u^3 + v^3 + q^2uv + 1 = 0$. Le point caractéristique de la tangente en (x , y) est $((u^2 + q^2v^4)/(1 + q^2uv)^2 , (v^2 + q^2u^4)/(1 + q^2uv)^2) = (x^4 , y^4)$, et son lieu est la cubique $X^3 + Y^3 + q^4XY + 1 = 0$. Ce point caractéristique est d'ailleurs le tangentiel de (x , y) dans le cas de la cubique "équianharmonique" obtenue pour $q = 0$; en général ce tangentiel est le point (x^2u , y^2v).

5) La quartique non singulière C d'équation $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$ (coordonnées homogènes) a pour tangente $Xz^4y^2 + Yx^4z^2 + Zy^4x^2 = 0$. Celle-ci passe par les points (z^2 , x^2 , y^2) et (x^8 , y^8 , z^8), qui sont des points de C comme on le vérifie par élévation de l'équation de C aux puissances 2 et 8. Passons aux coordonnées non homogènes en faisant $z = 1$; comme $k(u , v) = k(1/x^2y^2 , x^2/y^4) = k(x^2y^2 , y^8)$ est une extension 2-radicielle de $k(x^8 , y^8)$, le point (x^8 , y^8) est, d'après la remarque ci-dessus, le point caractéristique de la tangente en (x , y). L'équation tangentielle de C est $u^5v + v^5w + w^5u + u^2v^2w^2 = 0$.

6) La courbe C d'équation $x^{2^n+1} + y^{2^n+1} + 1 = 0$, qui est non singulière, a pour tangente $Xx^{2^n} + Yy^{2^n} + 1 = 0$, et son équation tangentielle est $u^{2^n+1} + v^{2^n+1} + 1 = 0$.. Le point caractéristique de la tangente est

$(u^{2^n}, v^{2^n}) = (x^{2^{2n}}, y^{2^{2n}})$, et son lieu est la courbe C. La tangente à C au point (x , y) a un contact d'ordre 2^n avec C en (x , y).

2.- Théorème 2 - Sur un corps k de caractéristique 2, la classe d'une courbe plane C de degré n est au plus $\frac{1}{2}n(n-1)$ (et non $n(n-1)$ comme dans le cas classique).

Au moyen d'un choix convenable des coordonnées, il va nous suffire de majorer le nombre des tangentes menées à C par le point à l'infini sur Ox.
Si $F(X , Y) = 0$ désigne l'équation de C, nous avons ainsi à majorer le nombre de points communs à C et à la courbe $F'_X(X , Y) = 0$ (certains de ces points peuvent être des points multiples de C). Or, en écrivant $F(X , Y) = A(X^2 , Y) + X.B(X^2 , Y)$, on a $F'_X(X , Y) = B(X^2 , Y)$, et nous sommes ramenés à majorer le nombre des points communs aux courbes $A(X^2 , Y) = 0$ et $B(X^2 , Y) = 0$. Or ce sont là des courbes de degrés au plus n et n-1, dont toutes les tangentes sont parallèles à Ox. Donc chacun de leurs points d'intersection compte au moins pour 2, et il y en a au plus $\frac{1}{2}n(n-1)$ distincts.
Exemples - 1) Le maximum $\frac{1}{2}n(n-1)$ est atteint par les courbes non singulières des exemples 4) et 5) ci-dessus, mais non par la courbe non singulière de l'exemple 6).
2) Pour étudier directement la classe d'une cubique, on peut remarquer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$(1) \quad at^3 + bt^2 + ct + d = 0$$

ait une racine double est que l'on ait $ad + bc = 0$ (en effet l'équation dérivée est $at^2 + c = 0$, et, en éliminant t^2 entre cette dernière et l'équation (1) élevée au carré, on obtient $a^2d^2 + b^2c^2 = 0$). Il en résulte que les tangentes menées par O à la cubique C (plus, éventuellement, la droite joignant O au point double de C) d'équation

$$g_3(x , y) + g_2(x , y) + g_1(x , y) + g_0 = 0 \quad (g_i : \text{forme de degré } i)$$

sont représentées par

$$(2) \quad g_0g_3(x , y) + g_1(x , y)g_2(x , y) = 0 .$$

Il y en a en général 3. Lorsque O est un point simple de C l'équation (2) se décompose en $g_1(x , y) = 0$ représentant la tangente à C en O, et en $g_2(x , y) = 0$. Dans le cas de la forme réduite $x^3 + y^3 + qxy + 1 = 0$, mettons l'origine au point (x_0 , y_0) de C en posant $x = x_0 + X$ et $y = y_0 + Y$; l'équation $g_2(X , Y) = 0$ s'écrit alors $x_0X^2 + y_0Y^2 + qXY = 0$; si $q \neq 0$ elle représente deux droites distinctes, et chaque point de C est la tangentiel de deux points de C ; dans le cas de la cubique "équianharmonique" $q = 0$

(ce nom ne répond ici à rien, puisqu'il ne peut être question du birapport des 4 tangentes menées à C par un point de C) elle représente une seule droite (comptée deux fois), et chaque point de C est tangentiel d'un seul point de C .

3) On voit de même qu'une cubique à point double ordinaire est de classe 2, et qu'une cubique à point de rebroussement est de classe 1 .