Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

N. Jacobson

Structure des anneaux associatifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 4 (1950-1951), exp. n° 3, p. 1-33
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1950-1951__4__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire A. CHÂTELET et P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1950/51
-:-:-:-

Exposé n° 3

STRUCTURE DES ANNEAUX ASSOCIATIFS

par N. JACOBSON

1. Le radical.

Dans cet exposé, nous donnons des indications sur quelques méthodes nouvelles qui ont été développées, durant les récentes années, dans la théorie des structures des anneaux. Ces méthodes s'appliquent pour donner des renseignements sur des anneaux plus généraux que ceux qu'on considérait autrefois (anneaux qui satisfont à la condition minimale pour les idéaux à droite), et elles donnent aussi un meilleur éclaircissement, même sur les anneaux avec la condition minimale.

1° La théorie des modules joue un rôle fondamental dans notre théorie. Nous supposons connus les définitions et les résultats principaux de la théorie des modules. Rappelons seulement le rapport entre la notion de module et celle de représentation. On définit une représentation d'un anneau $\mathfrak{A}$ comme un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ dans l'anneau $\mathfrak{E}$ d'endomorphismes d'un groupe commutatif $\mathfrak{M}$. Si $a \to A$ est une représentation, la définition $xa \equiv xA$ pour $x \in \mathfrak{M}$ donne une structure de module à droite au groupe $\mathfrak{M}$. Réciproquement, si $\mathfrak{M}$ est un module à droite, la correspondance entre l'élément a de $\mathfrak{A}$ et la multiplication $x \to xa$ dans $\mathfrak{M}$ est une représentation. D'une manière semblable on a un rapport entre les modules à gauche et les antireprésentations. C'est-à-dire les anti-homomorphismes de $\mathfrak{A}$ dans les anneaux d'endomorphismes.

Donnons maintenant quelques indications sur les notations. Nous désignerons le module quotient de $\mathfrak{M}$ par rapport au sous-module $\mathfrak{N}$ par $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$; l'anneau quotient de $\mathfrak{A}$ par rapport à l'idéal bilatère $\mathfrak{L}$ par $\mathfrak{A}/\mathfrak{L}$. Si $\mathfrak{N}$ est un sous-module du module $\mathfrak{M}$, nous emploierons la notation de quotient $(\mathfrak{N} : S)$ dans le cas suivant :

$S \subseteq \mathfrak{M}$. Alors $(\mathfrak{N} : S) = \{b\}$, $b \in \mathfrak{A}$, $sb \in \mathfrak{N}$ pour tout s de S.

Cet $(\mathfrak{N} : S)$ est un idéal à droite et il est un idéal bilatère si S est un sous-module.

Si x est un élément de $\mathfrak{M}$, l'idéal à droite $(0 : x) \equiv (\{0\} : \{x\})$ s'appelle

l'ordre de l'élément x . La proposition suivante est évidente et nous supprimons la démonstration.

PROPOSITION 1.

(1) Si $\mathfrak{N}$ est un sous-module, $(0 : \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N}) = (\mathfrak{N} : \mathfrak{M})$.

(2) Si $x \in \mathfrak{M}$, le sous-module $x\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A} \cdot (0 : x)$.

2° Un module $\mathfrak{M}$ (à droite) s'appelle irréductible si

(1) $\mathfrak{M}\mathfrak{A} \neq 0$,

(2) il n'existe aucun sous-module tel que $0 \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. (" $\subset$ " désigne l'inclusion stricte). Si S est un ensemble de modules, l'ensemble $\bigcap_{\mathfrak{M} \in S} (0 : \mathfrak{M})$ s'appelle le noyau de S . Evidemment, le noyau est un idéal bilatère. Nous conviendrons qu'une intersection vide $\bigcap_{\mathfrak{M} \in \emptyset}$ de sous-ensembles est l'ensemble entier. On dit que l'ensemble de module S est fidèle si son noyau est nul.

Alors, nous pouvons donner maintenant les définitions fondamentales de notre théorème comme il suit :

DÉFINITIONS. - On dit qu'un anneau $\mathfrak{A}$ est primitif (à droite) s'il existe un module (à droite) irréductible et fidèle pour $\mathfrak{A}$. On dit que $\mathfrak{A}$ est semi-simple (à droite) si tous les modules irréductibles à droite sont fidèles. Plus généralement le noyau de l'ensemble des modules irréductibles à droite s'appelle le radical (à droite) de $\mathfrak{A}$.

Alors $\mathfrak{A}$ est semi-simple si et seulement si son radical R est nul. On peut donner des définitions analogues pour les modules à gauche. Nous verrons que le radical à gauche coïncide avec le radical à droite et par conséquent $\mathfrak{A}$ est semi-simple à droite si et seulement s'il est semi-simple à gauche. Une question ouverte est : existe-t-il un anneau qui est primitif à droite, mais pas primitif à gauche ?

On définit un idéal bilatère $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{A}$ primitif (à droite) dans $\mathfrak{A}$ si $\mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ est un anneau primitif. Ceci entraîne que $\mathfrak{L}$ est $\neq \mathfrak{A}$. Si on rappelle que tout $\mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ module peut être considéré comme un $\mathfrak{A}$ module et réciproquement que tout $\mathfrak{A}$ module $\mathfrak{M}$ peut être considéré comme $\mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ module si $\mathfrak{L} \subseteq (0 : \mathfrak{M})$ on voit aisément les résultats suivants :

$\mathfrak{L}$ est primitif dans $\mathfrak{A}$ si et seulement si $\mathfrak{L} = (0 : \mathfrak{M})$ où $\mathfrak{M}$ est irréductible.

Le radical est l'intersection de tous les idéaux primitifs de $\mathfrak{A}$.

Si $\mathfrak{N}$ est le radical, $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ est semi-simple.

3° Les définitions que nous avons données sont extrinsèques. Pour les applications il est nécessaire d'avoir des définitions intrinsèques. On peut établir un rapport entre le radical, qui était défini par l'utilisation des idéaux bilatères, et un ensemble d'idéaux à droite (ou à gauche). Pour obtenir ces résultats nous avons besoin de quelques faits élémentaires de la théorie des modules monogènes et des modules irréductibles.

D'abord nous dirons qu'un module $\mathfrak{M}$ à droite est <u>strictement monogène</u> s'il existe un élément $u \in \mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{M} = u\mathfrak{A}$. Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal à droite $(0 : u)$ et soit e un élément de $\mathfrak{A}$ tel que $u = ue$. (L'élément e existe parce que $u \in \mathfrak{M}$). Si $a \in \mathfrak{A}$ on a $ua = uea$ et par conséquent $a - ea \in \mathfrak{J}$. Un idéal à droite s'appelle <u>régulier</u> s'il existe une unité à gauche modulo $\mathfrak{J}$ c'est-à-dire un élément e tel que $a \equiv ea \pmod{\mathfrak{J}}$ pour tout $a \in \mathfrak{A}$. Alors si $\mathfrak{M}$ est strictement monogène avec le générateur u , $\mathfrak{J} = (0 : u)$ est un idéal régulier à droite Réciproquement, on peut vérifier que si $\mathfrak{J}$ est un idéal à droite régulier, le module $\mathfrak{A} - \mathfrak{J}$ est strictement monogène avec le générateur $e + \mathfrak{J}$ et l'ordre de ce générateur est l'idéal $\mathfrak{J}$. Cette caractéristique des idéaux réguliers donne la proposition suivante .

PROPOSITION 2. - <u>Si $\mathfrak{J}$ est un idéal régulier à droite</u>, $\mathfrak{J} \supseteq (\mathfrak{J} : \mathfrak{A})$ <u>et</u> $(\mathfrak{J} : \mathfrak{A})$ <u>est le plus grand idéal bilatère contenu dans</u> $\mathfrak{J}$.

Pour la démonstration, nous pouvons supposer que $\mathfrak{J} = (0 : u)$ où u est un générateur d'un module monogène $\mathfrak{M}$. Puisque

$$\mathfrak{M} \cong \mathfrak{A} - \mathfrak{J} \ , \quad (0 : \mathfrak{M}) = (0 : \mathfrak{A} - \mathfrak{J}) = (\mathfrak{J} : \mathfrak{A}) \ .$$

Alors

$$(\mathfrak{J} : \mathfrak{A}) = (0 : \mathfrak{M}) = \bigcap_{x \in \mathfrak{M}} (0 : x) \subseteq (0 : u) = \mathfrak{J} \ .$$

Ensuite supposons que $\mathfrak{L}$ soit un idéal bilatère contenu dans $\mathfrak{J}$. On a $\mathfrak{A}\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{J}$ et par conséquent $\mathfrak{L} \subseteq (\mathfrak{J} : \mathfrak{A})$.

A chaque e de $\mathfrak{A}$ on peut associer un idéal régulier à droite $(1 - e)\mathfrak{A} = \{a - ea \mid a \in \mathfrak{A}\}$ qui possède e comme unité à gauche module d'idéal donné. On remarque qu'un idéal à droite est régulier si et seulement s'il contient un idéal de la forme $(1 - e)\mathfrak{A}$. Il s'ensuit que tout idéal à droite qui contient un idéal régulier est régulier à droite.

Si $z \in \mathfrak{A}$ on peut avoir $(1 - z)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Dans ce cas on dit que z est un élément quasi-régulier à droite. On remarque qu'un idéal à droite qui contient $(1 - z)\mathfrak{A}$ est égal à $\mathfrak{A}$ si et seulement s'il contient l'élément z. En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour l'égalité $(1 - z)\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ est que $z \in (1 - z)\mathfrak{A}$, c'est-à-dire qu'il existe un z' tel que $z = - z' + zz'$ ou $z + z' - zz' = 0$.

PROPOSITION 3. - Soit $\mathfrak{J}$ un idéal régulier à droite tel que $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$. Alors $\mathfrak{J}$ peut se plonger dans un idéal maximal (nécessairement régulier) à droite.

Rappelons que $\mathfrak{K}$ est un idéal maximal à droite si $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}$ et s'il n'existe aucun idéal à droite $\mathfrak{K}'$ tel que $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}' \subset \mathfrak{A}$. Alors soit $\mathfrak{J}$ régulier avec l'unité e mod $\mathfrak{J}$ et supposons $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$. Puisque $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$, $e \notin \mathfrak{J}$. Alors la famille des idéaux qui ne contiennent pas e mais qui contiennent $\mathfrak{J}$ n'est pas vide. Elle est inductive d'après le lemme de Zorn, elle contient un élément maximal $\mathfrak{K}$. On vérifie que $\mathfrak{K}$ est un idéal maximal à droite.

4° Pour bien étudier la notion de quasi-régularité il est commode d'introduire une nouvelle composition binaire dans $\mathfrak{A}$. Si $a, b \in \mathfrak{A}$ nous posons $a \circ b = a + b - ab$. On vérifie que cette composition est associative et que 0 est unité pour $\circ$ ($a \circ 0 = a = 0 \circ a$). Si $\mathfrak{A}$ possède une unité 1, la composition $\circ$ correspond à la multiplication par rapport à la correspondance

$$a \to a\sigma = 1 - a \; ; \; a \circ b = ((a\sigma)(b\sigma))\sigma^{-1} \quad .$$

Comme nous l'avons démontré ci-dessus, z est quasi-régulier à droite si et seulement s'il possède un quasi-inverse à droite z', c'est-à-dire $z \circ z = 0$. On dit que z est quasi-régulier s'il existe un élément z' tel que $z \circ z' = 0 = z' \circ z$. L'ensemble des éléments ayant cette propriété forme un groupe par rapport à la composition $\circ$. Si $\mathfrak{A}$ possède un élément unité, ce groupe est isomorphe au groupe multiplicatif usuel de l'anneau $\mathfrak{A}$. La correspondance σ ($a\sigma = 1 - a$) est un isomorphisme.

Un idéal à droite $\mathfrak{J}$ s'appelle quasi-régulier si tout élément $z \in \mathfrak{J}$ est quasi-régulier à droite. Signalons maintenant le résultat suivant :

PROPOSITION 4. - Si $\mathfrak{J}$ est un idéal quasi-régulier à droite, $\mathfrak{J}$ est un sous-groupe du groupe des éléments quasi-régulier (par rapport à $\circ$).

Si $z \in \mathfrak{J}$ il existe un élément z' tel que $z \circ z' = 0$. Alors $z' = - z + zz' \in \mathfrak{J}$. Il s'ensuit qu'il existe un z'' tel que $z' \circ z'' = 0$. Puisque $z \circ z' = 0 = z' \circ z''$ on a $z = z''$. Alors z est quasi-régulier et son

quasi-inverse $z' \in \mathfrak{J}$. Ceci entraîne que $\mathfrak{J}$ est un groupe par rapport à la composition $\circ$.

5° Un module irréductible est un cas particulier d'un module monogène. En effet, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 5. - Un module $\mathfrak{M}$ est irréductible si et seulement si on a les conditions suivantes :

(1) $\mathfrak{M} \neq 0$,

(2) $\mathfrak{M}$ est strictement monogène et admet tout élément non nul comme générateur.

La démonstration est simple et nous la supprimons. Nous laissons aussi comme exercice la démonstration de la proposition ci-après.

PROPOSITION 6. - $\mathfrak{M}$ est irréductible si et seulement si $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{A} - \mathfrak{J}$ où $\mathfrak{J}$ est un idéal régulier et maximal à droite.

Si on rappelle que $\mathfrak{P}$ est un idéal primitif dans $\mathfrak{A}$ et seulement si $\mathfrak{P} = (0 : \mathfrak{M})$ où $\mathfrak{M}$ est irréductible on voit que $\mathfrak{P}$ est primitif dans $\mathfrak{A}$ si et seulement si $\mathfrak{P} = (\mathfrak{J} : \mathfrak{A})$, $\mathfrak{J}$ étant un idéal régulier et maximal à droite. Ce résultat donne une caractéristique intrinsèque des idéaux primitifs. Nous pouvons démontrer maintenant le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Tout anneau primitif, commutatif, est un corps.

Puisque $\mathfrak{A}$ est primitif, 0 est un idéal primitif dans $\mathfrak{A}$. Donc il existe un idéal régulier maximal à droite $\mathfrak{J}$ tel que $(\mathfrak{J} : \mathfrak{A}) = 0$. Puisque $\mathfrak{A}$ est commutatif, $\mathfrak{J}$ est bilatère et puisque $(\mathfrak{J} : \mathfrak{A})$ est le plus grand idéal bilatère contenu dans $\mathfrak{J}$, $(\mathfrak{J} ; \mathfrak{A}) = \mathfrak{J}$. Alors $\mathfrak{J} = 0$ et 0 est maximal. Remarquons maintenant qu'il existe une unité e module $\mathfrak{J} = 0$. e est un élément unité de $\mathfrak{A}$. Puisque 0 est maximal ceci entraîne que $\mathfrak{A}$ est un corps.

6° Donnons maintenant la réponse aux questions que nous avons posées ci-dessus.

THÉORÈME 2.

(1) Le radical(à droite) $\mathfrak{R}$ est l'intersection de tous les idéaux réguliers et maximaux à droite.

(2) Le radical est un idéal quasi-régulier et il contient tout idéal régulier à droite.

(1) On sait que $\mathfrak{R} = \cap (\mathfrak{J} : \mathfrak{A})$, $\mathfrak{J}$ régulier et maximal à droite et que

$\mathfrak{J} \supseteq (\mathfrak{I} : \mathfrak{A})$. Alors $\cap \mathfrak{J} \supseteq \mathfrak{R}$. D'autre part, $\mathfrak{R} = \cap (0 : \mathfrak{M})$, $\mathfrak{M}$ un module irréductible et $(0 : \mathfrak{M}) = \bigcap_{u \in \mathfrak{M}} (0 : u)$. Puisque $(0 : u)$, où $u \neq 0$ est un élément du module irréductible, est un idéal à droite maximal et régulier, on a $\mathfrak{R} \geq \cap \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}$ maximal et régulier à droite. Alors $\mathfrak{R} = \cap \mathfrak{J}$.

2° Soit z dans $\mathfrak{A}$. Si z n'est pas quasi-régulier à droite $(1 - z)\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}$. et par conséquent (proposition 3) on peut trouver un idéal maximal à droite $\mathfrak{J}$ qui contient $(1 - z)\mathfrak{A}$. Mais, d'après (1), $z \in \mathfrak{J}$ et par conséquent $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}$ ce qui contredit la maximalité de $\mathfrak{J}$. Alors $\mathfrak{R}$ est quasi-régulièr. Supposons maintenant que z soit un élément qui appartienne à un idéal quasi-régulier à droite. Alors za est quasi-régulier à droite pour tout a dans $\mathfrak{A}$. Soit $\mathfrak{M}$ un module à droite irréductible. Si $z \notin (0 : \mathfrak{M})$ il existe un $u \in \mathfrak{M}$ tel que $uza = u$. Mais il existe un élément w' tel que $za \circ w' = 0$. Alors

$$0 = (u - uza) - (u - uza)\, z' = u - u(za \circ w') = u \quad .$$

Cette contradiction entraîne que $z \in (0 : \mathfrak{M})$. Alors $z \in \mathfrak{R} = \cap (0 : \mathfrak{M})$, $\mathfrak{M}$ irréductible.

Le même raisonnement que nous avons utilisé dans la démonstration de (2) donne aussi le critère suivant.

PROPOSITION 7. - $z \in \mathfrak{R}$ si et seulement azb est quasi-régulier pour tout a , $b \in \mathfrak{A}$.

On voit donc que le radical à droite coïncide avec le radical à gauche. Plus explicitement, on a :

THÉORÈME 3.

(1) Le radical (à droite) $\mathfrak{R} = \cap (0 : \mathfrak{M}')$, $\mathfrak{M}'$ module irréductible à gauche.

(2) $\mathfrak{R} = \cap \mathfrak{J}'$ $\mathfrak{J}'$ idéal maximal et régulier à gauche.

(3) $\mathfrak{R}$ contient tout idéal à gauche quasi-régulier.

Si z est un élément nilpotent et $z^n = 0$, $z' = - z + z^2 - z^3 + \ldots$ est un quasi-inverse de z . Il s'ensuit que $\mathfrak{R}$ contient tout nil-idéal à droite ou à gauche. Il est immédiat aussi que si e est idempotent $\neq 0$, e n'est pas quasi-régulier. Alors le radical ne contient aucun élément idempotent.

7° On peut donner une autre formulation du rapport entre les anneaux semi-simples et les anneaux primitifs. Pour cela, il faut rappeler la notion de la somme directe complète (produit au sens de Bourbaki) d'un ensemble $\{\mathfrak{A}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ des anneaux

des anneaux $\mathfrak{A}_\alpha$. On définit la somme directe complète $(A, \mathfrak{A}_\alpha)$ comme l'ensemble des fonctions $a(\alpha)$, $\alpha \in A$ où $a(\alpha) \in \mathfrak{A}_\alpha$. L'addition dans $(A, \mathfrak{A}_\alpha)$ est définie par $(a + b)(\alpha) = a(\alpha) + b(\alpha)$, et la multiplication par $ab(\alpha) = a(\alpha)\, b(\alpha)$. De cette manière, on obtient un anneau. Si $\mathfrak{B}$ est un sous-anneau de $(A, \mathfrak{A}_\alpha)$, pour chaque $\alpha \in A$ on a un homomorphisme $b \to b(\alpha)$ de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}_\alpha$. On dit que $\mathfrak{B}$ est une somme sous-directe des anneaux $\mathfrak{A}_\alpha$ si $b \to b(\alpha)$ est un homomorphisme sur $\mathfrak{A}_\alpha$ pour chaque α . Supposons que ceci soit le cas, et posons $\mathfrak{P}_\alpha$ = le noyau de $b \to b(\alpha)$. Alors il est clair que

(1) $\mathfrak{P}_\alpha$ est un idéal bilatère.

(2) $\mathfrak{B}/\mathfrak{P}_\alpha \cong \mathfrak{A}_\alpha$,

(3) $\bigcap_{\alpha \in A} \mathfrak{P}_\alpha = 0$. Réciproquement supposons que $\{\mathfrak{P}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ soit un ensemble d'idéaux bilatères dans un anneau $\mathfrak{B}$ tel que $\cap \mathfrak{P}_\alpha = 0$. On forme la somme directe complète $(A, \mathfrak{A}_\alpha)$, $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{B}/\mathfrak{P}_\alpha$. Chaque b donne un élément $b' \in (A, \mathfrak{A}_\alpha)$ tel que $b'(\alpha) = b + \mathfrak{P}_\alpha$. Ainsi on obtient un homomorphisme de $\mathfrak{B}$ sur un sous-anneau $\mathfrak{B}'$ de $(A, \mathfrak{A}_\alpha)$. Puisque $\cap \mathfrak{P}_\alpha = 0$ on voit que cet homomorphisme est un isomorphisme et puisque $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{B}/\mathfrak{P}_\alpha$ $\mathfrak{B}'$ est une somme sous-directe du $\mathfrak{A}_\alpha$. On peut alors identifier $\mathfrak{B}$ avec une somme sous-directe des anneaux $\mathfrak{B}/\mathfrak{P}_\alpha$. On peut démontrer maintenant le résultat suivant :

THÉORÈME 4. - Un anneau $\mathfrak{A}$ est semi-simple si et seulement s'il est (isomorphe à) une somme sous-directe d'anneaux primitifs. Un anneau commutatif est semi-simple si et seulement s'il est une somme sous-directe de corps commutatifs.

D'après les remarques ci-dessus et le théorème 1 les conditions sont nécessaires. Supposons que $\mathfrak{A}$ soit une somme sous-directe d'anneaux primitifs. Autrement dit, on a une famille d'idéaux primitifs $\mathfrak{P}_\alpha$ dans $\mathfrak{A}$ tel que $\cap \mathfrak{P}_\alpha = 0$. On peut aisément voir que si $\theta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$ est un homomorphisme de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}'$, l'image $\mathfrak{R}\theta$ du radical $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{A}$ est contenue dans le radical de $\mathfrak{A}'$. Par conséquent, $\mathfrak{R}$ est contenu dans tout idéal bilatère $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{A}$ tel que $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$ soit semi-simple. Alors $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}_\alpha$ parce que $\mathfrak{P}_\alpha$ est primitif dans $\mathfrak{A}$, il s'ensuit que $\mathfrak{R} \subseteq \cap \mathfrak{P}_\alpha = 0$ et que $\mathfrak{A}$ est semi-simple. La seconde partie du théorème est évidente.

Le théorème précédent donne une formule très frappante du rapport entre semi-simplicité et primitivité. Pourtant, il faut faire attention : le rapport entre une somme sous-directe des anneaux $\mathfrak{A}_\alpha$ et les composants $\mathfrak{A}_\alpha$ n'est pas très étroit. Ainsi, deux anneaux ayant des propriétés tout à fait différentes peuvent être

représentés comme sommes sous-directes des mêmes anneaux et un anneau peut être représenté comme somme sous-directe de composants tout à fait différents. Par exemple, l'anneau I des entiers et la somme directe complète (P , I_p) du corps $I_p = I/(p)$ sont tous les deux sommes sous-directes des corps I_p. Aussi I peut être considéré comme une somme sous-directe des anneaux $I/(p^e)$ où p est fixe et $e = 1 , 2 , 3 , \cdots$

8° Il est important de donner les extensions de la notion de radical, etc. pour les anneaux avec opérateurs et pour les algèbres. Rappelons qu'un <u>anneau</u> $\mathfrak{A}$ <u>avec un domaine</u> Φ <u>d'opérateurs</u> est un couple $(\Phi , \mathfrak{A})$ où Φ est un ensemble quelconque, $\mathfrak{A}$ est un anneau et on a une loi de composition αa de $\alpha \in \Phi$ et $a \in \mathfrak{A}$ tel que

(1) $$\alpha (a + b) = \alpha a + \alpha b$$

(2) $$\alpha (ab) = (\alpha a)\, b = a(\alpha b) \quad .$$

Si Φ est un corps et que la loi de composition αa donne une structure d'un espace vectoriel à $\mathfrak{A}$, on dit que le couple $(\Phi , \mathfrak{A})$ est une <u>algèbre</u>, ou $\mathfrak{A}$ <u>une algèbre sur le corps</u> Φ.

Si $(\Phi , \mathfrak{A})$ est un anneau avec opérateur on définit un $(\Phi , \mathfrak{A})$-<u>module</u> (à droite) $\mathfrak{M}$ comme un ensemble $\mathfrak{M}$ qui est à la fois un $\mathfrak{A}$ module (à droite) et un groupe avec le domaine d'opérateur Φ et qui possède la propriété suivante :

(3) $$\alpha (ma) = (\alpha m)\, a = m(\alpha a) \quad ,$$

$\alpha \in \Phi$, $m \in \mathfrak{M}$, $a \in \mathfrak{A}$. Si $(\Phi , \mathfrak{A})$ est une algèbre on exige d'ailleurs que $\mathfrak{M}$ soit espace vectoriel (à gauche) sur Φ . Le $(\Phi , \mathfrak{A})$-module $\mathfrak{M}$ est dit <u>irréductible</u> si :

1. $\mathfrak{M}\mathfrak{A} \neq 0$ et

2. s'il n'existe aucun $(\Phi , \mathfrak{A})$-sous-module $\mathfrak{N}$ tel que $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N} \supset 0$.

Cette notion permet d'étendre les notions de primitivité, de semi-simplicité et de radical aux cas des anneaux avec opérateurs et des algèbres. Une question intervient : celle de savoir comment ces notions dépendent des domaines d'opérateurs. Nous verrons que ces notions sont complètement indépendantes des domaines d'opérateurs. Le résultat fondamental pour ceci est la proposition suivante.

PROPOSITION 8. - <u>Soit</u> $(\Phi , \mathfrak{A})$ <u>un anneau avec opérateur ou une algèbre. Un sous-ensemble</u> $\mathfrak{J}$ <u>de</u> $\mathfrak{A}$ <u>est un</u> Φ<u>-idéal régulier et maximal à droite si et seulement si</u> $\mathfrak{J}$ <u>est un idéal régulier et maximal à droite de l'anneau</u> $\mathfrak{A}$ (<u>sans</u>

opérateur).

Supposons d'abord que $\mathfrak{J}$ soit régulier et maximal à droite dans $\mathfrak{A}$ sans opérateurs. Soit $\alpha \in \Phi$ l'ensemble $\alpha\mathfrak{J} = \{\alpha b | b \in \mathfrak{J}\}$ est alors un autre idéal à droite dans $\mathfrak{A}$. Si $\alpha\mathfrak{J} \neq \mathfrak{J}$ on a $\alpha\mathfrak{J} + \mathfrak{J} = \mathfrak{A}$ parce que $\mathfrak{J}$ est maximal. Si e est une unité à gauche mod $\mathfrak{J}$ on a $e = b_1 + \alpha b_2$, $b_i \in \mathfrak{J}$. Alors $e^2 = b_1 e + b_2(\alpha e) \in \mathfrak{J}$. Mais $e^2 - e \in \mathfrak{J}$ et par conséquent $e \in \mathfrak{J}$ ce qui contredit l'inégalité $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$. Nous pouvons conclure maintenant que $\alpha\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}$ pour chaque $\alpha \in \Phi$ et que $\mathfrak{J}$ est un Φ-idéal. Evidemment $\mathfrak{J}$ est maximal comme Φ-idéal. Supposons ensuite que $\mathfrak{J}$ soit un Φ-idéal régulier et maximal à droite. Alors $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{A}$ et si $\mathfrak{J}$ n'est pas maximal dans l'anneau sans opérateur, il existe un $\mathfrak{J}'$ régulier et maximal à droite tel que $\mathfrak{J}' \supset \mathfrak{J}$. Mais $\mathfrak{J}'$ est un Φ-idéal et ce fait contredit la maximalité de $\mathfrak{J}$.

Comme dans le cas ordinaire, on voit qu'un $(\Phi, \mathfrak{A})$-module $\mathfrak{M}$ est irréductible si, et seulement si il est de la forme $\mathfrak{A} - \mathfrak{J}$ où $\mathfrak{J}$ est un Φ-idéal maximal et régulier à droite. La proposition précédente entraîne que tout $(\Phi, \mathfrak{A})$-module irréductible est irréductible comme $\mathfrak{A}$-module et que tout $\mathfrak{A}$-module irréductible peut être considéré comme $(\Phi, \mathfrak{A})$-module (nécessairement irréductible). On a maintenant le résultat suivant :

THÉORÈME 5. - Soit $(\Phi, \mathfrak{A})$ un anneau avec opérateur ou une algèbre.

(1) Un sous-ensemble $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{A}$ est un Φ-idéal primitif dans $\mathfrak{A}$ si et seulement s'il est un idéal primitif dans $\mathfrak{A}$.

(2) Le radical de $(\Phi, \mathfrak{A})$ coïncide avec le radical de $\mathfrak{A}$.

9° Nous donnons maintenant quelques indications (sans beaucoup de détails) sur des cas particuliers des notions que nous venons d'étudier et sur quelques questions ouvertes :

Supposons d'abord que $\mathfrak{A} = I$ l'anneau des entiers. Les éléments quasi-réguliers de $\mathfrak{A}$ sont 0 et 2, I est semi-simple. Tout corps est semi-simple, sinon il coïnciderait avec son radical et cela est impossible, parce que l'élément 1 n'est pas quasi-régulier.

Soit $\mathfrak{A}$ un anneau possédant un élément unité et ayant la propriété que l'ensemble des éléments inversibles forme avec 0 un sous-corps Δ. Il s'ensuit que tout élément quasi-régulier est contenu dans Δ. Puisque Δ ne contient aucun idéal $\neq \mathfrak{A}$, $\neq 0$, on conclut que $\mathfrak{A}$ est semi-simple. Quelques cas particuliers de cette espèce d'anneau sont les suivants :

(1) L'anneau de polynômes $\Delta[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r]$ où Δ est un corps et les λ_i sont des indéterminées.

(2) L'algèbre libre sur un corps.

(3) L'algèbre associative universelle (l'algèbre de Birkhoff-Witt) d'une algèbre de Lie quelconque.

Parmi ces algèbres il existe une algèbre primitive : l'algèbre universelle d'algèbre de Lie ayant une base s, t où $[st] = s$. Aussi, il existe des algèbres non-primitives universelles, par exemple les algèbres commutatives. Un problème intéressant, et peut-être difficile, est de donner une condition sur l'algèbre de Lie, qui entraîne que son algèbre universelle soit primitive.

Supposons ensuite que $\mathfrak{A}$ est un anneau avec un élément unité tel que l'ensemble des éléments non-inversibles forme un idéal. On voit aisément que cet idéal est le radical. Soit, par exemple, $\mathfrak{A}$ l'anneau des entiers p-adiques. L'idéal des multiples des p inclut tous les éléments non-inversibles. Cet idéal est alors le radical. Un autre exemple de la même sorte est l'anneau des séries formelles $\sum_0^\infty a_i z^i$, les a_i appartenant à un corps. Ici l'ensemble des séries aux termes constants nuls est le radical.

On peut démontrer que si $\mathfrak{A}$ est un anneau quelconque, le radical de l'anneau $\mathfrak{A}_n$ des $n \times n$ matrices sur $\mathfrak{A}$ est l'idéal $\mathfrak{R}_n$ où $\mathfrak{R}$ est le radical de $\mathfrak{A}$; ce résultat entraîne que I_n et Δ_n sont semi-simples, I l'anneau des entiers et Δ un corps quelconque.

On dit que $\mathfrak{A}$ est <u>simple</u> si $\mathfrak{A}^2 \neq 0$ et s'il n'existe aucun idéal bilatère $\mathfrak{B}$ tel que $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \supset 0$. Si $\mathfrak{A}$ est simple, ou bien $\mathfrak{A}$ est semi-simple, ou bien $\mathfrak{A}$ coïncide avec son radical. Une question ouverte est celle de savoir s'il existe un anneau simple et non semi-simple.

On peut démontrer que si $\mathfrak{A}$ est un anneau sans nil-idéaux, l'anneau des polynômes $\mathfrak{A}[\lambda]$, λ une indéterminée est semi-simple. Ceci est un résultat récent d'AMITSUR. Une question ouverte est la détermination du radical de $\mathfrak{A}[\lambda]$ dans le cas d'un $\mathfrak{A}$ arbitraire.

On peut voir que l'algèbre qui est engendrée par deux éléments u, v qui satisfont à la seule condition $uv = 1$ est primitive.

Une autre question ouverte est celle de savoir si l'algèbre d'un groupe arbitraire sans élément d'ordre fini est semi-simple. Ceci est vrai si le groupe est commutatif.

2. Modules irréductibles.

Soit $\mathfrak{M}$ un $\mathfrak{A}$-module à droite arbitraire et soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble de tous les endomorphismes C de $\mathfrak{M}$ qui commutent avec les homothéties $x \longrightarrow xa$, $a \in \mathfrak{A}$. $\mathfrak{C}$ est évidemment un sous-anneau de l'anneau $\mathfrak{E}$ des endomorphismes de $\mathfrak{M}$ contenant l'opérateur unité. On peut considérer $\mathfrak{M}$ comme un module fidèle, unitaire par rapport à $\mathfrak{C}$. Nous préférons placer $\mathfrak{C}$ à gauche. Pour cela nous introduisons un anneau Γ qui est anti-isomorphe à $\mathfrak{C}$ par la correspondance $\gamma \longrightarrow C$. La définition $\gamma m = mC$, $m \in \mathfrak{M}$, donne une structure de Γ-module à gauche à $\mathfrak{M}$. Bien entendu, $1 \in \Gamma$ et $\mathfrak{M}$ est Γ-unitaire et fidèle. Nous appellerons Γ le commutant de $\mathfrak{A}$ ou du $\mathfrak{A}$-module $\mathfrak{M}$.

Maintenant, on peut considérer le commutant $\mathfrak{L}$ de Γ . On place cet anneau à droite et on considère $\mathfrak{M}$ comme $\mathfrak{L}$-module à droite. Supposons que $\mathfrak{M}$ est fidèle. Dans ce cas on peut identifier $\mathfrak{A}$ avec un sous-anneau de $\mathfrak{L}$. Une question intéressante est celle du rapport entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{L}$. Par exemple, on peut chercher des conditions qui impliquent $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}$. On peut voir que l'égalité est rarement remplie pour les anneaux $\mathfrak{A}$ qui ne satisfont pas à la condition minimale sur les idéaux à droite, mais il y a beaucoup de cas intéressants où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{L}$ sont presque égaux dans le sens suivant : Pour toute partie finie $F \subset \mathfrak{M}$ et tout élément $1 \in \mathfrak{L}$ il existe un $a = a(F) \in \mathfrak{A}$ tel que $x1 = xa$ pour chaque $x \in F$. Nous verrons que ce résultat est vrai pour les modules irréductibles.

1° Supposons maintenant que $\mathfrak{M}$ soit irréductible. Le premier résultat fondamental sur de tels modules est le :

LEMME de Schur. - *Soient $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux $\mathfrak{A}$-modules irréductibles, et soit B un homomorphisme de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2$. Alors, ou bien $B = 0$, ou bien B est un isomorphisme sur.*

La démonstration est immédiate. Si $B \neq 0$, $\mathfrak{M}_1 B$ est un sous-module $\neq 0$ de $\mathfrak{M}_2$. Alors $\mathfrak{M}_1 B = \mathfrak{M}_2$. Le noyau de B est un sous-module de $\mathfrak{M}_1$ et d'après l'irréductibilité de $\mathfrak{M}_1$, ce noyau est 0 ou $m\mathfrak{M}_1$. Mais, s'il est $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_1 B = 0$ et $B = 0$. Alors le noyau est 0 , et par conséquent B est un isomorphisme.

Une conséquence immédiate du lemme de Schur est le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - *Le commutant Γ d'un module irréductible est un corps (non-commutatif).*

On peut considérer $\mathfrak{M}$ comme un espace vectoriel (à gauche) sur Γ .

Le commutant de $\mathfrak{M}$ comme Γ-module est l'anneau $\mathfrak{L}$ de toutes les transformations linéaires de $\mathfrak{M}$ sur Γ. Si $\mathfrak{M}$ est fidèle pour $\mathfrak{A}$ (et désormais nous supposerons que cela est le cas) on peut identifier $\mathfrak{A}$ avec un sous-anneau de $\mathfrak{L}$. Nous démontrerons que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{L}$ sont presque égaux.

2° Plus généralement, soient $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux espaces vectoriels à gauche sur le même corps Γ, $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ le groupe additif de toutes les transformations linéaires de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2$ et $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_2)$ l'anneau des transformations de $\mathfrak{M}_2$ dans $\mathfrak{M}_2$. Si $S \subseteq \mathfrak{M}_1$ posons

$$S^{\perp} = \left\{ b \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \mid sb = 0 \text{ pour tout } s \in S \right\}$$

et si $S \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ posons

$$S^{\perp} = \left\{ m \in \mathfrak{M}_1 \mid ms = 0 \text{ pour tout } s \in S \right\} .$$

Si $S \subseteq \mathfrak{M}_1$, $S^{\perp}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ et $S^{\perp}\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_2) \subseteq S^{\perp}$. Si $S^{\perp} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$, $S^{\perp}$ est un sous-espace de $\mathfrak{M}_1$. On a évidemment $S^{\perp\perp} \supseteq S$, et $S_1 \subseteq S_2^{\perp}$, si $S_1 \subseteq S_2$. Si $S \subseteq \mathfrak{L}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$, les éléments de S introduisent des transformations linéaires de $\mathfrak{M}_1 - S^{\perp}$ dans $\mathfrak{M}_2$. Le théorème que nous avons annoncé pour les modules irréductibles est un cas particulier du théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Soit $\mathfrak{A}$ un sous-anneau de $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_2)$ et $\mathfrak{L}$ un sous-groupe de $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ tel que $\mathfrak{L}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{L}$. Faisons les suppositions suivantes :

(1) $\mathfrak{A}$ est un ensemble irréductible d'endomorphismes du groupe additif $\mathfrak{M}_2$,

(2) le commutateur de $\mathfrak{A}$ est Γ. Alors l'ensemble $\mathfrak{L}$ de transformation, induit par les $b \in \mathfrak{L}$ sur $\overline{\mathfrak{M}}_1 = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{L}^{\perp}$ dans $\mathfrak{M}_2$ est presque égal à $\mathfrak{L}(\overline{\mathfrak{M}}_1, \mathfrak{M}_1)$.

Il suffit de démontrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments de $\mathfrak{M}_1$ linéairement indépendants module $\mathfrak{L}^{\perp}$ et si $y_1, \ldots, y_n$ sont arbitraires dans $\mathfrak{M}_2$, il existe un $b \in \mathfrak{L}$ tel que $x_i b = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Nous démontrons d'abord le lemme.

LEMME. - Soit $\left\{ u_1, \ldots, u_m \right\}$ une partie finie quelconque de $\mathfrak{M}_1$. On a :

$$(1) \qquad \mathfrak{L}^{\perp} + \sum_1^m \Gamma u_i = \left(\bigcap_1^m u_i^{\perp} \cap \mathfrak{L} \right)^{\perp} .$$

Démontrons d'abord le cas $m = 1$. Puisque $\mathfrak{L} \supseteq \mathfrak{L} \cap u^{\perp}$, $\mathfrak{L}^{\perp} \subseteq (u^{\perp} \cap \mathfrak{L})^{\perp}$

et puisque $u^{\perp} \supseteq \mathfrak{L} \cap u^{\perp}$, $\Gamma u \subseteq u^{\perp\perp} \subseteq (\mathfrak{L} \cap u^{\perp})^{\perp}$. Alors $\mathfrak{L}^{\perp} + \Gamma u \subseteq (u^{\perp} \cap \mathfrak{L})^{\perp}$ / Supposons que $v \in (u^{\perp} \cap \mathfrak{L})^{\perp}$. Alors pour chaque b tel que $ub = 0$, on a aussi $vb = 0$. L'ensemble $u\mathfrak{L} = \{ub \mid b \in \mathfrak{L}\}$ est d'après $\mathfrak{L}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{L}$ un sous-module de $\mathfrak{M}_2$ considéré comme $\mathfrak{U}$-module. Si $u\mathfrak{L} \neq 0$, $u\mathfrak{L} = \mathfrak{M}_2$, et l'application $ub \rightarrow vb$ définit un $\mathfrak{U}$-homomorphisme de $\mathfrak{M}_2$. D'après la condition (2) il existe un $\gamma \in \Gamma$ tel que $vb = \gamma(ub)$ pour tout $b \in \mathfrak{L}$. Si $u\mathfrak{L} = 0$, on a $vb = 0$ et on peut choisir pour γ un élément quelconque de Γ . Maintenant on a $a(v - \gamma u)\, b = 0$ pour tout $b \in \mathfrak{L}$ qui entraîne $v - \gamma u \in \mathfrak{L}^{\perp}$ et $v \in \mathfrak{L}^{\perp} + \Gamma u$. Ceci démontre le lemme dans le cas $m = 1$. Supposons ensuite que (1) soit vrai pour $m - 1$. Posons :

$$\mathfrak{L}^{\perp} = \bigcap_1^{m-1} u_j^{\perp} \cap \mathfrak{L} \text{ . On a } \mathfrak{L}'\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{L} \text{ et, par hypothèse :}$$

$$(2) \qquad \mathfrak{L}^{\perp} + \sum_{j=1}^{m-1} \Gamma u_j^{\perp} = -\left(\bigcap_1^{m-1} u_j^{\perp} + \mathfrak{L}\right)^{\perp}$$

D'après le cas $m = 1$

$$\mathfrak{L}'^{\perp} + \Gamma u_m = (u_m^{\perp} \cap \mathfrak{L}')^{\perp}$$

La substitution de (2) donne

$$\mathfrak{L}'^{\perp} + \sum_1^m \Gamma u_i = \left(\bigcap_1^m u_i^{\perp} \cap \mathfrak{L}\right)^{\perp} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour démontrer le théorème remarquons que si $x_i , \ldots , x_n$ sont linéairement indépendants mod $\mathfrak{L}^{\perp}$, $\mathfrak{L}^{\perp} + \sum_1^n \Gamma x_i \supset \mathfrak{L}^{\perp} + \sum_1^{n-1} \Gamma x_j$. D'après le lemme $\bigcap_1^n x_i^{\perp} \cap \mathfrak{L} \subset \bigcap_1^{n-1} x_j^{\perp} \cap \mathfrak{L}$. Autrement dit il existe un $b \in \mathfrak{L}$ tel que $x_1 b = \ldots = x_{n-1} b = 0$, mais $x_n b \neq 0$. Pour chaque x_i , $i = 1 , \ldots , n$, on peut alors trouver un $e_i \in \mathfrak{L}$ tel que $x_i e_i \neq 0$, $x_i e_i = 0$, $i \neq j$. Puisque $\mathfrak{U}$ est irréductible dans $\mathfrak{M}$ on peut trouver un $a_i \in \mathfrak{U}$ tel que $x_i e_i a_i = y_i$. L'élément $b = \sum e_i a_i \in \mathfrak{L}$, remplit les conditions $x_i b = y_i$, $i = 1 , \ldots , n$ ce qui démontre le théorème.

Si $\mathfrak{U}$ est un sous-anneau de l'anneau $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ qui est irréductible, et tel que le commutant soit Γ on peut, pour $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}$. On a $\mathfrak{U}^{\perp} = 0$ et par conséquent $\mathfrak{U}$ est presque égal à $\mathfrak{L}$. On a alors le corollaire.

COROLLAIRE. - Soient $\mathfrak{M}$ un $\mathfrak{A}$-module irréductible et fidèle, Γ le commutant et $\mathfrak{L}$ le commutant de $\mathfrak{M}$ comme Γ-module à gauche. Alors $\mathfrak{A}$ est presque égal à $\mathfrak{L}$.

3° On peut donner une interprétation topologique des résultats que nous venons d'obtenir. Donnons-en une brève indication :

Rappelons d'abord que si X et Y sont des ensembles quelconques, l'ensemble Y^X des applications de X dans Y peut être muni de la topologie-produit usuelle où on considère X et Y comme des espaces discrets. Un système fondamental des voisinages d'un point $f \in Y^X$ est formé des ensembles des applications g telles que $g(x_i) = f(x_i)$ pour une partie finie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de X. Désignons ce voisinage par $O(f ; x_1, \ldots, x_n)$. Si X et Y sont des groupes, on munit l'ensemble $H(X, Y)$ d'homomorphismes de X dans Y de la topologie d'un sous-espace de Y^X. Si X et Y sont commutatifs, $H(X, Y)$ est un groupe par rapport à la définition usuelle de l'addition. On peut vérifier que $H(X, Y)$ est un groupe topologique. Si Z est un autre groupe commutatif, on a une application de $M(X, Y) \times H(Y, Z)$ dans $H(X, Z)$ cette application est donnée par le produit des homomorphismes. On peut vérifier que ce produit est continu. En particulier, l'anneau $H(X, X)$ des endomorphismes du groupe commutatif $= X$ est un anneau topologique.

Les mêmes choses sont valables pour les ensembles $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ de toutes les transformations linéaires de l'espace vectoriel $\mathfrak{M}$ sur Γ dans l'espace $\mathfrak{N}$ sur Γ. $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ et $H(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ sont fermés dans $\mathfrak{N}^{\mathfrak{M}}$. Le voisinage $O(0 ; x_1, \ldots, x_n) \cap \mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \bigcap x_i^{\perp}$ où $S^{\perp}$ est défini comme ci-dessus. On appelle les topologies que nous venons d'introduire les topologies faibles de Y^X, de $H(X, Y)$ et de $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$. La notion de presque égalité coïncide avec celle de densité dans le sens topologique. On peut donc améliorer l'énoncé du théorème 2 de la manière suivante :

THÉORÈME 2'. - Soient $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{L}$ comme dans le théorème 2. $\mathfrak{L}^{\perp\perp}$ = la fermeture $F(\mathfrak{L})$ de $\mathfrak{L}$ dans la topologie faible de $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$. Si $S \subseteq \mathfrak{M}_1$, $S^{\perp}$ est évidemment fermé. Alors $\mathfrak{L}^{\perp\perp} \supseteq F(\mathfrak{L})$. D'autre part, soit C dans $\mathfrak{L}^{\perp\perp}$ et soit $u_1, \ldots, u_m$ des éléments de $\mathfrak{M}_1$; Si U est le sous-espace vectoriel engendré par les u_i on peut choisir une base $v_1, \ldots, v_r$ pour $\mathfrak{A}$ telle que $v_1, \ldots, v_g \in \mathfrak{L}^{\perp}$ et telle que $v_{r+1}, \ldots, v_g$ soient linéairement indépendants par rapport à $\mathfrak{L}^{\perp}$. D'après le théorème 2, il existe un élément $b \in \mathfrak{L}$ tel que $v_j b = v_j c$, $j = r+1, \ldots, g$. D'ailleurs $v_k b = 0 = v_k c$, $k = 1, \ldots, q$. Il s'ensuit que $u_i b = u_i c$, $i = 1, \ldots, m$

et d'après la définition $c \in \mathfrak{L}^{\perp\perp}$. On voit alors que $\mathfrak{L}^{\perp\perp} = F(\mathfrak{L})$.

Le corollaire, pour les modules irréductibles, peut se formuler comme un théorème de densité :

COROLLAIRE. - Soient $\mathfrak{M}$ un module irréductible et fidèle, Γ le commutant de $\mathfrak{U}$, et $\mathfrak{L}$ le commutant de Γ . Alors $\mathfrak{U}$ est partout dense dans $\mathfrak{L}$ par rapport à la topologie faible.

4° On dit qu'un sous-ensemble S de $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_2)$ est k fois transitif si pour chaque ensemble de $\ell \leq k$ vecteurs linéairement indépendants $x_1 , \ldots , x_\ell$ de $\mathfrak{M}_1$ et chaque ensemble quelconque de vecteurs $v_1 , \ldots , v_e$ de $\mathfrak{M}_2$, on peut trouver un élément $s \in S$ tel que $x_i s = y_i$, $i = 1 , \ldots , \ell$. Il est clair que S est partout dense dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_1 , \mathfrak{M}_1)$ si et seulement s'il est k fois transitif pour tout $k = 1 , 2 , \ldots$ Si $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$ et si $\mathfrak{U}$ est un sous-anneau de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{U}$ est 1 fois transitif si et seulement si $\mathfrak{U}$ est un ensemble irréductible d'endomorphismes du groupe $\mathfrak{M}$. Nous allons démontrer qu'un sous-anneau de $\mathfrak{L}$, deux fois transitif, est partout dense.

Signalons d'abord le résultat suivant :

THÉORÈME 3. - Si $\mathfrak{U}$ est un sous-anneau deux fois transitif de l'anneau $\mathfrak{L}$ de toutes les transformations linéaires de $\mathfrak{M}$ sur Γ dans lui-même, le commutant de $\mathfrak{U}$ est Γ .

Soit C un endomorphisme qui commute avec tout $a \in \mathfrak{U}$. Alors si x est quelconque dans $\mathfrak{M}$, x et xC sont linéairement indépendants. Autrement, il y aurait un $a \in \mathfrak{U}$ tel que $xa = 0$, $(xC)a \neq 0$. Ceci est impossible parce que $(xC)a = (xa)C = 0$. Donc si $x \neq 0$, on a $xC = \gamma_x x$, $\gamma_x \in \Gamma$. Si $y \neq 0$, $yC = \gamma_y y$, mais on peut trouver un élément $a \in \mathfrak{U}$ tel que $xa = y$, et ceci implique que $yC = (xa)C = (xC)a = (\gamma_x x) = \gamma_x(xa) = \gamma_x y$. Alors $\gamma_x = \gamma_y = \gamma$ et C est l'homothétie $x \longrightarrow \gamma_x$.

Le théorème 3, et le corollaire au théorème 2, entraînent le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - Tout sous-anneau 2 fois transitif de l'anneau $\mathfrak{L}$ est partout dense dans $\mathfrak{L}$.

5° Le théorème de densité, pour les modules irréductibles donne quelques renseignements sur la structure des anneaux primitifs. Le résultat suivant est très utile pour les applications :

THÉORÈME 4. - Soit $\mathfrak{A}$ un anneau primitif. Alors, ou bien $\mathfrak{A}$ est isomorphe à l'anneau de toutes les transformations linéaires d'un espace linéaire convenable de dimension finie, ou bien, pour chaque entier $k > 0$, $\mathfrak{A}$ contient un sous-anneau $\mathfrak{A}_k$ qui est homomorphe à un anneau $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_k, \mathfrak{M}_k)$ où $\mathfrak{M}_k$ est un espace vectoriel convenable de dimension k.

Pour la démonstration, on peut identifier $\mathfrak{A}$ à un sous-anneau partout dense dans $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$, $\mathfrak{M}$ étant un espace vectoriel convenable. Si $\mathfrak{M}$ est fini, il est clair que $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}$. Autrement, $\mathfrak{M}$ contiendrait un sous-espace $\mathfrak{M}_k$ de dimension k. Soit $\mathfrak{A}_k$ le sous-anneau de $\mathfrak{A}$ des éléments qui appliquent $\mathfrak{M}_k$ dans lui-même. On voit, d'après le théorème de densité que l'ensemble $\mathfrak{A}_k$ des transformations induites dans $\mathfrak{M}_k$ par les éléments de $\mathfrak{A}_k$ est $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}_k, \mathfrak{M}_k)$. Alors $\mathfrak{A}_k$ est homomorphe à $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_k, \mathfrak{M}_k)$.

6° Pour les applications, il est nécessaire d'avoir aussi une détermination intrinsèque pour le commutant d'un module irréductible. Nous allons considérer plus généralement les modules strictement monogènes. Soient $\mathfrak{M}$ un module strictement monogène, u un générateur (strict) et $\mathfrak{J} = (0 : u)$. Nous aurons besoin de la notion du normalisateur d'un idéal à droite. On désignera ainsi le plus grand sous-anneau $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{A}$ dans lequel $\mathfrak{J}$ est contenu comme idéal bilatère. On voit que $\mathfrak{L}$ peut être défini aussi comme l'ensemble des éléments b tel que $b\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}$, car on peut vérifier que cet ensemble est un sous-anneau de $\mathfrak{A}$. Il est clair que $\mathfrak{L}$ contient l'ensemble $\mathfrak{K}$ des éléments k tel que $k\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{J}$. De plus $\mathfrak{K}$ est un idéal bilatère de $\mathfrak{L}$ et un idéal à droite de $\mathfrak{A}$ qui contient $\mathfrak{J}$. Nous pouvons énoncer maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME 5. - Soit $\mathfrak{M}$ un module monogène avec le générateur u. Soient $\mathfrak{J}$ l'ordre de u, $\mathfrak{L}$ le normalisateur de $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{K}$ l'idéal de $\mathfrak{L}$ formé par tous les éléments k tel que $k\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{J}$. Alors le commutant de $\mathfrak{M}$ est égal à $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}$.

Soit C un endomorphisme de $\mathfrak{M}$ tel que $(ma)C = (mC)a$ pour tout $a \in \mathfrak{A}$ et posons $uC = ub$. On a $(ua)C = uba$, c'est-à-dire que C est l'application $ua \longrightarrow uba$. Si $a \in \mathfrak{J}$, $ua = 0$ et C étant un endomorphisme, on conclut que $(ua)C = 0$. Donc $ba \in \mathfrak{J}$ pour tout $a \in \mathfrak{J}$ et ceci implique $b \in \mathfrak{L}$. D'autre part, soit b un élément quelconque de $\mathfrak{L}$ et considérons l'application $ua \longrightarrow uba$, Si $ua = 0$, on a $uba = 0$, et d'après ça, on définit une application univoque C_b dans $\mathfrak{M}$. On vérifie que C_b est un $\mathfrak{A}$ endomorphisme. Alors, on a une correspondance $b \longrightarrow C_b$ de $\mathfrak{L}$ sur l'anneau $\mathfrak{C}$ des $\mathfrak{A}$ endomorphismes de $\mathfrak{M}$. On peut vérifier que cette correspondance est un anti-homomorphisme. Supposons que $C_b = 0$. Alors $uba = 0$ pour tout $a \in \mathfrak{A}$ et $b = k \in \mathfrak{K}$. D'après cela, $\mathfrak{C}$ est

anti-isomorphe à $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}$ et, par conséquent, nous pouvons prendre $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}$ comme le commutant Γ de $\mathfrak{M}$.

7° Nous allons considérer ensuite la théorie des commutants pour les modules par rapport à un anneau avec opérateur ou une algèbre. Pour avoir une bonne théorie, il faut supposer que les éléments de Φ commutent deux à deux, c'est-à-dire si α, $\beta \in \Phi$, $\alpha(\beta a) = \beta(\alpha a)$. Supposons désormais que cette condition soit remplie (ceci est toujours le cas pour les algèbres). Soit $\mathfrak{M}$ un $(\Phi, \mathfrak{A})$-module. Considérons maintenant l'ensemble $\mathfrak{C}$ des endomorphismes C qui commutent avec les endomorphismes $x \to xa$, $a \in \mathfrak{A}$ et $x \to \alpha x$, $\alpha \in \Phi$. D'après notre condition, il est clair que $\mathfrak{C}$ inclut l'ensemble des applications $x \to \alpha x$. Si $C \in \mathfrak{C}$ et $\alpha \in \Phi$ on définit αC comme le produit de C et $x \to \alpha x$. On peut vérifier que ce produit donne une structure d'anneau avec le domaine d'opérateur Φ à l'anneau $\mathfrak{C}$. Il est possible de considérer $\mathfrak{M}$ d'une manière évidente comme $(\Phi, \mathfrak{C})$-module.

Quelle est la situation si on passe de $(\Phi, \mathfrak{A})$ à $\mathfrak{A}$? Une réponse partielle à cette question est donnée dans la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 1. - Soit $\mathfrak{M}$ un $(\Phi, \mathfrak{A})$-module tel que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\mathfrak{A}$. Alors l'anneau $\mathfrak{C}$ de tous les endomorphismes de $\mathfrak{M}$ qui commutent avec les applications $x \to xa$ et les applications $x \to \alpha x$, $\alpha \in \Phi$ coïncide avec le sous-ensemble d'endomorphismes qui commutent avec les éléments $x \to xa$.

Soit C un endomorphisme qui commute avec tout $x \to xa$, et soit α un élément de Φ et m un élément de $\mathfrak{M}$. Puisque $\mathfrak{M}\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$, $m = \sum m_i a_i$, $m_i \in \mathfrak{M}$, $a_i \in \mathfrak{A}$. Alors $\alpha_m = \sum m_i(\alpha a_i) = \sum m_i b_i$, $b_i = \alpha a_i$. On a

$$(\alpha m)C = \sum(m_i C)b_i = \sum(m_i C)(\alpha a_i) = \alpha\sum(m_i C)a_i = \alpha((\sum m_i a_i)C) = \alpha(mC)$$

qui implique $C \in \mathfrak{C}$.

La proposition 1 s'applique en particulier pour les $(\Phi, \mathfrak{A})$-modules irréductibles.

Il est commode de placer les anneaux $\mathfrak{C}$ à gauche ici aussi. On peut réaliser cette situation si on introduit un anneau (Φ, Γ) anti-isomorphe à $(\Phi, \mathfrak{C})$. Tous les résultats que nous avons donnés sont valables aussi pour les $(\Phi, \mathfrak{A})$-modules. Par exemple, le théorème de densité est vrai et il entraîne que tout Φ-anneau primitif peut s'identifier avec un Φ-sous-anneau des Φ anneau de toutes les transformations linéaires d'un espace vectoriel sur un Φ-corps Γ qui est partout

dense dans $\mathfrak{L}$. Le théorème 4 est vrai aussi et également le théorème 5 sur la détermination du commutant.

3. Anneaux d'Artin

On dit qu'un anneau est un anneau d'Artin (à droite) s'il satisfait à la condition minimale pour les idéaux à droite, c'est-à-dire si chaque ensemble non vide d'idéaux à droite contient un idéal qui est minimal dans l'ensemble donné. Il est bien connu que cette condition est équivalente à la condition de finitude des chaînes décroissantes $\mathfrak{J}_1 \supset \mathfrak{J}_2 \supset \ldots$ d'idéaux à droite. Les résultatas que nous avons obtenus au numéro 1 et au numéro 2, s'appliquent, et donnent des démonstrations très rapides des théorèmes classiques sur les anneaux d'Artin.

1° Le premier résultat de la théorie est le suivant :

THÉORÈME 1. - Le radical d'un anneau d'Artin est nilpotent.

Soit $\mathfrak{R}$ le radical d'un anneau d'Artin $\mathfrak{U}$. Considérons la suite $\mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{R}^2 \supseteq \mathfrak{R}^3 \supseteq \ldots$ et supposons que $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}^r = \mathfrak{R}^{r+1}$. Il faut démontrer que $\mathfrak{N} = 0$. Supposons au contraire que $\mathfrak{N} \neq 0$. Alors l'ensemble $\{\mathfrak{J}\}$ d'idéaux à droite $\mathfrak{J}$ tel que

(1) $\qquad \mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{N}$,

(2) $\qquad \mathfrak{J}\mathfrak{N} \neq 0$ est non vide .

Par conséquent, il contient un élément minimal $\mathfrak{J}_m$. Puisque $\mathfrak{J}_m \mathfrak{N} \neq 0$, il y a un $b \in \mathfrak{J}_m$ tel que $b\mathfrak{N} \neq 0$. Puisque $\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{N}$, $(b\mathfrak{N})\mathfrak{N} \neq 0$, et puisque $b\mathfrak{N}$ est un idéal à droite contenu dans $\mathfrak{J}_m$, il s'ensuit que $\mathfrak{J}_m = b\mathfrak{N}$. Cette égalité entraîne l'existence d'un élément $z \in \mathfrak{N}$ tel que $bz = b$. Mais z est un élément quasi-régulier. Si $z \circ z' = 0$, on a
$\theta = (bz - b) - (bz - b)z' = -b + b(z \circ z') = -b$ ce qui contredit $b\mathfrak{N} \neq 0$.

Nous avons vu que le radical contient tout nil-idéal. Par conséquent, nous avons le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - Tout nil-idéal à droite ou à gauche d'un anneau d'Artin est nilpotent.

2° Nous considérons ensuite les anneaux semi-simples et primitifs.

THÉORÈME 2. - Pour un anneau d'Artin, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathfrak{U}$ est primitif,

(2) $\mathfrak{A}$ est simple,

(3) $\mathfrak{A}$ est isomorphe à l'anneau de toutes les transformations linéaires d'un espace vectoriel convenable de dimension finie.

Supposons d'abord que (1) soit remplie. Nous pouvons identifier $\mathfrak{A}$ avec un sous-anneau partout dense dans l'anneau $\mathfrak{L}$ des transformations linéaires d'un espace vectoriel $\mathfrak{M}$ sur un corps Γ. Si $\dim \mathfrak{M} = \infty$, soit $x_1, x_2, \ldots$ une suite infinie de vecteurs linéairement indépendants de $\mathfrak{M}$. Posons $\mathfrak{J}_j = (0 : \{x_1, \ldots, x_j\})$. Alors $\mathfrak{J}_j$ est un idéal à droite, et d'après le théorème de densité $\mathfrak{J}_1 \supset \mathfrak{J}_2 \supset \mathfrak{J}_3 \supset \ldots$ L'existence d'une telle suite contredit la condition minimale. Il s'ensuit que $\dim \mathfrak{M} < \infty$. Le théorème de densité s'applique maintenant pour donner l'égalité $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}$. Alors, nous avons démontré l'implication (1) $\Rightarrow$ (3). L'implication (3) $\Rightarrow$ (2) est bien connue et nous supprimons la démonstration. Supposons maintenant que $\mathfrak{A}$ est simple. Il est clair que ou $\mathfrak{A}$ est primitif, ou $\mathfrak{A}$ coïncide avec son radical $\mathfrak{R}$. La seconde possibilité peut être exclue d'après le théorème 1. Alors (2) $\Rightarrow$ (1).

L'équivalence de (2) et (3) est le second théorème fondamental de Wedderburn-Artin. Le premier théorème fondamental concerne la structure des anneaux d'Artin semi-simples. C'est le suivant.

THÉORÈME 3. - Tout anneau d'Artin semi-simple est une somme directe d'un ensemble fini d'idéaux bilatères qui sont anneaux simples. Réciproquement, tout anneau d'Artin ayant une telle structure est semi-simple.

Supposons que $\mathfrak{A}$ est semi-simple. Alors $\cap \mathfrak{P} = 0$ où $\{\mathfrak{P}\}$ est l'ensemble d'idéaux primitifs de $\mathfrak{A}$. Puisque la condition minimale est remplie on peut trouver un ensemble fini des idéaux primitifs $\{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n\}$ tel que $\bigcap_1^n \mathfrak{P}_i = 0$. Nous pouvons aussi supposer que $\{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n\}$ est minimal, c'est-à-dire que $\cap \mathfrak{P}_j \neq 0$ pour $\{\mathfrak{P}_j\} \subset \{\mathfrak{P}_i\}$. Puisque $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$ est un anneau d'Artin primitif, d'après le théorème 2, $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$ est simple. Ceci entraîne que $\mathfrak{P}$ est un idéal bilatère maximal dans $\mathfrak{A}$. Il s'ensuit que si nous posons

$$\mathfrak{Y}_i = \mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_{i-1} \cap \mathfrak{P}_{i+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_n, \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{P}_i + \mathfrak{Y}_i \quad .$$

Puisque $\mathfrak{Y}_i \cap \mathfrak{P}_i = 0$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{Y}_i \oplus \mathfrak{P}_i$ et $\mathfrak{Y}_i \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{P}_i$ est simple. Supposons plus généralement que nous ayons démontré que

$$(1) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{Y}_i \oplus \ldots \oplus \mathfrak{Y}_n \oplus (\mathfrak{P}_i \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_k)$$

D'après un des théorèmes d'isomorphismes de Dedekind, on a :

$$(\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_k)/(\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{P}_{n+j}) \cong$$

$$((\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_k) + \mathfrak{P}_{k+j})/\mathfrak{P}_{k+j} = \mathfrak{U}/\mathfrak{P}_{k+j}$$

ce qui démontre que $\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{P}_{k+j}$, $j = 1 , \ldots , n - k$, est maximal dans $\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_k$. Puisque $\bigcap_j (\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{P}_{k+j}) = 0$ et l'intersection de tout sous- ensemble des idéaux $\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{P}_{n+j}$ est $\neq 0$, le raisonnement que nous avons employé pour $\mathfrak{U}$ montre que :

$$\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_k$$

$$= (\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_{k+1}) \oplus ((\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{P}_{n+2}) \cap \ldots \cap (\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{P}_n))$$

$$= (\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_{k+1}) \oplus \mathfrak{Y}_{k+1} \quad .$$

Si on substitue en (1) ceci donne

$$(2) \qquad \mathfrak{U} = \mathfrak{Y}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{Y}_{n+1} \oplus (\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_{k+1})$$

Pour $k + 1 = n$, nous avons :

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{Y}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{Y}_n$$

ce qui démontre la première partie du théorème. La réciproque est immédiate.

On peut démontrer que les compodants simples $\mathfrak{Y}_i$ sont uniques. On peut démontrer que tout idéal bilatère est de la forme $\mathfrak{Y}_{i_1} + \ldots + \mathfrak{Y}_{i_j}$ où les $\mathfrak{Y}_i$ sont donnés dans la décomposition $\mathfrak{U} = \mathfrak{Y}_i \oplus \ldots \oplus \mathfrak{Y}_n$. Ces résultats sont bien connus.

3° Pour la théorie des représentations d'un anneau semi-simple d'Artin il faut avoir un théorème de décomposition d'un tel anneau comme une somme directe d'idéaux minimaux à droite. Le résultat fondamental est le suivant :

THÉORÈME 4. - Soit un anneau d'Artin semi-simple. Alors :

(1) $\mathfrak{U} = \mathfrak{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_m$ où les $\mathfrak{M}_j$ sont des idéaux à droite (ou à gauche) minimaux, et

(2) $\mathfrak{U}$ contient un élément unité.

La démonstration de (1) est semblable à celle du théorème 3. Le point de départ

ici est l'égalité $\cap \mathfrak{J} = 0$, $\{\mathfrak{J}\}$ étant l'ensemble des idéaux à droite réguliers maximaux. De cette relation, on obtient $\bigcap_1^m \mathfrak{J}_j = 0$ où on peut supposer que $\cap \mathfrak{J}_k \neq 0$ si $\{\mathfrak{J}_k\} \subset \{\mathfrak{J}_j\}$. Introduisons maintenant $\mathfrak{M}_j = \mathfrak{J}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{J}_{j-1} \cap \mathfrak{J}_j \cap \ldots \cap \mathfrak{J}_m$. Alors on a $\mathfrak{U} = \mathfrak{J}_j \oplus \mathfrak{M}_j$ et $\mathfrak{M}_j \cong \mathfrak{U} - \mathfrak{J}_j$ est minimal. Le raisonnement que nous avons employé ci-dessus s'applique pour démontrer que $\mathfrak{U} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_m$ (Il est nécessaire d'employer le théorème d'isomorphisme pour groupes avec opérateurs au lieu du théorème d'isomorphisme pour anneaux). La partie (2) du théorème se déduit simplement des théorèmes 2 et 3 si on remarque que l'anneau de toutes les transformations linéaires d'un espace vectoriel contient un élément unité. Mais, on peut donner une démonstration plus directe d'après le lemme suivant :

LEMME. - <u>L'intersection d'un idéal à droite $\mathfrak{J}$ régulier maximal avec un idéal à droite $\mathfrak{K}$ régulier arbitraire est régulière.</u>

Le résultat est évident si $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{J}$. Supposons donc que $\mathfrak{K} \not\equiv \mathfrak{J}$. Donc $\mathfrak{J} + \mathfrak{K} = \mathfrak{U}$. Soit e une unité à gauche mod $\mathfrak{J}$ et posons $e = z + k$, $z \in \mathfrak{J}$, $k \in \mathfrak{K}$. Soit f une unité à gauche mod $\mathfrak{K}$ et $f = i + w$, $i \in \mathfrak{J}$, $w \in \mathfrak{K}$ il est clair que k , i sont unités à gauche pour $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{K}$ respectivement. Posons $a = k + i$. Alors

$$x - ax = (x - kx) - ix \in \mathfrak{J}$$

$$= (x - ix) - kx \in \mathfrak{K}$$

ce qui signifie que a est une unité à gauche mod $(\mathfrak{J} \cap \mathfrak{K})$.

On a évidemment le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - <u>L'intersection d'un nombre fini d'idéaux à droite réguliers maximaux est régulière.</u>

On voit maintenant que $0 = \bigcap_1^m \mathfrak{J}_j$ est un idéal à droite régulier dans un anneau semi-simple d'Artin. De la même manière, on peut prouver que 0 est un idéal à gauche régulier. Alors, il existe une unité à gauche u pour $\mathfrak{U}$ et une unité à droite v . On conclut que $u = v$ est un élément unité de $\mathfrak{U}$.

Nous rappelons que la réciproque du théorème 2 est vraie aussi : si $\mathfrak{U}$ est un anneau qui a les deux propriétés (1) et (2), il est nécessairement un anneau semi-simple d'Artin. Nous supprimons la démonstration. Il y a deux autres questions importantes pour la théorie ; celle concernant l'unicité de la représentation d'un anneau simple comme un anneau $\mathfrak{L}$ de transformation linéaire et l'unicité de la

décomposition de $\mathfrak{A}$ par des idéaux à droite, minimaux. Dans le premi r problème il s'agit des isomorphismes des anneaux $\mathfrak{L}$. Nous considérerons une généralisation de ce problème dans le numéro 4. De ce qui concerne la décomposition de $\mathfrak{A}$ par les idéaux à droite minimaux, le théorème de Jordan-Hölder (ou le théorème de Krull-Schmidt) donne l'unicité au sens d'isomorphismes (comme modules) des idéaux $\mathfrak{M}_j$.

4. Anneaux primitifs ayant des idéaux à droite minimaux.

Dans cette partie, nous étudierons une classe d'anneaux qui forme une généralisation très naturelle de la classe des anneaux d'Artin : les anneaux primitifs qui possèdent des idéaux à droite minimaux : le théorème principal pour ces anneaux en donne une représentation comme sous-anneaux particuliers des anneaux de toutes les transformations linéaires et continues d'un espace vectoriel, topologique $\mathfrak{M}$. La topologie pour $\mathfrak{M}$ est donnée par un espace vectoriel à droite $\mathfrak{M}'$ qui est relié à $\mathfrak{M}$ par une forme bilinéaire non dégénérée.

1° Nous commen ons avec un rappel très bref des notions fondamentales de la théorie des modules complétement réductibles. Rappelons d'abord qu'un module $\mathfrak{M}$ a cette propriété si $\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{M}_\alpha$ où les $\mathfrak{M}_\alpha$ sont sous-modules irréductibles. Il est bien connu que si $\mathfrak{M}$ est complétement réductible, $\mathfrak{M} = \sum \oplus \mathfrak{M}_\beta$, $\mathfrak{M}_\beta$ irréductible. Le signe $\oplus$ désigne que les $\mathfrak{M}_\beta$ sont indépendants en ce sens que $\mathfrak{M}_\beta \cap \sum_{\gamma \neq \beta} \mathfrak{M}_\gamma = 0$. Si $\mathfrak{M} = \sum \oplus \mathfrak{M}'_\delta$ est une autre décomposition de $\mathfrak{M}$ en sous-modules irréductibles la puissance $|\{\mathfrak{M}'_\delta\}|$ de l'ensemble $\{\mathfrak{M}'_\delta\}$ est égale à celle de $\{\mathfrak{M}_\beta\}$. Plus précisément, on peut donner une correspondance biunivoque $\beta \longrightarrow \delta = \varphi(\beta)$ telle que $\mathfrak{M}'_\delta \cong \mathfrak{M}_\beta$ pour tout β. On appelle la puissance $|\{\mathfrak{M}_\beta\}|$ la dimension du module $\mathfrak{M}$. Si $\mathfrak{N}$ est un sous-module de $\mathfrak{M}$ on peut écrire $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{N}'$ où $\mathfrak{N}'$ est un autre sous-module convenable. Toutes ces choses sont bien connues. D'ailleurs, elles ne jouent pas un rôle essentiel dans la suite. Pour cette raison, nous ne donnons pas la démonstration.

Si $\mathfrak{M}$ est un module quelconque, le sous-module $\mathfrak{M}_0 = \sum \mathfrak{M}_\beta$, $\mathfrak{M}_\beta$ irréductible, est appelé le socle du $\mathfrak{M}$ ([1]). Si C est un endomorphisme de $\mathfrak{M}$, et $\mathfrak{M}_\beta$ est un sous-module irréductible de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_\beta C$ est ou bien irréductible, ou bien 0. Alors $\mathfrak{M}_0 C \subseteq \mathfrak{M}_0$, c'est-à-dire que $\mathfrak{M}_0$ est stable par rapport aux endomorphismes de $\mathfrak{M}$.

([1]) Si $\{\mathfrak{M}_\beta\}$ est vide posons $\sum \mathfrak{M}_\beta = 0$.

2° Considérons maintenant $\mathfrak{A}$ comme $\mathfrak{A}$-module à droite et désignons le socle de ce module par F. Nous appellerons F le socle (à droite) de $\mathfrak{A}$. De la même manière on définit aussi un socle à gauche F' de $\mathfrak{A}$. Par définition $F = \sum \mathfrak{J}_\beta$, où $\{\mathfrak{J}_\beta\}$ est l'ensemble d'idéaux minimaux à droite. Si on remarque que la multiplication $x \to ax$ est un endomorphisme du $\mathfrak{A}$-module à droite $\mathfrak{A}$ on voit que F est un idéal bilatère de $\mathfrak{A}$.

Le résultat suivant est bien connu

PROPOSITION 1. - Soit $\mathfrak{J}$ un idéal à droite minimal d'un anneau $\mathfrak{A}$. Alors, ou bien $\mathfrak{J}^2 = 0$, ou bien il existe un idempotent e tel que $\mathfrak{J} = e\mathfrak{A}$.

Ensuite, nous démontrons la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - Si e est un idempotent $\neq 0$ d'un anneau $\mathfrak{A}$ sans idéaux nilpotents, l'idéal à drpite $e\mathfrak{A}$ est minimal si et seulement si le sous-anneau $e\mathfrak{A}e$ est un corps.

On paut démontrer aisément que $e\mathfrak{A}e$ est le commutant du module $e\mathfrak{A}$. Alors, si $e\mathfrak{A}$ est irréductible, $e\mathfrak{A}e$ est un corps d'après le lemme de Schur. Réciproquement, supposons que $e\mathfrak{A}e$ soit un corps. Soit ea un élément quelconque $\neq 0$ du module $e\mathfrak{A}$. Puisque $\mathfrak{A}$ ne contient pas d'idéaux nilpotents, l'annulateur à gauche de $\mathfrak{A}$ est nul. Par conséquent, $ea\mathfrak{A} \neq 0$ et aussi $(ea\mathfrak{A})^2 \neq 0$. Ceci entraîne qu'il existe un b tel que $eabe \neq 0$. Puisque $e\mathfrak{A}e$ est un corps, on peut trouver un élément v tel que $eabev = e$. Si d est arbitraire dans $\mathfrak{A}$, $(ea)(bevd) = ed$, ce qui signifie que ea est un générateur (strict) de $\mathfrak{A}$. Il s'ensuit que $e\mathfrak{A}$ est irréductible, et $e\mathfrak{A}$ est un idéal à droite minimal.

La proposition 2 a le corollaire suivant évident.

COROLLAIRE. - Si $\mathfrak{A}$ est un anneau sans idéaux nilpotents, et e un idempotent $\neq 0$ dans $\mathfrak{A}$, $e\mathfrak{A}$ est un idéal à droite minimal si, et seulement si $\mathfrak{A}e$ est un idéal à gauche minimal.

Nous pouvons démontrer maintenant le théorème.

THÉORÈME 1. - Si $\mathfrak{A}$ est un anneau sans idéaux nilpotents, le socle F de $\mathfrak{A}$ coïncide avec le socle à gauche F'.

D'après la proposition 2 on a les formules

$$F = \sum_{e\mathfrak{A}e \text{ un corps}} e\mathfrak{A}, \quad F' = \sum_{e\mathfrak{A}e \text{ un corps}} \mathfrak{A}e .$$

Alors $e \in F'$ et puisque F' est un idéal bilatère, $e\mathfrak{A} \subseteq F'$. Nous voyons que

$F \subseteq F'$, et par symétrie $F' \subseteq F$ et $F = F'$.

3° Nous aurons besoin de quelques notions de la théorie des espaces vectoriels quelconques. Cette théorie est un cas particulier de la théorie des modules complètement réductibles. Car si $\mathfrak{M}$ est un espace vectoriel (à gauche) sur Γ et $u \neq 0$ est un élément de $\mathfrak{M}$, le sous-espace Γu est un module irréductible et $\mathfrak{M} = \sum_{u \in \mathfrak{M}} \Gamma u$. La dimension de $\mathfrak{M}$ a été définie ci-dessus et nous avons indiqué que ce nombre est un invariant de l'espace.

Rappelons aussi la notion de fonction linéaire $f(x)$ (notation usuelle ici !). Par définition $x \longrightarrow f(x)$ est une application linéaire de $\mathfrak{M}$ dans Γ considérée comme un espace vectoriel à gauche. On peut munir l'ensemble $\mathfrak{M}^*$ de toutes les fonctions linéaires d'une structure d'un espace vectoriel à droite. Pour cela on définit $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(f\alpha)(x) = f(x)\alpha$. Cet espace est appelé le dual de $\mathfrak{M}$. Très importants pour la suite sont les sous-espaces de $\mathfrak{M}^*$ définis par la définition suivante :

DÉFINITION 1. - Un sous-espace de $\mathfrak{M}'$ de $\mathfrak{M}^*$ est appelé total si pour tout $u \neq 0$ dans $\mathfrak{M}$ il existe un $f \in \mathfrak{M}'$ tel que $f(u) \neq 0$.

Si on utilise le fait que u peut se plonger dans une base de $\mathfrak{M}$ on peut démontrer que $\mathfrak{M}^*$ lui-même est total. Si on introduit la topologie faible dans $\mathfrak{M}^*$ on peut identifier les sous-espaces totaux avec les sous-espaces partout denses dans $\mathfrak{M}^*$, car nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Un sous-espace $\mathfrak{M}'$ de $\mathfrak{M}$ est total si et seulement s'il est partout dense dans $\mathfrak{M}^*$ par rapport à la topologie faible de $\mathfrak{M}^*$.

Puisque $\mathfrak{M}^*$ est total il est clair que tout sous-espace $\mathfrak{M}'$ partout dense dans $\mathfrak{M}^*$ est aussi total. Supposons maintenant que $\mathfrak{M}'$ soit total. Nous posons $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_2 = \Gamma$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{A}$ = l'ensemble de multiplications $\xi \longrightarrow \xi\alpha$ à droite de Γ dans le théorème de densité. Il est clair que $\mathfrak{A}$ est un anneau irréductible dans Γ et, comme il est bien connu, le commutant de $\mathfrak{A}$ est l'ensemble de multiplicateur $\xi \longrightarrow \alpha\xi$ à gauche. Puisque $\mathfrak{M}'$ est total, $\mathfrak{M}'^{\perp} = 0$. Alors le théorème de densité dit que $\mathfrak{M}'$ est partout dense dans $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \Gamma)$.

On peut expliquer ce résultat comme suit : si $\mathfrak{M}'$ est total et si $u_1 , u_2 , \ldots , u_n$ sont linéairement indépendants dans $\mathfrak{M}$, on peut trouver un $f \in \mathfrak{M}$ tel que $f(u_i)$, $i = 1 , 2 , \ldots , n$, est ce qu'on veut dans Γ .

4° Si $\mathfrak{M}'$ est un sous-espace total de $\mathfrak{M}^*$, tout $x \in \mathfrak{M}$ donne une fonction linéaire $\bar{x}$: $f \longrightarrow f(x)$ sur $\mathfrak{M}'$. On obtient ici un isomorphisme entre $\mathfrak{M}$ et un sous-espace total du dual $\mathfrak{M}'^*$ de $\mathfrak{M}'$. On voit alors qu'il y a une relation réciproque entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$. Pour expliquer cette symétrie on introduit la notion d'une paire d'espaces vectoriels reliés par une forme linéaire non dégénérée.

DÉFINITION 2. - Soient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ respectivement des espaces vectoriels à gauche et à droite sur le corps Γ. Nous dirons que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ forment une <u>paire duale</u> s'il existe une forme bilinéaire non dégénérée $f(x , y')$ reliant $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$. Rappelons que $f(x , y') \in \Gamma$ et

$$f(x , y'_1 + y'_2) = f(x , y'_1) + (x , y'_2)$$

$$f(x_1 + x_2 , y') = f(x_1 , y') + f(x_2 , y')$$

$$f(\alpha x , y') = \alpha f(x , y') , \quad f(x , y'\alpha) = f(x , y')\alpha \quad .$$

f est dite <u>non dégénérée</u> si $f(x , z') = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{M}$ entraîne $z' = 0$ et $f(z , x') = 0$ pour tout $x' \in \mathfrak{M}'$ entraîne $z = 0$.

Quand on n'a besoin que d'une seule $f(x , y')$ on peut simplifier la notation par l'écriture de (x , y') pour $f(x , y')$. Nous emploierons cette notation par la suite.

Si $\mathfrak{M}'$ est un sous-espace total de $\mathfrak{M}^*$ on peut poser $(x , f) = f(x)$ et on voit que $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ est une paire duale. D'autre part si $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ est une paire duale quelconque, chaque $y' \in \mathfrak{M}'$ définit une fonction linéaire fy' par la formule $fy'(x) = (x , y')$. On voit que $y' \longrightarrow fy'$ est un isomorphisme et que l'ensemble de fy' est un sous-espace total du dual $\mathfrak{M}^*$. De la même manière, on peut identifier $\mathfrak{M}$ avec un sous-espace total de $\mathfrak{M}'^*$. Maintenant on peut transférer la topologie de l'image de $\mathfrak{M}'$ dans $\mathfrak{M}^*$ (la topologie comme sous-espace) pour obtenir une topologie de $\mathfrak{M}'$. Nous appellerons cette topologie la <u>$\mathfrak{M}$-topologie</u> de $\mathfrak{M}'$. Un système fondamental du voisinage de 0 est donné par les ensembles $\left\{ \bigcap_1^m x_i^{\perp} m' \right\}$ où $x^{\perp} m' = \left\{ y' \,|\, y' \in \mathfrak{M}' , (x , y') = 0 \right\}$. De la même manière, on peut munir $\mathfrak{M}$ d'une $\mathfrak{M}'$-topologie. Si $\mathfrak{N}$ est un sous-espace de $\mathfrak{M}$ posons $\mathfrak{N}^{\perp} \mathfrak{M}' = \bigcap_{x \in \mathfrak{N}} x^{\perp} \mathfrak{M}'$ et si $\mathfrak{N}'$ est un sous-espace de $\mathfrak{M}'$ posons

$\mathfrak{N}'^{\perp} \mathfrak{M} = \bigcap_{x' \in \mathfrak{N}'} x'^{\perp} \mathfrak{M}$. Un conséquence immédiate du théorème de densité est le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Si $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ forme une paire duale, et si $\mathfrak{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}$, la fermeture $F(\mathfrak{N})$ de $\mathfrak{N}$ dans la $\mathfrak{M}'$-topologie est $((\mathfrak{N})^{\perp}\mathfrak{M})^{\perp}\mathfrak{M}$. Bien entendu, la même chose est vraie pour $\mathfrak{M}'$. Aussi on peut voir d'après le lemme fondamental du théorème de densité le résultat suivant :

THÉORÈME 4. - Si $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ forme une paire duale et si $\mathfrak{N}$ est un sous-espace fermé de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} + \mathfrak{U}$ est fermé pour tout $\mathfrak{U}$ de dimension finie.

Ceci entraîne évidemment le corollaire.

COROLLAIRE. - Tout sous-espace fini de $\mathfrak{M}$ (ou de $\mathfrak{M}'$) est fermé.

5° Soit $(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_i')$, $i = 1, 2$, deux paires duales d'espaces vectoriels sur les corps Γ_i. Nous voulons déterminer les transformations semi-linéaires continues de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2$. Rappelons que S est transformation semi-linéaire de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2$ si

(1) S est un homomorphisme pour les groupes additifs et

(2) il existe un isomorphisme σ de Γ_1 sur Γ_2 tel que $(\alpha x)\, S = \alpha^{\sigma}(xS)$ pour tout $x \in \mathfrak{M}_1$, $\alpha \in \Gamma_1$. Si $S \neq 0$, σ est uniquement déterminé par S et on appelle σ l'isomorphisme de Γ_1 associé à S. Pour expliquer σ nous emploierons la notation (S, σ) pour une transformation semi-linéaire.

DÉFINITION 3. - Soit $(\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_i')$, $i = 1, 2$ deux paires duales sur les corps Γ_i, et soit $(x_i, y_i')_i$ les formes linéaires qui relient $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_i'$. Si (S, σ) est une transformation semi-linéaire de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2$, on dit que S possède une transformation transposée par rapport aux $(x_i, y_i')_i$ s'il existe une application S' de $\mathfrak{M}_2'$ dans $\mathfrak{M}_1'$ telle que

$$(x_1 S, y_2')_2^{\sigma^{-1}} = (x_1, y_2' S')_1$$

pour tout $x_1 \in \mathfrak{M}_1$, $y_2' \in \mathfrak{M}_2'$.

On vérifie directement que S' est unique et S' est une transformation semi-linéaire avec σ^{-1} pour isomorphisme. On appelle S' la transposée de S par rapport à $(x_i, y_i')_i$.

LEMME. - Soit $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ une paire duale et soit f une fonction linéaire sur $\mathfrak{M}$. Alors f est contenue dans la $\mathfrak{M}'$-topologie si et seulement si il existe un $y' \in \mathfrak{M}'$ tel que $f(x) = (x, y')$ pour tout $x \in \mathfrak{M}$.

Puisque la topologie est discrète dans Γ, 0 est un voisinage de 0 dans Γ. La continuité de f à 0 entraîne l'existence d'un voisinage $\mathfrak{U}$ de 0 dans $\mathfrak{M}$ tel que $f(\mathfrak{U}) = 0$. On peut supposer que $\mathfrak{U} = \bigcap_1^m x_i'^{\perp}\mathfrak{M}$ et on a $f(x) = 0$ pour tout x tel que $(x , x_i') = 0$, $i = 1 = 2 , \ldots , n$. Ce qui veut dire que $f \in \mathfrak{V}'^{\perp}\mathfrak{M}^{\perp}\mathfrak{M}^*$ où $\mathfrak{V}'$ est le sous-espace de $\mathfrak{M}^*$ engendré par les fonctions linéaires $x \longrightarrow (x , x_i')$. Mais $\mathfrak{V}'$ est fermé. Alors $\mathfrak{V}'^{\perp}\mathfrak{M}^{\perp}\mathfrak{M}^* = \mathfrak{V}$. Par conséquent $f(x) = (x , \sum x_i' \beta_i)$ pour β_i convenablement choisi dans Γ. Puisque $y' = \sum x_i' \beta_i \in \mathfrak{M}'$, $f(x) = (x , y')$, $y' \in \mathfrak{M}'$. Réciproquement, supposons que $f(x) = (x , y')$. Donc si $x \in$ au voisinage $y'^{\perp}$, $f(x) = 0$. Il est clair que f est continue à 0 .et d'après l'additivité f est continue partout.

Nous pouvons démontrer maintenant le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Soit $(\mathfrak{M}_i , \mathfrak{M}_i')$, $i = 1 , 2$, deux paires duales, et S une transformation semi-linéaire de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_2$. S est continue (par rapport aux $\mathfrak{M}_i'$-topologies) si et seulement si S possède une transposée par rapport aux formes données.

Supposons d'abord que S soit continue. Si y_2' est fixée dans $\mathfrak{M}_2'$, l'application $x_1 \longrightarrow (x_1 \ S_1 \ y_2')_2^{\sigma-1}$ est linéaire. Cette transformation est le produit de S, de l'application continue $x_2 \longrightarrow (x_2 , y_2')$, et de l'application (nécessairement continue), $\gamma \longrightarrow \gamma^{\sigma-1}$ de Γ. Il est clair alors que $x_1 \longrightarrow (x_1 \ S_1 \ y_2')_2^{\sigma-1}$ est continue. D'après le lemme, on a un élément $y_1' \in \mathfrak{M}_1'$ tel que $(x_1 \ S_1 \ y_2')^{\sigma-1} = (x_1 , y_1')_1$. L'élément y_1' est unique et on peut définir S' par $y_2' \longrightarrow y_1'$. On voit que S' est la transposée de S. La démonstration de la réciproque est immédiate.

Si (S , σ), (T , σ) sont continues, S + T est semi-linéaire et continue. Comme d'habitude $(S + T)' = S' + T'$. Si (S , σ) est continue, et si (T , τ) est une transformation semi-linéaire continue de $\mathfrak{M}_2$ dans $\mathfrak{M}_3$, où $(\mathfrak{M}_3 , \mathfrak{M}_3')$ est une autre paire duale, $(ST , \sigma\tau)$ est une transformation semi-linéaire continue de $\mathfrak{M}_1$ dans $\mathfrak{M}_3$. On a encore la règle : $(ST)' = T' S'$.

6° Soit $(\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}')$ une paire duale, et soit $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$ l'anneau de toutes les transformations linéaires de $\mathfrak{M}$ qui sont continues par rapport à la $\mathfrak{M}'$ topologie. D'après le théorème 4, une transformation linéaire $A \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$ si et seulement si elle possède une transposée A' dans $\mathfrak{M}'$. On peut voir facilement que l'application $A \longrightarrow A'$ est un anti-isomorphisme de $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$ sur $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}')$.

Nous aurons besoin aussi du sous-ensemble $F_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N})$ de $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{N})$ des transformations du rang fini. On dit qu'une transformation semi-linéaire S est de rang fini si l'image $\mathfrak{N}S$ est de dimension finie. Il est immédiat que $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{N})$ est un idéal bilatère de $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{N})$.

Soit F une transformation linéaire de $\mathfrak{N}$ dans $\mathfrak{N}$ de rang fini, et soit $u_1 , u_2 , \dots , u_m$ une base pour $\mathfrak{N}F$. Si $x \in \mathfrak{N}$ on peut écrire $xF = \sum \xi_i u_i$. Puisque les ξ_i sont uniques $x \longrightarrow \xi_i$ est une application univoque. Il est clair qu'elle est linéaire. Alors $xF = \sum \xi_i(x) u_i$ où les $\xi_i(x) \in \mathfrak{N}^*$. Si F est continue l'application $x \longrightarrow \xi_i(x)$ est un produit de deux applications continues. Par conséquent elle est continue aussi. D'après le lemme du théorème 4, $\xi_i(x) = (x , x_i')$, $x_i' \in \mathfrak{M}'$. Alors $xF = \sum (x , x_i') u_i$. Nous écrivons $F = \sum x_i' \times u_i$ pour noter l'application $x \longrightarrow \sum (x , x_i') u_i$. On voit aisément la réciproque : tout $\sum x_i' \times u_i$, $x_i' \in \mathfrak{M}'$, $u_i \in \mathfrak{N}$ appartient à $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{N})$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}^*$ et que $(x , f) = f(x)$. Il est immédiat que $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}^*}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{L}$ l'anneau de toutes les transformations linéaires car si $A \in \mathfrak{L}$, A possède la transposée $f \longrightarrow Af$ $((Af)(x) = f(xA))$. On désigne la transposée de A par A^* . Plus généralement si $\mathfrak{N}'$ est un sous-espace total, on voit aisément que $A \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{N}'}(\mathfrak{M})$ si et seulement si $\mathfrak{N}' A^* \subseteq \mathfrak{M}'$.

7° Nous pouvons donner maintenant une formulation topologique pour le résultat principal sur les anneaux primitifs ayant un socle non nul. Le résultat est le suivant :

THÉORÈME 6. - Les conditions suivantes sur un anneau $\mathfrak{A}$ sont équivalentes :

(1) $\mathfrak{A}$ est primitif avec socle non nul.

(2) $\mathfrak{A}$ est isomorphe à un anneau partout dense de transformations linéaires contenant des transformations $\neq 0$ de rang fini.

(3) il existe une paire duale $(\mathfrak{N} , \mathfrak{N}')$ telle que $\mathfrak{A}$ soit isomorphe à un sous-anneau de $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{N})$ contenant $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{N})$. Si $\mathfrak{A}$ est donné comme dans (2), le socle est l'ensemble des transformations de rang fini et si $\mathfrak{A}$ est donné comme dans (3), le socle de $\mathfrak{A}$ est $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{N})$.

Supposons (1). Alors on peut identifier $\mathfrak{A}$ avec un anneau partout dense de transformations linéaires d'un espace vectoriel $\mathfrak{M}$. Soit $e\mathfrak{A}$ un idéal à droite minimal contenu dans $\mathfrak{A}$. Alors e est une transformation de rang 1. Sinon, on pourrait trouver deux vecteurs xe , ye linéairement indépendants. Il existe un $a \in \mathfrak{A}$ tel que $xea = 0$, $yea \neq 0$. Par conséquent $0 \neq ea \in (e\mathfrak{A} \cap (0 : x))$.

D'après la minimalité de $e\mathfrak{A}$, $e\mathfrak{A} \subsetneq (0 : x)$. Puisque $e \in e\mathfrak{A}$, $xe = 0$, ce qui contredit l'hypothèse sur l'indépendance de xe , ye . Nous avons démontré que (1) $\Rightarrow$ (2) et aussi que le socle $\gamma = \sum e\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ l'ensemble de transformations de rang fini contenu dans $\mathfrak{A}$. Ensuite, supposons (2), et soit $\mathfrak{C}$ l'ensemble de transformations de rang fini de $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{C}$ est évidemment un idéal bilatère de $\mathfrak{A}$. Soit $\mathfrak{M}^*$ le dual de $\mathfrak{M}$, et posons $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}^* \mathfrak{C}^*$. On voit aisément qu'un idéal bilatère $\neq 0$ d'un anneau irréductible d'endomorphismes est aussi irréductible. Ceci s'applique à $\mathfrak{C}$. Soit x un vecteur $\neq 0$. Puisque $\mathfrak{C}$ est irréductible, on peut trouver un $g \in \mathfrak{C}$ tel que $xg \neq 0$. Aussi, il existe une fonction linéaire f telle que $f(xg) = 0$. Ceci veut dire que $fg^*(x) \neq 0$. Puisque $fg^* \in \mathfrak{M}'$ nous voyons que $\mathfrak{M}'$ est total. Puisque

$$\mathfrak{M}' \mathfrak{A}^* = \mathfrak{M}^* \mathfrak{C}^* \mathfrak{A}^* = \mathfrak{M}^* (\mathfrak{A} \mathfrak{C})^* \subseteq \mathfrak{M}^* \mathfrak{C}^* = \mathfrak{M}' \quad , \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M}) \quad .$$

Il reste à démontrer que $\mathfrak{A} \supseteq F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$. Il suffit de démontrer que $\varphi \times u \in \mathfrak{A}$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{M}'$ et tout $u \in \mathfrak{M}$. Puisque $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}^* \mathfrak{C}^*$ on peut supposer que $\varphi = fg^*$, $f \in \mathfrak{M}^*$, $g \in \mathfrak{C}$. Soit $g = \sum \varphi_i \times u_i$ où les u_i sont linéairement indépendants. On a $fg^* = \sum \varphi_i f(u_i)$ et on voit qu'il est suffisant de démontrer que $\varphi_i \times u \in \mathfrak{A}$. D'après la densité il existe un $b \in \mathfrak{A}$ tel que $u_i b = u$, $u_j b = 0$, $j \neq i$, de qui on voit que $gb = \sum \varphi_k \times u_k b = \varphi_i \times u$. Puisque $gb \in \mathfrak{A}$ nous avons fini la démonstration de l'implication (2) $\Rightarrow$ (3). Ainsi $\mathfrak{C} \supseteq F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$, mais d'autre part $\mathfrak{C} \subseteq F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$. Alors $\mathfrak{C} = F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$. Supposons finalement que $\mathfrak{A}$ soit donné comme dans (3). Ainsi

$$\mathfrak{A} \supseteq F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M}) = \left\{ \sum \varphi_i \times u_i \mid \varphi_i \in \mathfrak{M}' \ , \ u_i \in \mathfrak{M} \right\} \quad .$$

Soient x_1 , ... , x_n linéairement indépendants et y_1 , ... , y_n arbitraires. Choisissons φ_i , $i = 1$, ... , n tel que $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ et posons $g = \sum \varphi_i \times y_i$. On a $g \in \mathfrak{A}$ et $x_i g = y_i$, $i = 1$, ... , n, ce qui démontre que $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$ et a fortiori $\mathfrak{A}$ est partout dense. Autrement dit $\mathfrak{A}$ est primitif. Soit $\varphi \neq 0$ dans $\mathfrak{M}'$ et posons

$$\mathfrak{J}_\varphi = \left\{ \varphi \times u \mid u \in \mathfrak{M} \right\} \quad .$$

On démontre facilement que $\mathfrak{J}_\varphi$ est un idéal à gauche minimal. Alors (3) $\Rightarrow$ (1) et aussi $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M}) = \sum \mathfrak{J}_\varphi \subseteq \gamma$. Il est clair, maintenant que le résultat supplémentaire est établi aussi.

8° Un anneau simple γ qui coïncide avec son socle est un anneau primitif à socle non nul. Il est clair, d'après le théorème 6 que γ est de la forme

$F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$.

Réciproquement, supposons que γ soit un anneau quelconque de la forme $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$. On peut démontrer directement que $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$ est simple. Nous démontrerons un résultat plus fort pour lequel nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME. - Soient $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ une paire duale, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ deux sous-espaces de dimensions finies, de $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ respectivement. Alors il existe deux sous-espaces $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ de dimensions finies telq que $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ soient duaux par rapport à la restriction de la forme (x , y') donnée.

Considérons $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'^{\perp} \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{N}^{\perp} \mathfrak{M}'$. Si ces deux espaces sont nuls, $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ sont duaux par rapport à (x , y') . Si $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'^{\perp} \mathfrak{M} \neq 0$, soit $0 \neq z \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'^{\perp} \mathfrak{M}$ et soit $z' \in \mathfrak{M}'$ tel que $(z , z') \neq 0$. Posons $\mathfrak{N}_1' = \mathfrak{N}' + z'\Gamma$. Il est clair que $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_1' \subset \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$. Par récurrence nous obtenons les deux espaces $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$.

DÉFINITION 4. - On dit qu'un anneau $\mathfrak{A}$ a localement une certaine propriété si chaque partie finie F de $\mathfrak{A}$ peut se plonger dans un sous-anneau $\mathfrak{A}_F$ qui possède la propriété donnée.

On voit facilement qu'un anneau localement simple est simple. Nous démontrons maintenant le théorème 7.

THÉORÈME 7. - Tout anneau $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$ est localement un anneau simple d'Artin.

Soit $\{a_1 , \ldots , a_m\}$ une partie finie de $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$ et soit $\mathfrak{N} = \sum \mathfrak{M} a_i$, $\mathfrak{N}' = \sum \mathfrak{M}' a_i'$, a_i' la transposée de a_i . Choisissons $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ comme dans le lemme, et posons $\mathfrak{L}$ = le sous-anneau de $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$ des transformations b telles que $\mathfrak{M} b \subseteq \mathfrak{U}$ et $\mathfrak{M}' b' \subseteq \mathfrak{M}'$. On voit aisément que l'application $b \longrightarrow b_u$ (la restriction de b à $\mathfrak{U}$) est un isomorphisme de $\mathfrak{L}$ sur l'anneau $\mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ des transformations linéaires de $\mathfrak{U}$. Puisque $\mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ est un anneau simple d'Artin, le résultat est démontré.

NOTA. - Le résultat que tout anneau simple avec socle non nul est un anneau $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$ et réciproquement, est dû à DIEUDONNÉ. Le théorème 7 est dû à O. LETOFF.

9° Nous étudions maintenant le problème d'isomorphisme pour les anneaux primitifs à socles non nuls. Le résultat fondamental pour cela est le suivant :

PROPOSITION 3. - Soit $\mathfrak{A}$ un anneau primitif ayant un socle non nul. Alors tous les modules irréductibles et fidèles de $\mathfrak{A}$ sont isomorphes.

Soient $\mathfrak{A}$ un idéal à droite minimal et $\mathfrak{M}$ un module irréductible et fidèle pour $\mathfrak{A}$. Puisque $(0 : \mathfrak{M}) = 0$, il existe un $u \in \mathfrak{M}$ tel que $u\mathfrak{A} \neq 0$. On vérifie que l'application $b \in \mathfrak{A} \longrightarrow ub \in \mathfrak{M}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{M}$.

THÉORÈME 8. - Soient $(\mathfrak{M}_i , \mathfrak{M}_i')$, $i = 1 , 2$, deux paires duales et $\mathfrak{A}_i$ deux anneaux tels que $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}_i}(\mathfrak{M}_i) \supseteq \mathfrak{A}_i \supseteq F_{\mathfrak{M}_i'}(\mathfrak{M}_i)$. Soit S un isomorphisme de $\mathfrak{A}_1$ sur $\mathfrak{A}_2$. Alors il existe un homéomorphisme semi-linéaire s de $\mathfrak{M}_1$ sur $\mathfrak{M}_2$ tel que S coïncide avec l'application $a_1 \longrightarrow s^{-1} a_1 s$, $a_1 \in \mathfrak{A}_1$ de $\mathfrak{A}_1$ sur $\mathfrak{A}_2$.

Considérons un anneau abstrait $\mathfrak{A}$ isomorphe à $\mathfrak{A}_1$ par rapport à l'application $a \longrightarrow a_1$. Cette application munit $\mathfrak{M}_1$ d'une structure de $\mathfrak{A}$-module. L'application $a \longrightarrow a_1^S \in \mathfrak{A}_2$ donne une telle structure à $\mathfrak{M}_2$. Il est clair que les deux modules $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont irréductibles et fidèles. Par conséquent, il existe un isomorphisme s du groupe $\mathfrak{M}_1$ sur le groupe $\mathfrak{M}_2$ tel que $(x_1 a_1) s = (x_1 s) a_1^S$ pour tout $x_1 \in \mathfrak{M}_1$ et tout $a_1 \in \mathfrak{A}_1$. Autrement dit $a_1^S = s^{-1} a_1 s$. Soit C_1 l'homothétie $x_1 \longrightarrow \gamma_1 x_1$. Il est clair que $s^{-1} C_1 s$ commute avec tous les éléments a_2 de $\mathfrak{A}_2$. D'après un théorème du numéro 2, $s^{-1} C_1 s$ est une homothétie $C_{2i}\ x_2 \longrightarrow \gamma_2 x_2$ de $\mathfrak{A}_2$. On voit aisément que l'application $\gamma_1 \longrightarrow \gamma_2$ est un isomorphisme σ de Γ_1 sur Γ_2. La relation

$$x_2 s^{-1} C_1 s = x_2 C_2$$

entraîne que

$$x_1 C_1 s = x_1 s C_2 \quad .$$

Autrement dit $(\gamma_1 x_1) s = \gamma_1^{\sigma}(x_1 s)$. Alors s est une transformation semi-linéaire de $\mathfrak{M}_1$ sur $\mathfrak{M}_2$. Il reste à démontrer la continuité de s ou de s^{-1} (la continuité de l'autre en résultera par symétrie). Soit $x_1' \in \mathfrak{M}_1'$, $u \in \mathfrak{M}_1$ et considérons l'application $x_1' \times u_1$ appartenant à $F_{\mathfrak{M}_1'}(\mathfrak{M}_1)$. On peut vérifier que $s^{-1}(x_1' \times u_1) s$ est l'application $x_2 \longrightarrow (x_2 s^{-1} , x_1')_1^{\sigma} (u , s)$. Puisque la dernière application est contenue dans $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}_2'}(\mathfrak{M}_2)$, il est clair que

$$f(x_2) = (x_2 s^{-1} , x_1')_1^{\sigma}$$

est linéaire et continue. Par conséquent, il existe un $x_2' \in \mathfrak{M}_2'$ tel que

$$(x_2 , x_2')_2 = (x_2 s^{-1} , x_1')_1^{\sigma} \quad .$$

L'application $x'_1 \longrightarrow x'_2$ est univoque et d'après l'équation ci-dessus, elle est une transposée pour s^{-1}. Alors s^{-1} est continue.

Il est clair, réciproquement, que si s est un homéomorphisme semi-linéaire de $\mathfrak{M}_1$ sur $\mathfrak{M}_2$, l'application $\ell_1 \longrightarrow s^{-1}\ell_1 s$ est un isomorphisme de $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}'_1}(\mathfrak{M}_1)$ sur $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}'_2}(\mathfrak{M}_2)$ et elle induit un isomorphisme de $F_{\mathfrak{M}'_1}(\mathfrak{M}_1)$ sur $F_{\mathfrak{M}'_2}(\mathfrak{M}_2)$ et de $\mathfrak{U}_1$ dans $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}'_2}(\mathfrak{M}_2)$.

9° EXEMPLES.

(1) $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}^*$. $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}^*}(\mathfrak{M}) =$ l'anneau $\mathfrak{L}$ de toutes les transformations linéaires de $\mathfrak{M}$. Si $\{e_\alpha\}$ est une base et $\ell \in \mathfrak{L}$ on écrit $e_\alpha \ell = \sum \lambda_{\alpha\beta} \in \beta$. La matrice $(\lambda_{\alpha\beta})$, $\lambda_{\alpha\beta} \in \Gamma$ a la propriété que pour chaque α il n'y a qu'un nombre fini de $\lambda_{\alpha\beta} \neq 0$. On dit qu'une telle matrice est <u>sommable par rapport aux lignes</u>. L'ensemble de matrices ayant cette propriété est un anneau et l'application $\ell \longrightarrow (\lambda_{\alpha\beta})$ est un isomorphisme. L'application ℓ est de rang fini, si et seulement si les $e_\alpha \ell$ sont combinaison linéaire d'un nombre fini des e_α. Autrement dit, toutes les colonnes de $(\lambda_{\alpha\beta})$ sauf un nombre fini, sont nulles.

(2) Choisissons un ensemble de fonctions linéaires φ_α tel que $\varphi_\alpha(e_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ et soit $\mathfrak{M}'$ le sous-espace de $\mathfrak{M}^*$ engendré par les φ_α. $\mathfrak{M}'$ est total. Soit $\ell \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$ et soit $\varphi_\alpha \ell' = \sum \varphi_\nu \ell'_{\nu\mu}$, $\lambda'_{\nu\mu} \in \Gamma$. Il est clair que $\lambda'_{\nu\mu}$ est sommable par rapport aux colonnes. La condition $(\varphi_\mu \ell')(e_\alpha) = \varphi_\mu(e_\alpha \ell)$ donne $\lambda'_{\alpha\mu} = \lambda_{\alpha\mu}$. Alors $(\lambda_{\alpha\beta})$ est sommable par rapport aux lignes et aux colonnes. On voit que $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$ est isomorphe à l'anneau des matrices sommables par rapport aux rangs et aux colonnes. On voit aussi que $F_{\mathfrak{M}'}(\mathfrak{M})$ est isomorphe à l'anneau des matrices $(\lambda_{\alpha\beta})$ qui ne possèdent qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

(3) Soit $\mathfrak{M}$ un espace d'une dimension dénombrable sur un corps commutatif. Soit u la transformation linéaire telle que $e_i u = e_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$ et v la transformation linéaire telle que $e_1 v = 0$, $e_{i+1} v = e_i$. Soit $\Phi[u, v]$ l'algèbre sur Φ engendrée par u et v. On peut vérifier que $\Phi[u, v]$ contient une transformation dont la matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A une matrice finie quelconque. D'après ça, on voit que $\Phi[u , v]$ est partout dense dans $\mathfrak{L}$ et qu'il contient des transformations de rang fini. Alors $\Phi[u , v]$ est primitif avec un socle non nul. Remarquons que $uv = 1$, mais $vu \neq 1$. On peut démontrer que $\Phi[u , v]$ est l'algèbre la plus générale engendrée par deux éléments u , v satisfaisant à la relation $uv = 1$.

(4) Soit $\mathfrak{M}$ un espace de Banach, $\mathfrak{M}'$ l'espace des fonctions linéaires et continues sur $\mathfrak{M}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, $\mathfrak{M}'$ est total. On peut démontrer que $\mathfrak{L}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{M})$ est l'anneau des transformations linéaires et continues par rapport à la topologie de $\mathfrak{M}$ définie par la norme

(5) Supposons que $(\mathfrak{M}_i , \mathfrak{M}_i')$, $i = 1 , 2$, sont deux paires duales, et considérons $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_2'$. Posons pour $x = x_1 + x_2$, $y' = y_1' + y_2'$, $x_i \in \mathfrak{M}_i$, $y_i' \in \mathfrak{M}_i'$,

$$(x , y') = (x_1 , y_1') + (x_2 , y_2') \quad .$$

On vérifie que $(\mathfrak{M} , \mathfrak{M}')$ est une paire duale. Cette méthode donne beaucoup d'autres exemples de paires duales. On peut généraliser pour une somme directe d'un nombre quelconque de paires duales.