Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

L. Lesieur

Sur les idéaux irréductibles d'un anneau ou d'un demi-groupe commutatif

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. n° 11, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A4_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55
-:-:-:-

Exposé n° 11

SUR LES IDEAUX IRRÉDUCTIBLES D'UN ANNEAU OU D'UN DEMI-GROUPE COMMUTATIF.

(Exposé de L. LESIEUR, le 24 janvier 1955)

1.- Soit D un demi-groupe commutatif dont l'opération est notée multiplicativement. On a donc :

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \quad ; \quad \alpha\beta = \beta\alpha \quad .$$

Nous supposons de plus l'existence d'un élément unité. Un idéal a dans D est une partie non vide permise pour l'opération de D , c'est-à-dire vérifiant :

$$\alpha \in a \quad , \quad \xi \in D \text{ entrainent } \xi\alpha \in a \quad .$$

Introduisons une condition de chaine portant sur les idéaux de D qui est, soit la condition de chaine ascendante, soit la condition de chaine descendante affaiblie. Cette dernière exprime que toute suite décroissante minorée est finie ; elle entraine la première dans le cas des idéaux d'un anneau, mais elle en est indépendante dans le cas des idéaux d'un demi-groupe. Cependant les résultats que nous avons en vue sont valables lorsque l'une ou l'autre de ces conditions sont supposées remplies. Les démonstrations sont exposées de manière à retrouver les résultats connus de Gröbner sur les idéaux irréductibles d'un anneau commutatif noethérien [2](1), les résultats spéciaux concernant les idéaux d'un demi-groupe commutatif vérifiant une condition de chaine ou l'autre étant également mentionnés [3]. Les deux cas, celui des idéaux d'un anneau et celui des idéaux d'un demi-groupe, se traitent de la même façon en considérant le treillis des idéaux, que nous appellerons T_A pour un anneau A et T_D pour un demi-groupe D . L'intersection des 2 idéaux a et b de D n'est jamais vide car elle contient toujours le produit ab de ces idéaux, et il n'est pas nécessaire de supposer la présence d'un zéro dans D ni d'inclure la partie vide de D comme idéal. La réunion de 2 idéaux de D est un idéal ; il en résulte que T_D est un treillis distributif multiplicatif ou demi-groupe réticulé. C'est d'ailleurs un sous-demi-groupe réticulé de l'ensemble de tous les

(1)- Voir la bibliographie placée à la fin.

complexes de D qui a été considéré par P. Dubreil dans sa "Contribution à la théorie des demi-groupes" III, [1]. Dans T_D l'intersection est distributive même par rapport à une union infinie, ($\cap$-distributivité générale), et la multiplication des idéaux est distributive par rapport à une union infinie (demi-groupe réticulé complet). Il en résulte que T_D est résidué, c'est-à-dire qu'il existe un élément maximum x dans T_D qui vérifie $ax \subseteq b$, idéal de D qu'on note $b : a$. Enfin, l'idéal $D = e$ est élément maximum de T_D et en même temps élément unité pour la multiplication : T_D est entier.

Le treillis des idéaux d'une anneau n'est pas distributif en général car la réunion de 2 idéaux n'est pas un idéal, mais il est modulaire ; il est en outre $\cap$-continu, en ce sens que l'intersection est distributive par rapport à l'union des éléments d'une chaine. Enfin c'est aussi un demi-groupe réticulé complet entier quand on introduit comme multiplication la formation du produit des idéaux. On a donc la propriété suivante :

Propriété (P) .

T_A et T_D sont des demi-groupes réticulés complets, entiers et commutatifs, satisfaisant soit à la condition de chaine ascendante soit à la condition de chaine descendante affaiblie. Ils sont modulaires et $\cap$-continus.

De plus, T_D satisfait à la propriété supplémentaire :

Propriété (S) - T_D est $\cap$-distributif général.

Un élément $\cap$-irréductible est un élément a pour lequel il n'existe aucune décomposition de la forme

$$(1) \qquad a = a_1 \cap a_2 \quad , \quad a_1 \supset a \quad , \quad a_2 \supset a$$

Par exemple un idéal premier est $\cap$-irréductible. Si l'on avait (1), on en déduirait $a_1 . a_2 \subseteq a$, avec $a_1 \not\subseteq a$, $a_2 \not\subseteq a$, ce qui est contraire à la définition de a premier. Nous supposerons donc dans la suite que a n'est pas premier.

Dans les treillis T_A et T_D, les éléments de l'anneau A ou du demi-groupe D interviennent quelquefois, et c'est alors sous la forme des idéaux principaux. L'idéal principal des multiples d'un élément α de A ou de D, que nous désignerons encore par (α) est tel que l'on ait dans le treillis des idéaux :

$$a \subseteq (\alpha) \Longrightarrow \exists\, b \text{ tel que } a = b . (\alpha) \quad .$$

Cette propriété peut être prise pour définition d'un élément principal dans un treillis multiplicatif entier commutatif quelconque. Les treillis T_A et T_D jouissent alors de la propriété suivante ; déjà considérée dans un autre mémoire [4] sous le nom de

Propriété (II) - Tout élément de T est union d'éléments principaux :

D'après le mémoire cité [4], les propriété (P) et (II) entrainent alors que tout élément $\cap$-irréductible est primaire (fort) ; si P premier est radical de q - primaire, il existe donc un exposant entier $\rho \geqslant 2$ tel que $p^\rho \subseteq q$. Nous limitons ainsi la recherche des éléments $\cap$-irréductibles à la considération des éléments primaires.

Nous appliquerons encore le résultat suivant établi dans [4] moyennant la 1ère partie de la propriété (P) :

Théorème de structure - Si p est un élément premier minimal $\supseteq a$, il existe un élément p-primaire minimum $\bar{a} \supseteq a$. On a $\bar{a} = a:\ell$, avec $\ell \subseteq p$, et $\bar{a}$ est l'élément maximum parmi les éléments résiduels de la forme $a:x$, où $x \not\subseteq p$.

Ce théorème va nous servir à étudier les éléments p-primaires $\supseteq q$.

2.- Soit S le segment $[q,p]$ du treillis T , c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui vérifient $q \subseteq x \subseteq p$. Si $a \in S$, p est un élément premier minimal $\supseteq a$ puisque p est premier minimal $\supseteq q$. Le théorème de structure montre donc l'existence d'un élément $\bar{a}$ p-primaire, et l'application $a \to \bar{a}$ vérifie :

$$\bar{a} \supseteq a \quad ; \quad a \supseteq b \text{ entraine } \bar{a} \supseteq \bar{b} \quad ; \quad \bar{\bar{a}} = \bar{a} \quad .$$

Elle est donc une application de fermeture algébrique du segment S sur l'ensemble $\bar{S}$ des éléments p-primaires de ce segment. Il en résulte que $\bar{S}$ est un sous-demi-treillis complet de S pour l'intersection ; ce n'est pas un sous-treillis de S car l'union de 2 éléments p-primaires n'est pas en général p-primaire. Mais $\bar{S}$ constitue un ensemble ordonné en treillis complet. Nous désignerons les opérations d'union et d'intersection dans $\bar{S}$ par les symboles $\vee$ et $\cap$, celles de S et T étant notées $\cup$ et $\cap$. Si $a_i \in \bar{S}$, on a immédiatement :

$$(2) \qquad \vee a_i = \overline{\cup a_i}$$

Propriété 1 - Les résiduels $q:m$ $(m \not\subseteq q)$ sont des éléments de $\bar{S}$.

Soit en effet $a=q:m$, avec $m \not\subseteq q$. On a donc $ma \subseteq q$, d'où $a \subseteq p$

puisque q est p-primaire. Il en résulte $a \in S$. D'après le théorème de structure, on a $\bar{a} = a:\ell$, avec $\ell \not\subseteq p$. On en déduit :

$$\bar{a} = (q:m):\ell = (q:\ell):m = q:m = a \ .$$

Propriété 2 - $\bar{S}$ est modulaire et $\cap$-continu.

$\bar{S}_D$ est de plus $\cap$-distributif général.

On s'appuie sur la modularité et l'inter-continuité de S , qui résulte de la propriété (P). On veut démontrer la relation :

$$a \cap (b \vee c) = b \vee (a \cap c) \quad , \quad b \subseteq a \ .$$

Pour cela il suffit d'établir :

$$a \cap (b \vee c) \subseteq b \vee (a \cap c) \quad , \quad b \subseteq a \ .$$

Or on a d'après la relation (2) et le théorème de structure :

$$b \vee c = \overline{b \cup c} = (b \cup c) : \ell \quad , \quad \ell \not\subseteq p \ .$$

Comme a est p-primaire, on peut écrire $a = a:\ell$, d'où :

$$a \cap (b \vee c) = (a:\ell) \cap (b \cup c):\ell = [a \cap (b \cup c)]:\ell$$

et puisque S est lui-même modulaire :

$$a \cap (b \vee c) = [b \cup (a \cap c)]:\ell$$

c'est-à-dire, d'après le théorème de structure :

$$a \cap (b \vee c) \subseteq \overline{b \cup (a \cap c)} = b \vee (a \cap c) \ .$$

On démontre exactement de la même façon que l'inter-continuité de S entraine celle de $\bar{S}$ et que l'inter-distributivité générale de S_D entraine celle de $\bar{S}_D$.

La propriété suivante fait intervenir les idéaux principaux de A ou D , c'est-à-dire les éléments principaux du treillis T .

Propriété 3 - a étant un idéal principal $\subseteq p$, on a dans $\bar{S}$:

$$\overline{q \cup a} \gtrdot \overline{q \cup pa}$$

c'est-à-dire : il n'existe aucun idéal p-primaire entre $q \cup pa$ et $q \cup a$.

D'après le théorème de structure, on peut prendre

$$\overline{q \cup a} = (q \cup a):\ell \quad , \quad \ell \not\subseteq p \ .$$

Si q' est primaire tel que :

$$\overline{q \cup pa} \subseteq q' \subseteq \overline{q \cup a}$$

on a

$$q'\ell \subseteq q \cup a \quad , \quad \ell \not\leq p$$

d'où :

$$q \subseteq q \cup q'\ell \subseteq q \cup a$$

et, le treillis T étant modulaire :

$$q \cup q'\ell = (q \cup q'\ell) \cap (q \cup a) = q \cup [(q \cup q'\ell) \cap a] \quad .$$

Comme a est principal on peut écrire :

$$[q \cup q'\ell] \cap a = x\, a$$

Supposons $x \not\leq p$. On en déduit $xa \subseteq q \cup q'\ell \subseteq q \cup q' \subseteq q'$; d'où q' étant primaire, $a \subseteq q'$. Il en résulte $q \cup a \subseteq q'$ et $\overline{q \cup a} \subseteq q'$, c'est-à-dire

$$q' = \overline{q \cup a} \quad .$$

Supposons $x \leq p$. On en déduit $xa \subseteq pa$ et $q \cup q'\ell = q \cup xa \subseteq q \cup pa$, d'où :

$$q'\ell \subseteq q \cup pa \subseteq \overline{q \cup pa} \quad .$$

Comme $\ell \not\leq p$ et $\overline{q \cup pa} \in \bar{S}$, on a alors :

$$q' \subseteq \overline{q \cup pa} \quad \text{et} \quad q' = \overline{q \cup pa}$$

Théorème 1 - Le treillis $\bar{S}$ est un treillis modulaire de longueur finie. Le treillis $\bar{S}_D$ est un treillis fini.

Considérons d'abord le segment $[q, q:p]$ de $\bar{S}$. Soit donc x un idéal primaire tel que $q \subseteq x \subseteq q:p$. L'idéal x est dans T l'union d'idéaux principaux a_i ; on a donc :

$$x = \cup a_i = \cup (q \cup a_i) = \vee (\overline{q \cup a_i}) \quad .$$

D'après la propriété 3, $\overline{q \cup a_i} \geqslant \overline{q \cup pa_i}$.

Or la relation $a_i \subseteq q:p$ entraine $pa_i \subseteq q$. D'où

$$\overline{q \cup pa_i} = q \quad .$$

On a donc :

$$\overline{q \cup a_i} \geqslant q \quad .$$

ce qui prouve que dans le segment $[q,q:p]$ de $\bar{S}$, tout élément est union de points. Ce segment est alors un treillis géométrique (Leçons sur la théorie des treillis [5], p. 287). Vérifiant une condition de chaine ascendante ou descendante[(2)], il vérifie l'autre ([5], p. 272) et c'est un treillis de longueur finie.

(2) - La condition de chaîne descendante affaiblie dans T entraine la condition de chaine descendante dans S et dans $\bar{S}$.

On démontre de même que tous les segments de $\bar{S}$ de la forme $[q:p^n, q:p^{n-1}]$ sont des treillis géométriques de longueur finie. Par suite le treillis $\bar{S}$ lui-même possède une chaine maximale de longueur finie allant de q à $p = q:p^{p-1}$. C'est donc un treillis modulaire de longueur finie (géométrique ou non). Ceci s'applique à $\bar{S}_A$ et à $\bar{S}_D$. Dans le cas de $\bar{S}_D$, on a en plus la distributivité, qui implique que le treillis $\bar{S}_D$ n'a qu'un nombre fini d'éléments ([6], p. 139). Il n'y a donc qu'un nombre fini d'idéaux p-primaires contenant un idéal p-primaire donné, dans un demi-groupe commutatif D satisfaisant à la condition de chaine ascendante ou à la condition de chaine descendante affaiblie.

3.- Dans un treillis T qui vérifie les propriétés (P) et (II), l'élément q est l'intersection d'un nombre fini d'éléments $\cap$-irréductibles qui sont tous p-primaires et qui appartiennent donc à S. Le rang r de q, ou nombre des éléments qui interviennent dans une décomposition sans éléments superflus, est un invariant de q d'après le théorème de Kurosch-Ore ([5], p. 122). Nous allons déterminer ce nombre r.

Théorème 2 - Le rang r de q dans sa décomposition en intersection d'éléments $\cap$-irréductibles est égal à la longueur λ du segment $[q , q:p]$ dans le treillis $\bar{S}$.

Dans le segment $[q , q:p]$, qui est comme on l'a vu au paragraphe précédent un treillis géométrique, l'élément q est l'intersection des λ éléments maximaux m_i

$$q = m_1 \cap m_2 \cap \dots \cap m_\lambda \quad ,$$

qui forment une décomposition de q en éléments $\cap$-irréductibles dans $q:p$, sans éléments superflus. Choisissons, i étant fixé, un élément maximal a_i de S qui vérifie $a_i \cap (q:p) = m_i$. Son existence est assurée même en présence de la condition de chaine descendante affaiblie du fait que $\bar{S}$ vérifie la propriété d'inter-continuité. (L'ensemble des $x \in \bar{S}$ qui vérifient $(q:p) \cap x = m_i$ est inductif et admet un élément maximal d'après le théorème de Zorn). L'élément a_i est $\cap$-irréductible, car la relation $a_i = q_1 \cap q_2$, avec $q_1 \supset a_i$, $q_2 \supset a_i$, entrainerait

$$m_i = q_1 \cap (q:p) \cap q_2 \cap (q:p)$$

d'où, puisque m_i est $\cap$-irréductible dans $q:p$, $m_i = q_1 \cap (q:p)$ ou $m_i = q_2 \cap (q:p)$, ce qui contredirait le choix de a_i maximal.

Considérons l'élément

$$h = a_1 \cap a_2 \cap \dots \cap a_\lambda \quad .$$

On a

$$(3) \qquad h \cap q:p = (a_1 \cap q:p) \cap \dots \cap (a_\lambda \cap q:p) = q \quad .$$

et

$$q \subseteq h$$

Supposons qu'on ait $q \subset h$, donc $h \not\subseteq q$. D'après la propriété 1, $q:h$ est p-primaire, donc $(q:h):p \supset q:h$. Or, d'après (3) :

$$q:h = (q:p):h = (q:h):p$$

Il en résulte

$$q = h = a_1 \cap a_2 \cap \dots \cap a_\lambda \quad .$$

Cette décomposition en intersection de λ éléments a_i $\cap$-irréductibles est non superflue, car si l'on avait

$$a_1 \supseteq a_2 \cap \dots \cap a_\lambda$$

on en déduirait

$$a_1 \cap (q:p) = m_1 \supseteq m_2 \cap m_3 \cap \dots \cap m_\lambda \quad ,$$

ce qui est impossible puisque la décomposition de q au moyen des m_i ne possède pas d'éléments superflus. Le rang r de q est bien égal à λ .

Du théorème 2 on déduit immédiatement le suivant, établi par Gröbner dans le cas des idéaux d'un anneau commutatif noethérien :

Théorème 3 - Pour que q soit $\cap$-irréductible, il faut et il suffit que q soit primaire et qu'il n'existe aucun élément primaire entre q et $q:p$.

La condition q primaire est un résultat de [4]. La condition $q:p \succ q$ dans $\overline{S}$ est le cas particulier du théorème 2 relatif au cas $r = \lambda = 1$.

La démonstration donnée ici est donc valable pour les idéaux d'un demi-groupe abélien avec élément unité satisfaisant à la condition de chaine ascendante ou descendante affaiblie, et plus généralement pour tout demi-groupe réticulé satisfaisant aux propriétés (P) et (II) mentionnées au paragraphe 1.

Problèmes : 1 - Peut-on se dispenser de l'existence d'un élément unité dans le demi-groupe D, c'est-à-dire supposer T quasi-entier, au lieu d'entier ?

2 - Caractériser les idéaux $\cap$-irréductibles d'un demi-groupe

abélien avec élément unité, ne vérifiant aucune condition de chaine pour les idéaux.

3 - Caractériser les idéaux irréductibles d'un demi-groupe ou d'un anneau non commutatif, 1) avec condition de chaine, 2) sans condition de chaine.

4 - Peut-on, dans la propriété (P), remplacer modulaire par semi-modulaire ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. DUBREIL - "Contribution à la théorie des demi-groupes, III". (Bull. Soc. Math. de France, 81, (1953), p. 289-306).

[2] W. GRÖBNER - "Über irreduzible Ideale in kommut. Ringen", (Math. Annalen., 110 (1934), p. 197-222). "Ein irreduz. Kriter. für Primärideale in kommut. Ringen". (Monat. Math. Osterreich, 55 (1951), p. 138-145).

[3] L. LESIEUR - "Sur les idéaux irréductibles d'un demi-groupe" (Rend. cont. Sémin. Mat. Univers. Padova. 24 (1955), p. 29-37).

[4] L. LESIEUR - "Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant à une condition de chaine" (Bull. Soc. Math. de France, 1955).

[5] M.L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT - "Leçons sur la théorie des treillis..." (Paris, Cahiers Scien., 1953).

[6] G. BIRKHOFF - "Lattice Theory" (New-York, revised edition, 1948).