Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

M. Krasner

La non-existence de certaines extensions des corps

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. n° 3, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A2_0>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1954/55

-:-:-:-

Exposé n° 3

LA NON-EXISTENCE DE CERTAINES EXTENSIONS DES CORPS

(Exposé de M. KRASNER, le 22 novembre 1954)

-;-;-;-

A la suite d'une question posée en 1942 par A. Herstein, j'avais prouvé le théorème suivant :

Théorème 1 : k étant un corps autre qu'une extension algébrique d'un champ de Galois, si K/k est une extension telle que tout $\alpha \in K$ annule un polynôme de la forme $f_\alpha(x) = x^{n(\alpha)} + x + a(\alpha)$, où $n(\alpha)$ est un entier positif et $a(\alpha)$ est $\in k$, $n(\alpha)$ et $a(\alpha)$ pouvant dépendre de α, on a $K = k$.

Idée de démonstration : Supposons $K \neq k$. Soit $\alpha \notin k$ un élément fixe de K et soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q, \ldots$ une suite infinie d'éléments distincts non-nuls de k. On a $n(\lambda_q \alpha) \longrightarrow +\infty$, car autrement on obtiendrait par élimination un polynôme $\in k[x]$ de 1er degré annulé par α. Soit $|\ldots|$ une valuation non-triviale de K, et soient $\bar{k}$, $\bar{K}$ les complétés de k, K par rapport à cette valuation. On prendra α tel que $|\alpha| < 1$ et les λ_q tels que $\lambda_q \longrightarrow 1$ au sens de $|\ldots|$. Alors α annule $f_{\lambda_q \alpha}(\lambda_q x) = (\lambda_q x)^{n(\lambda_q \alpha)} + \lambda_q x + a(\lambda_q \alpha)$ et $(\lambda_q \alpha)^{n(\lambda_q \alpha)} \longrightarrow 0$ dans K. Par suite, $a(\lambda_q \alpha) \longrightarrow -\lambda_q \alpha \longrightarrow -\alpha$ et $\alpha \in \bar{k}$. Ainsi, pour toute $|\ldots|$, on a $\bar{K} = \bar{k}$. On réduit, d'autre part, le problème au cas où k est une extension simple (algébrique ou transcendante) d'un corps premier et on montre que si k n'est pas une extension algébrique d'un champ de Galois, $K \neq k$ implique, dans ce cas, l'existence d'une valuation non-triviale $|\ldots|$ telle que $\bar{K} \neq \bar{k}$.

Pour les détails voir [1].

En 1943, j'ai généralisé comme suit ce résultat en simplifiant sa démonstration :

Théorème 2 : k étant un corps autre qu'une extension algébrique d'un champ de Galois, soit K/k une extension algébrique séparable telle que tout $\alpha \in K$ annule un polynôme de la forme $f_\alpha(x) = x^{n(\alpha)} + c(x) + \varphi(x;\alpha)$, où $c(x)$ est un polynôme fixe $\in k[x]$ se divisant exactement par x^m, $n(\alpha)$ est un entier $\neq m$ et $\varphi(x;\alpha)$ est un polynôme $\in k[x]$ de degré $< m$, $n(\alpha)$ et

$\varphi(x;\alpha)$ pouvant dépendre de α . Alors, $(K:k) \leq m$.

Idée de démonstration. On peut supposer, si le théorème est faux, que $K = k(\alpha)$, où α est de degré $> m$ par rapport à k . Soient $|\ldots|$ une valuation non-triviale de k et $|\ldots|_1$, $\ldots|_2$, $|\ldots$, $|\ldots|_s$ toutes les valuations de K qui la prolongent. Organisons K en un corps ultranormé, en prenant comme norme $\|\xi\| = \operatorname{Max} |\xi|_i$ $(\xi \in K)$. Le complété $\widetilde{K}$ de K par rapport à cette ultranorme est métriquement isomorphe à la somme directe $\oplus \bar{K}_i$ des complétés $\bar{K}_i$ de K par rapport à $|\ldots|_i$, organisé par la norme $\|(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s\ldots)\| = \operatorname{Max} |\xi_i|_i$ $(\xi_i \in K_i)$, un $\xi \in K$ étant identifié avec $(\xi,\xi,\ldots,\xi)$. Or, $\bar{k}$ étant le complété de k par rapport à $|\ldots|$, K est aussi égal à l'extension $K_{\bar{k}}$ de l'algèbre K/k par $\bar{k}$ à condition d'identifier tout $\lambda \in \bar{k}$ avec $(\lambda,\lambda,\ldots,\lambda)$. On a $(K_{\bar{k}}:\bar{k}) = (K:k)$. Ainsi, K est un espace vectoriel de rang fini sur le corps valué complet $\bar{k}$, et on montre que sa norme $\|\ldots\|$ est compatible avec sa structure d'espace vectoriel : $\|\lambda\xi\| = |\lambda| \, \|\xi\|$. $(\lambda \in \bar{k}, \xi \in K)$. Donc, cette norme y définit la topologie produit et si $\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(j)}$ sont linéairement indépendants sur $\bar{k}$, $\sum \lambda_q^{(i)} \xi^{(i)}$ tend vers une limite dans K si, et seulement si tout $\lambda^{(i)}_q \in \bar{k}$ tend vers une limite $\lambda^{(i)} \in k$ et on a alors $\sum \lambda_q^{(i)} \xi^{(i)} \longrightarrow \sum \lambda^{(i)} \xi^{q}(i)$. Les éléments de K linéairement indépendants sur k restent linéairement indépendants sur $\bar{k}$ dans $\widetilde{K}$, et ceci a lieu en particulier, pour $1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^m$ (et, plus généralement, pour $1,\lambda\alpha,(\lambda\alpha)^2,\ldots,(\lambda\alpha)^m$, où $\lambda \neq 0$ est $\in k$) . Par suite, α ne peut annuler aucun polynôme $\in k[x]$ de degré $\leq m$.

On peut choisir α de manière que $\|\alpha\| < 1$. U étant le groupe multiplicatif des $\lambda \in k$ tels que $|\lambda| = 1$, il est dense en soi. Si $\lambda \in U$, il existe une suite des $\lambda_q \in U$ distincts telle que $\lambda_q \longrightarrow \lambda$. Si l'on n'a pas $n(\lambda_q\alpha) \longrightarrow +\infty$, on peut trouver une infinité des q tels que $n(\lambda_q\alpha)$ ait une valeur fixe n . Donc α annule tous les polynômes $\lambda_q^n x^n + c(\lambda_q x) + \varphi(\lambda_q x;\lambda_q\alpha)$, λ_q prenant une infinité de valeurs distincts, ce qui permet d'obtenir, par élimination, un polynôme $\in k[x]$ de degré m annulé par α, contre l'hypothèse. Si $n(\lambda_q\alpha) \longrightarrow +\infty$, on a, dans $\widetilde{K}$, $(\lambda_q\alpha)^{n(\lambda_q\alpha)} \longrightarrow 0$, $c(\lambda_q\alpha) \longrightarrow c(\lambda\alpha)$, d'où $\varphi(\lambda_q\alpha;\lambda_q\alpha) \longrightarrow -c(\lambda\alpha)$. Or, si $\varphi_q^*(x) = \varphi(\lambda_q\lambda^{-1}x;\lambda_q\alpha)$, $\varphi_q^*(x)$ est $\in k[x] \subseteq \bar{k}[x]$ et $\varphi_q^*(\lambda\alpha)$, qui est une combinaison linéaire des $1,\lambda\alpha,(\lambda\alpha)^2,\ldots,(\lambda\alpha)^{m-1}$ à coefficients dans $k \subseteq \bar{k}$, tend vers $-c(\lambda\alpha)$. Ainsi, les coefficients correspondants de ces combinaisons, autrement dit les coefficients correspondants des $\varphi_q^*(x)$, tendent vers quel-

ques limites dans $\bar{k}$ et les $\varphi_q^*(x)$ tendent vers un polynôme $\varphi^*(x;\lambda\alpha) \in \bar{k}[x]$. Le degré de $\varphi^*(x;\lambda\alpha)$ est $< m$ et on a $-c(\lambda\alpha) = \varphi^*(\lambda\alpha;\lambda\alpha)$. Ainsi, $\lambda\alpha$ annule $c(x) + \varphi^*(x;\lambda\alpha)$. En donnant à λ une infinité de valeurs distincts, on voit, par élimination que $\alpha \in K$ annule un polynôme $\in \bar{k}[x]$ de degré m, contre l'hypothèse.

Une légère généralisation de ce théorème est le

Théorème 3 : La conclusion du théorème 2 est encore exacte si $f_\alpha(x)$ a la forme $\sum_{i=o}^{p(\alpha)} a_i(\alpha) x^{n_i(\alpha)} + \varphi(x;\alpha)$, où $p(\alpha)$ ne dépasse pas une constante p, où $m = n_o(\alpha) < n_1(\alpha) < \ldots < n_{p(\alpha)}(\alpha)$, et où les $a_i(\alpha)$ appartiennent à un ensemble fini fixé d'éléments non-nuls de k.

Idée de démonstration. On applique aux $f_{\lambda_q\alpha}(x)$ le même raisonnement que précédemment, en remarquant que seule l'hypothèse $f_{\lambda_q\alpha}(x) \in \bar{k}[x]$ (et non $f_{\lambda_q\alpha}(x) \in k[x]$) suffit pour qu'il soit valable. On écarte, comme précédemment l'hypothèse que $n_{p(\lambda_q\alpha)}(\lambda_q\alpha)$ ne tend pas vers $+\infty$. Si $n_{p(\lambda_q\alpha)}(\lambda_q\alpha) \to +\infty$ le raisonnement considéré montre que tout $\lambda\alpha$, $\lambda \in U$, annule un polynôme $f_{\lambda\alpha}^*(x) = \sum_{i=o}^{p^*(\alpha)} a_i^*(\lambda\alpha)\, x^{n_i^*(\lambda\alpha)} + \varphi^*(x;\lambda\alpha) \in \bar{k}[x]$ qui est de la même forme que précédemment, mais avec p diminué d'une unité. En appliquant de nouveau le même raisonnement aux $f_{\lambda_q\alpha}^*(x)$, etc, on obtient, après p pas d'induction au plus, un polynôme $\in \bar{k}[x]$ de la même forme, mais avec $p = 0$, autrement dit un polynôme de degré m, annulé par α.

Pour les détails de démonstrations des théorèmes 2 et 3 voir [2] et [3].

Il est assez curieux que ces résultats, qui ne concernent que la structure abstraite des corps, se démontrent par l'emploi de certaines valuations. Ces démonstrations perdent leur validité quand k est algébrique par rapport à un champ de Galois (quand les théorèmes sont, également, faux), car un tel k ne possède aucune valuation non-triviale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. KRASNER, The non-existence of certain extensions, Amer. Journ. of Math., 75 (I), 1953, p. II2-II6.

[2] M. KRASNER, La non-existence des extensions d'une certaine forme. C.R. Acad. Sc. Paris, 1953, p. 370-372.

[3] M. KRASNER, Complèments à ma Note précédente. C.R. Acad. Sc. Paris, 1953, p. 685-687.