Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Pierre Barrucand

Fonctions associées aux produits eulériens

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 1 (1977-1978), exp. n° 20, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A17_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres).
19e année, 1976/77, n° 20, 13 p.

6 janvier 1978

FONCTIONS ASSOCIÉES AUX PRODUITS EULÉRIENS

par Pierre BARRUCAND

Résumé. - On établit beaucoup de realtions relatives à des produits eulériens, en particulier, les fonctions ζ de Dedekind et les fonctions L d'Artin, notamment, le comportement de fonctions définies par des développements en produits d'Euler associées à ces fonctions.

I. Notations et généralités.

1. Généralités.

M : ensemble des fonctions méromorphes si $\mathrm{Re}(s) > 0$.

H_k : ensemble des fonctions holomorphes et sans zéro si $\mathrm{Re}(s) > 1/k$.

$H_k(s)$: un élément quelconque de H_k (peut donc définir plusieurs fonctions distinctes).

S : ensemble des fonctions $\{F(x)\}$ admettant une représentation

$$F(x) = 1 + \sum_1^\infty F_n x^n \sim F(x) \in S \ . \tag{I.1.1}$$

S_0 : sous-ensemble de S tel que

$$F(x) = 1 + \sum_1^\infty F_n x^n \ ; \ \forall\, n \ , \ F_n \in Z \sim F(x) \in S_0 \ . \tag{I.1.2}$$

Il est connu que si $F(x) \in S$, on a des coefficients $h(n)$ tels que

$$F(x) = \prod_{n=1}^\infty (1 - x^n)^{-h(n)} \ ; \tag{I.1.3}$$

soit, par differenciation logarithmique,

$$\frac{xF'(x)}{F(x)} = \sum_1^\infty nh(n)\, x^n \ . \tag{I.1.4}$$

Donc, si

$$x\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum_1^\infty g(n)\, x^n \ , \tag{I.1.5}$$

on a

$$nh(n) = \sum_{dd'=n} \mu(d')\, g(d) \ , \tag{I.1.6}$$

où $\mu(n)$ est la fonction classique de Möbius, et l'on sait que

$$(F(x) \in S_0) \sim (\forall\, n \ , \ h(n) \in Z) \ . \tag{I.1.7}$$

2. Quelques notations.

P est l'ensemble des nombres premiers rationnels $\{p\}$. Si X $(X = A, B, C, \ldots)$ est une partie de P

(I.2.1) $$X(s) = \prod_{p \in X} (1 - p^{-s})^{-1} \; ; \quad X = A , B , \ldots$$

La classe E , classe des fonctions admettant la représentation, est définie par

(I.2.2) $$\Psi(s) = \prod_p F_p(p^{-s}) \; ; \quad \forall \; p , \; F_p \in S \sim \Psi(s) \in E .$$

De même, la sous-classe E_0 est définie par

(I.2.3) $$\Psi(s) = \prod_p F_p(p^{-s}) \; ; \quad \forall \; p , \; F_p \in S_0 \sim \Psi(s) \in E_0 .$$

Les fonctions $F_p(p^{-s})$ sont appelées facteurs locaux.

Nous noterons toujours $V(s)$ un produit d'un nombre fini de facteurs locaux ($V(s)$ ne désigne donc pas toujours la même fonction), et par $\psi^*(s)$, $\Psi = \zeta , L , \Phi , \ldots$ une fonction de E "amputée" d'un nombre fini de facteurs locaux.

3. Rappel sur les corps cubiques.([3] et [7]).

Dans un corps cubique K de discriminant Δ , P se décompose en 5 classes :

classe 1 : (p) est totalement décomposé dans K_3 ,

classe 2 : (p) est inerte,

classe 3 : $(\Delta/p) = -1$,

classe 4 : (p) est simplement ramifié,

classe 5 : (p) est totalement ramifié.

Si le groupe de Galois est cyclique, les classes 3 et 4 sont vides. Soient N la clôture galoisienne de K_3 , et $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$, D étant le discriminant de K_2 . On a alors, pour les discriminants et les fonctions ζ ,

(I.3.1) $$\Delta = Df^2 ,$$

(I.3.2) $$\zeta_{K_2}(s) = \zeta(s) \, L(s) ,$$

(I.3.3) $$\zeta_{K_3}(s) = \zeta(s) \, \Phi(s) \; ; \quad \Phi \text{ est la fonction } L \text{ d'Artin;}$$

(I.3.4) $$\zeta_N(s) = \zeta(s) \, L(s) \, \Phi^2(s) .$$

Si Gal est cyclique, on a

(I.3.5) $$\Delta = f^2 ,$$

(I.3.6) $$\zeta_{K_3}(s) = \zeta(s) \, L_1^*(s) \, L_2^*(s) ,$$

L^* fonction L de Dirichlet avec caractères cubiques.

4. Autres notations.

En général, en notant K un corps algébrique quelconque, $\zeta_K(s)$ sera sa fonction ζ . De plus, nous définissons toujours

(I.4.1) $$L_D(s) = \sum_1^\infty (D/n) n^{-s} ,$$

(I.4.2) $$\Phi(s) = \sum \varphi(n)\, n^{-s} ,$$

une fonction L d'Artin (ceci définit les coefficients $\varphi(n)$).

(I.4.3) $$\Psi(s) = \sum \psi(n)\, n^{-s} ,$$

un élément de S , et les coefficients Z , d_k , ... , tels que

(I.4.4) $$\zeta_K(s) = \sum_1^\infty Z(n)\, n^{-s} ,$$

(I.4.5) $$[\zeta(s)]^k = \sum_1^\infty d_k(n)\, n^{-s} ,$$

(I.4.6) $$\zeta(s)\, L_D(s) = \sum_1^\infty \delta(n , D)\, n^{-s} .$$

D'autre part, D désignera toujours un discriminant de corps quadratique, et Δ un discriminant en général.

II. Formules explicites. Cas simples

1. Formules générales.

RAMANUJAN ([8], p. 133-136), puis WILSON [11] ont publié les formules suivantes.

(II.1.1) $$\sum_1^\infty d_2^2(n)\, n^{-s} = \zeta^4(s)/\zeta(2s) ,$$

(II.1.2) $$\sum_1^\infty d^2(n , -4)\, n^{-s} = \zeta^2(s)\, L_{-4}^2(s)/(\zeta(2s)(1 + 2^{-s})) .$$

P. BARRUCAND [1] a fourni, pour les fonctions L des corps cubiques non galoisiens, en utilisant les notations de (I.1.3) et (I.1.4),

(II.1.3) $$\sum \varphi^2(n)\, n^{-s} = \zeta(s)\, L_D(s)\, \Phi(s)\, V(s)/\zeta(2s)$$

($V(s)$ étant défini en (1.2)), et une formule analogue pour les corps cubiques cycliques. Il est aisé de généraliser.

Distribuons P en quatre classes A , B , C , D , $A \neq \emptyset$, et à chaque élément de A associons deux quantités $\omega_{p,1}$ et $\omega_{p,2}$. Soit alors,

(II.1.4) $$\omega_{p,3} = \omega_{p,1} + \omega_{p,2} , \quad \omega_{p,4} = \omega_{p,1} - \omega_{p,2} ,$$

(II.1.5) $$R_j(s) = \prod_{p \in A} (1 - 2\cos \omega_{p,j}\, p^{-s} + p^{-2s})^{-1} ; \quad j = 1 , 2 , 3 , 4 ,$$

(II.1.6) $$F_j(s) = R_j(s)\, B(2s)\, C(s) =^{\text{def}} \sum f_j(n)\, n^{-s} ; \quad j = 1 , 2 , 3 , 4 .$$

B et C étant définis en (I.2.1), observons que l'on a , trivialement,

(II.1.7) $$\zeta(s) = A(s)\, B(s)\, C(s)\, D(s) .$$

Maintenant, et suivant l'usage, soient $\{U_n(x)\}$ les polynômes de Čebyšev définis par

$$U_n(\cos \omega) = \sin(n + 1)\omega / \sin \omega .$$

On sait que l'on a

$$\frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\omega + x^2} = 1 + 2\sum_1^\infty \cos n\omega\, x^n ,$$

$$\frac{1}{1 - 2x\cos\omega + x^2} = \sum_0^\infty U_n(\cos\omega)\, x^n .$$

De là, à partir de la relation trigonométrique

$$\cos(\omega \pm \omega') = \cos\omega\cos\omega' \mp \sin\omega\sin\omega ,$$

nous avons

$$(II.1.8) \qquad \frac{1 - x^2}{(1 - 2x\cos(\omega + \omega') + x^2)(1 - 2x\cos(\omega - \omega') + x^2} = \sum_0^\infty U_n(\cos\omega)\, U_n(\cos\omega')\, x^n .$$

Utilisant (II.1.8), facteur local par facteur local, nous trouvons

$$(II.1.9) \qquad \sum_1^\infty f_1(n)\, f_2(n)\, n^{-s} = F_3(s)\, F_4(s)\, C(s)\, B(2s)/A(2s) ,$$

mais $R_3(s)\, R_4(s) = F_3(s)\, F_4(s)/B^2(2s)\, C^2(s)$.
D'où, finalement

$$(II.1.10) \qquad \sum_1^\infty f_1(n)\, f_2(n)\, n^{-s} = \frac{F_3(s)\, F_4(s)\, C(2s)\, D(2s)}{\zeta(2s)\, C(s)} .$$

Tout l'intérêt de (II.1.10) réside dans les cas particuliers quand C et D se composent d'un nombre fini d'éléments, d'où

$$(II.1.11) \qquad \sum_1^\infty f_1(n)\, f_2(n)\, n^{-s} = \frac{F_3(s)\, F_4(s)}{\zeta(2s)}\, V(s) .$$

2. Exemples simples.

Si nous prenons $B = C = D = \emptyset$, $A = P$, $\omega_{p,1} = \omega_{p,2} = 0$ (pour tous les p), nous retrouvons (II.1.1).

Si

$p \in A \sim (D/p) = 1$, $p \in B \sim (D/p) = -1$,

$p \in C \sim (D/p) = 0$, $D = \emptyset$,

on a

$$(II.2.1) \qquad \sum d^2(n , D)\, n^{-s} = \zeta^2(s)\, L_D^2(s) \prod_{p|D}(1 + p^{-s})^{-1}/\zeta(2s) ,$$

généralisation légère de (II.1.2).

3. Corps diédraux.

Un corps diédral K (non galoisien, donc) de degré premier $\ell = 2\lambda + 1$ aura pour discriminant $\Delta = (Df^2)$, et

$$(II.3.1) \qquad \zeta_K(s) = \zeta(s) \prod_{j=1}^{\lambda} \Phi_j(s) .$$

On a

$p \in A \sim (Df^2/p) = 1$, $p \in B \sim (Df^2/p) = -1$,

$p \in D \sim p|f$, $p \in C \sim p|D$, $p \nmid f$.

On définit alors des entiers m_p , $0 \leqslant m_p \leqslant \lambda$, tels que

$$(II.3.2) \qquad \Phi_j(s) = \prod_A (1 - 2\cos \frac{2\pi j m_p}{\ell}\, p^{-s} + p^{-2s})^{-1}\, B(2s)\, C(s) ,$$

formule qui nous permet de définir $\Phi_j(s)$, pour tout j .

$$(II.3.3) \qquad \Phi_{\ell+j}(s) = \Phi_{\ell-j}(s) = \Phi_j(s) , \quad \Phi_0(s) = \zeta(s)\, L_D(s)\, V(s) ,$$

D'où, par application de (II.1.11),

$$(II.3.4) \qquad \sum \varphi_j(n)\, \varphi_k(n)\, n^{-s} = \Phi_{j+k}(s)\, \Phi_{j-k}(s)\, V(s)/\zeta(2s) ,$$

$$(II.3.5) \qquad \sum \varphi_j^2(n)\, n^{-s} = \zeta(s)\, L_D(s)\, \Phi_{2j}(s)\, V(s)/\zeta(2s) ,$$

$$(II.3.6) \qquad \sum d(n , D)\, \varphi_j(n)\, n^{-s} = \Phi_j^2(s)\, V(s)/\zeta(2s) .$$

(II.1.3) est un cas particulier de (II.3.5).

Détermination des m_p . - Dans $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, chaque élément de A se décompose en produit de 2 idéaux conjugués $p = pp'$. A chaque idéal premier de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, on associe un "caractère de classe" selon la structure du groupe des formes quadratiques de discriminant Df^2 . Soient

$$X(p) = \exp(2\pi i m_p/\ell) , \quad X(p') = \exp(-2\pi i m_p/\ell)$$

(le système des caractères n'est pas toujours unique, dans ce cas il y a plusieurs corps non conjugués de discriminant $(Df^2)^\lambda$. Par exemple, $\ell = 5$, $D = -47$, $\Delta = 47^2$

$m_p = 0$, si $p = x^2 \pm xy + 12y^2$
$m_p = 1$, si $p = 2x^2 \pm xy + 6y^2$
$m_p = 2$, si $p = 3x^2 \pm xy + 4y^2$.

4. Grossen-Charakter de Hecke.

HECKE ([4], p. 215-230, p. 249-287) a défini des "caractères de magnitude" et une fonction $\zeta_K(s , \lambda^m)$, satisfaisant une équation fonctionnelle assez simpl quand K est un corps quadratique de nombre de classe égal à 1.

$$(II.4.1) \qquad \zeta(s , \lambda^m) = \prod_A (1 - 2\cos m\omega_p^*\, p^{-s} + p^{-2s})^{-1}\, B(2s)\, C(s)$$

avec $p \in A \sim (D/p) = 1$, $p \in B \sim (D/p) = -1$, $p \in C \sim (D/p) = 0$, les $\{\omega_p^*\}$ dépendant de la représentation $4p = x^2 - Dy^2$, et de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Soit, alors

$$(II.4.2) \qquad \zeta(s , \lambda^m) =^{\text{def}} \sum_1^\infty Z(n , \lambda^m)\, n^{-s} ,$$

$$(II.4.3) \qquad \zeta(s , \lambda^0) = \zeta(s)\, L_D(s) .$$

Donc,

$$(II.4.4) \qquad \sum Z(n , \lambda^m)\, Z(n , \lambda^{m'})\, n^{-s} = \frac{V(s)\, \zeta(s , \lambda^{m+m'})\, \zeta(s , \lambda^{m-m'})}{\zeta(2s)} ,$$

$$(II.4.5) \qquad \sum Z^2(n , \lambda^m)\, n^{-s} = V(s)\, L_D(s)\, \zeta(s)\, \zeta(s , \lambda^{2m})/\zeta(2s) ,$$

$$(II.4.6) \qquad \sum d(n , D)\, Z(n , \lambda^m)\, n^{-s} = V(s)\, \zeta^2(s , \lambda^m)/\zeta(2s) .$$

5. Fonctions modulaires.

Les fonctions modulaires (évitons le mot "formes") de dimension négative (c'est-à-dire de poids positif) peuvent avoir des coefficients multiplicatifs. On a alors des fonctions de type

$$g(q) =^{\text{def}} \sum g(n)\, q^n \; ; \quad q = \exp(\pi i T) \; ; \quad g(nm) = g(n)\, g(m) \quad \text{si} \quad (m\,,\, n) = 1 \; .$$

Des manipulations faciles permettent alors d'obtenir des informations sur $\sum_1^\infty g^2(n)\, n^{-s}$ et $\sum g^2(n)\, q^n$ (qui n'est pas une fonction modulaire).
Par exemple, pour la fonction $T(n)$ de Ramanujan, en définissant ω_p par $2\cos \omega_p = T(p)\, p^{-11/2}$, on obtient l'essentiel des résultats obtenus par RANKIN (avec $A = P$). On peut aussi considérer la fonction $\chi_k(n)$ de Glaisher qui se rattache d'ailleurs à la théorie de Hecke par les caractères de magnitude.

6. Corps biquadratiques (bicycliques).

Partons de

$$\text{(II.6.1)} \qquad \zeta(s)\, L_{D_j}(s) = \sum d(n\,,\, D_j)\, n^{-s} \; ; \quad j = 1\,,\, 2\,,\quad D_1 \neq D_2 \; ,$$

et soit D_3 tel que $D_1\, D_2 = D_3\, m^2$. Donc D_3 est le discriminant de $\mathbb{Q}(\sqrt{D_1\, D_2})$.
La fonction ζ de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D_1}\,,\, \sqrt{D_2})$ est alors

$$\text{(II.6.2)} \qquad \zeta_K(s) = \zeta(s)\, L_{D_1}(s)\, L_{D_2}(s)\, L_{D_3}(s) \; .$$

Soit $F_{D_1,D_2}(s) = \sum_1^\infty d(n\,,\, D_1)\, d(n\,,\, D_2)\, n^{-s}$.
Pour obtenir une formule explicite, nous devons employer une méthode un peu différente, distribuant les premiers non diviseurs de $D_1\, D_2 = D_3\, m^2$ en 4 classes:
$p \in A \sim (D_1/p) = (D_2/p) = 1$, $p \in B_1 \sim (D_1/p) = -(D_2/p) = 1$,
$p \in B_2 \sim (D_2/p) = -(D_1/p) = 1$, $p \in B_3 \sim (D_1/p) = (D_2/p) = -1$.
Calculant, alors, explicitement les facteurs locaux pour les 4 classes A, B_1, B_2, B_3, nous avons

$$F_{D_1,D_2}(s) = \prod_A \frac{1 - p^{-2s}}{(1 - p^{-s})^4} \prod_{B_1} \frac{1 + p^{-2s}}{(1 - p^{-2s})^2} \prod_{B_2} \frac{1 + p^{-2s}}{(1 - p^{-2s})^2} \prod_{B_3} \frac{(1 - p^{-2s})^2}{(1 - p^{-2s})^2} \; .$$

D'où, en rétablissant les facteurs locaux correspondant à $p \mid D_1\, D_2$, nous avons

$$\text{(II.6.3)} \qquad \sum_1^\infty d(n\,,\, D_1)\, d(n\,,\, D_2)\, n^{-1} = V(s)\, \zeta(s)\, L_{D_1}(s)\, L_{D_2}(s)\, L_{D_3}(s)/L_{D_3}(2s) \; ,$$

$$\text{(II.6.4)} \qquad \sum d(n\,,\, D_1)\, d(n\,,\, D_2)\, n^{-s} = V(s)\, \zeta_K(s)/L_{D_3}(2s) \; .$$

A noter le "diviseur" $L_{D_3}(2s)$.

7. Corps bicubiques.

Soient deux corps cubiques K_1, K_2, de discriminant $Df_1^2 = \Delta_1$ et Df_2^2. Le

corps composé $K_1 K_2$ contient alors deux autres corps cubiques K_3 et K_4. Ces corps sont faciles à déterminer.

(a) Si $D = -3$, $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m_1})$, $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m_2}) \Longrightarrow K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m_1 m_2})$, $K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m_1 m_2^2})$.

(b) Si $D \neq -3$, il existe, alors, 2 éléments de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3D})$

$$\mu_1 = \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-3D}, \quad \mu_2 = \alpha_2 + \beta_2 \sqrt{-3D}$$

tels que

$$K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{\mu_1} + \sqrt[3]{\mu'_2}), \quad K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{\mu_2} + \sqrt[3]{\mu'_2})$$

impliquent

$$K_3 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{\mu_1 \mu_2} + \sqrt[3]{\mu'_1 \mu'_2}), \quad K_4 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{\mu_1 \mu'_2} + \sqrt[3]{\mu'_1 \mu_2}).$$

A un nombre fini d'exceptions près, les premiers, appartenant à la classe 3 dans K_1, appartiennent à cette classe dans K_2, K_3 et K_4. Il y a lieu alors de procéder à une étude des autres possibilités. Si (p) appartient à la classe 1 dans K_1, et à la classe 2 dans K_2, il appartient aussi à la classe 2 dans K_3 et K_4. Par une méthode analogue à celle employée pour les corps biquadratiques bicycliques, on trouve alors, en notant

(II.7.1) $\Phi_j(s) = \sum \varphi_j(n)\, n^{-s}$, fonction d'Artin de K_j, $j = 1, 2, 3, 4$,

$$\sum \varphi_1(n)\, \varphi_2(n)\, n^{-s} = \frac{\Phi_3(s)\, \Phi_4(s)\, V(s)}{\zeta(2s)}$$

Note. - Dans tous les cas, le calcul explicite de $V(s)$ (indéterminé ici) est fastidieux, mais sans difficulté.

III. Cas général.

1. Une formule générale.

Considérons maintenant une fonction de la classe E (formule (II.1.1)), en utilisant pour la représentation des facteurs locaux $F_p(p^{-s})$ la représentation (I.1.3).

(III.1.1) $$F_p(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-h(n,p)}.$$

Nous avons

(III.1.2) $$\Psi(s) = \sum \psi(n)\, n^{-s} = \prod_p \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p^{-ns})^{-h(n,p)}.$$

Soit

(III.1.3) $$\Psi(s) = \prod (1 - p^{-s})^{-h(1,p)}\, H_2(s),$$

(III.1.4) $$\Psi(s) = \prod (1 - p^{-s})^{-h(1,p)} (1 - p^{-2s})^{-h(2,p)}\, H_3(s), \ldots$$

Il s'ensuit, en comparant les coefficients de $\Psi(s)$ et d'une fonction "jumelle",

$$\bar{\Psi}(s) = \prod \bar{F}_p(p^{-s})$$

que si, pour tout p, les coefficients $h(1, p)$ sont les mêmes pour F_p et $\bar{F}_p$;

les deux fonctions ont les mêmes zéros, et les mêmes singularités, si $Re(s) > \frac{1}{2}$, etc.

Dans un autre sens, généralisons (III.1.2), nous obtenons :

$$\Psi_k(s) = \sum d_k(n)\, \psi(n)\, n^{-s} , \tag{III.1.5}$$

alors

$$\Psi_k(s) = [\Psi(s)]^k\, H_2(s) . \tag{III.1.6}$$

D'où, une connaissance complète des singularités, et des zéros de $\Psi_k(s)$ dans $Re(s) > \frac{1}{2}$.

De même, si pour tout p tel que $(D/p) = -1$, $h(1 , p) = 0$, on a

$$\sum d(n , D)\, \psi(n)\, n^{-s} = \Psi^2(s)\, H_2(s)$$

(voir, comme cas particulier (II.3.6)).

On observera que si $F_p(x) = 1 + \sum_1^\infty F_{p,1}\, x^n$ on a $F_{p,1} = h(1 , p)$.

IV. Les fonctions T et U et les corps intermédiaires.

1. Formules élémentaires.

Soient $p(x)$ un polynôme irréductible à coefficients rationnels, ν son degré, x_j $(j = 1 , 2 , \dots , \nu)$ ses racines, Gal son groupe de Galois, et T la transitivité de Gal (sur ν éléments). Notons

$$K_n = \mathbb{Q}(x_1 , x_2 , \dots , x_n) \; ; \; n \leqslant T , \tag{IV.1.1}$$

$$\zeta_n(s) \text{ fonction } \zeta \text{ de } K_n . \tag{IV.1.2}$$

On voit que, puisque $n \leqslant T$, K_n sera de degré $\nu(\nu - 1)\dots(\nu - n + 1)$. Soit, alors, $\lambda_n(p^j)$ le nombre des idéaux premiers dans K_n divisant p et de norme p^n. Nous avons alors

$$\zeta_n(s) = \prod_j \prod_p (1 - p^{-js})^{-\lambda_n(p^j)} \; ; \; 1 \leqslant n \leqslant T , \tag{IV.1.3}$$

$$\zeta_n(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-\lambda_n(p)}\, H_2(s) . \tag{IV.1.4}$$

Définissons alors

$$\zeta_1(s) =^{\text{def}} \sum_1^\infty Z(n)\, n^{-s} , \tag{IV.1.5}$$

$$\Phi(s) = \zeta_1(s)/\zeta(s) =^{\text{def}} \sum \varphi(n)\, n^{-s} , \tag{IV.1.6}$$

$$T_k(s) =^{\text{def}} \sum [Z(n)]^k\, n^{-s} , \tag{IV.1.7}$$

$$U_k(s) =^{\text{def}} \sum [\varphi(n)]^k\, n^{-s} . \tag{IV.1.8}$$

Un argument combinatoire élémentaire montre que

$$\lambda_2(p) = \lambda_1(p)(\lambda_1(p) - 1) \text{ si } T \geqslant 2 , \tag{IV.1.9}$$

$$\lambda_n(p) = \lambda_1(p)(\lambda_1(p) - 1)\dots(\lambda_1(p - n + 1) \text{ si } T \geqslant n . \tag{IV.1.10}$$

D'où, utilisant les résultats de III.1, nous avons :

(IV.1.11) $$T_2(s) = \zeta_1(s)\ \zeta_2(s)\ H_2(s) \quad \text{si} \quad T \geqslant 2 ,$$

(IV.1.12) $$T_3(s) = \zeta_1(s)\ \zeta_2^3(s)\ \zeta_3(s)\ H_2(s) \quad \text{si} \quad T \geqslant 3 ,$$

(IV.1.13) $$U_2(s) = \frac{\zeta(s)\ \zeta_2(s)}{\zeta_1(s)}\ H_2(s) \quad \text{si} \quad T \geqslant 2 ,$$

(IV.1.14) $$U_3(s) = \frac{\zeta_3(s)\ \zeta_1(s)}{\zeta(s)}\ H_2(s) \quad \text{si} \quad T \geqslant 3 ,$$

(IV.1.15) $$\sum_1^\infty Z(n)\ \varphi(n)\ n^{-s} = \zeta_2(s)\ H_2(s) \quad \text{si} \quad T \geqslant 2 ,$$

et autres formules comparables.
En particulier,

$T_2(s)$ a un pôle double en $s = 1$ si $T \geqslant 2$,

$T_3(s)$ a un pôle quintuple en $s = 1$ si $T \geqslant 3$,

$U_2(s)$ a un pôle simple en $s = 1$ si $T \geqslant 2$,

$U_3(s)$ a un pôle simple en $s = 1$ si $T \geqslant 3$.

$T_2(s)$, $T_3(s)$ n'ont aucune autre singularité dans $\mathrm{Re}(s) > 1/2$. La question de $U_3(s)$, $U_2(s)$ est plus compliquée. $U_3(s)$ n'a pas d'autre singularité si Gal est résoluble. $U_2(s)$ n'a pas d'autre singularité si le groupe de Galois de N/K_1 , N , clôture galoisienne de K_1 , est résoluble, ce qui est le cas des groupes S_5 , $\mathfrak{A}_5$, $PGL_2(p)$ et $PSL_2(p)$ sur $p + 1$ éléments.

2. Généralisations.

La formule élémentaire qui donne $\lambda_n(p)$, connaissant $\lambda_1(p)$, a été généralisée par M. P. SCHÜTZENBERGER pour $\lambda_n(p^j)$, $j = 2 , 3 , \ldots$

L'application formelle de ces formules, quand la transitivité T est trop petite, ne donne plus <u>une</u> fonction ζ mais un produit de γ_n fonction ζ que nous continuerons à noter $\zeta_n(s)$. Dans ce cas,

$T_2(s)$ a un pôle de multiplicité $1 + \gamma_2$

$U_2(s)$ a un pôle de multiplicité γ_2 , etc.

Le comportement de T_k et U_k dans $0 < \mathrm{Re}(s) \leqslant 1/2$ demande la prise en considération des $\lambda_1(p^2)$ pour $1/3 < \mathrm{Re}(s) \leqslant 1/2$ etc. En fait, définissant $\{c(n , p)\}$ par

(IV.2.1) $$\prod_n (1 - p^{-ns})^{-\lambda(p^r)} = 1 + \sum_1^\infty c(n , p) p^{-ns} ,$$

nous avons à calculer les coefficients $h(k , n , p)$ tels que

(IV.2.3) $$1 + \sum_{n=1}^\infty [c_1(n , p)]^k\ p^{-ns} = \prod_{n=1}^\infty (1 - p^{-ns})^{-h(k,n,p)}$$

pour étudier le comportement de $T_k(s)$. Pour $U_k(s)$, le raisonnement est analogue. Ceci ne semble pouvoir être fait actuellement que pour chaque groupe de Galois,

sans formulation générale inutile. Mentionnons cependant les résultats suivants, faciles à obtenir,

1° Si ν est premier et si $|\mathrm{Gal}| = \nu(\nu - 1)$ (le groupe métacyclique de degré ν), alors $T_2(s)$ a, en $s = 1/2$, un zéro de multiplicité $(\nu^2 - 1)/4$.

2° Si $\mathrm{Gal} \sim S_\nu$, $\nu \geqslant 3$, $T_2(s)$ a, en $s = 1/2$, un zéro de multiplicité 2.

Ceci suggère que la fonction $T_2(s)$ est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.
Pour $PGL_2(p)$ sur $p + 1$ éléments, on trouve que $1/2$ est un zéro de multiplicité $(p + 1)/4$ si $p = 7$, 11.
Pour en finir avec ce sujet, mentionnons seulement que si ν est premier, et si $|\mathrm{Gal}| = \nu(\nu - 1)/K$, $T_2(s)$ a un pôle de multiplicité $1 + K$ en $s = 1$.

3. Corps cubiques.

Nous allons examiner de plus près le cas $\mathrm{Gal} \sim S_3$. Rappelons trois formules élémentaires.

$$\text{(IV.3.1)} \qquad \sum_0^\infty (n + 1)^2 x^n = (1 - x^2)/(1 - x^4) ,$$

$$\text{(IV.3.2)} \qquad \sum_0^\infty (n + 1)^3 x^n = (1 + 4x + x^2)/(1 - x)^4 ,$$

$$\text{(IV.3.3)} \qquad \sum_0^\infty (n + 1)^2 (n + 2)^2 x^n/4 = (1 + 4x + x^2)/(1 - x)^5 .$$

Définissant les nombres $h(n)$ par

$$\text{(IV.3.4)} \qquad (1 + 4x + x^2) = \prod (1 - x^n)^{-h(n)} ,$$

on a

$$\text{(IV.3.5)} \qquad h(n) = - \mathrm{Tr} \sum_{dd'=n} \mu(d')(- 2 + \sqrt{3})^d ,$$

$$\text{(IV.3.6)} \qquad \mathrm{signe}\ h(n) = (- 1)^{n-1} .$$

En fait,

$$\text{(IV.3.7)} \qquad h(1) = 4 , \ h(2) = - 9 , \ h(3) = 16 , \ h(4) = - 45 , \ h(5) = 144 , \ \ldots$$

Dans un corps cubique de discriminant Df^2, nous distribuons les premiers rationnels dans les ensembles A, B, C, D, E selon qu'ils appartiennent à la classe 1, 2, 3, 4, 5, définie en (I.3).
Marquant d'un astérisque les fonctions de E, amputées des facteurs locaux (ramifiés) rattachés aux classes 4 et 5, nous avons

$$\zeta^*(s) = A(s)\, B(s)\, C(s) , \quad L^*(s) = A(s)\, B(s)\, C(2s)/C(s) , \ \ldots ,$$

les fonctions $A(s)$, ..., étant définies en (I.2.1), d'où les relations

$$\text{(IV.3.8)} \qquad \frac{C^2(s)}{C(2s)} = \frac{\zeta^*(s)}{L^*(s)} \Longrightarrow C(s) = \left(\frac{\zeta^*(s)}{L^*(s)}\right)^{1/2} \left(\frac{\zeta^*(2s)}{L^*(2s)}\right)^{1/4} \ldots$$

$$\text{(IV.3.9)} \qquad \frac{B^3(s)}{B(3s)} = \frac{\zeta^*(s) L^*(s)}{\Phi^*(s)} \Longrightarrow B(s) = \left(\frac{\zeta^*(s) L^*(s)}{\Phi^*(s)}\right)^{1/3} \left(\frac{\zeta^*(3s) L^*(3s)}{\Phi^*(3s)}\right)^{1/9} \ldots$$

$$\text{(IV.3.10)} \qquad A^6(s) = \zeta^*(s)\, L^*(s)\, \Phi^{*2}(s)/B^2(3s)\, C^3(2s) .$$

Après quelques manipulations un peu compliquées, on arrive au résultat suivant.

$$\text{(IV.3.11)} \qquad \frac{A^6(s)\ A(6s)}{A^3(2s)\ A^2(3s)} = \frac{V(s)\ \zeta(s)\ L(s)\ \Phi^2(s)\ L(2s)\ \zeta(6s)}{\zeta^2(2s)\ \Phi(2s)\ \zeta(3s)\ L(3s)} .$$

D'où, pour les fonctions T_2^* et U_3^*, notant $W(s) = \prod_A(1 + 4p^{-s} + p^{-2s})$, nous avons :

$$\text{(IV.3.12)} \qquad T_2^*(s) = A^2(s)\ W(s)\ \zeta_K^*(s)\ \zeta^*(2s)/L^*(2s) ,$$

$$\text{(IV.3.13)} \qquad U_3^*(s) = A^2(s)\ W(s)\ \Phi^*(s) ,$$

$$\text{(IV.3.14)} \qquad T_2^*(s) = \frac{\zeta^*(s)\ \zeta^*(2s)\ U_3(s)}{L^*(2s)} .$$

Rétablissant les facteurs locaux supprimés, et explicitant $V(s)$, on a

$$\text{(IV.3.15)} \qquad U_3(s) = A^2(s)\ W(s)\ \Phi(s) ,$$

$$\text{(IV.3.16)} \qquad T_2(s) = \frac{\zeta(s)\ \zeta(2s)\ U_3(s)\ D^2(s)}{D^2(2s)\ E(2s)\ L(2s)} \prod_E(1 - (D/p)p^{-s})^{-1} .$$

Si on observe que

$$\text{(IV.3.17)} \qquad \sum (n + 1)^k\ x^n = P_{k-1}(x)\ (1 - x)^{-k-1} ,$$

où $P_{k-1}(x)$ est un polynôme de degré $k - 1$, on a en général,

$$\text{(IV.3.18)} \qquad U_{2k+1}(s) = A^{2k}(s) \prod_A P_{2k}(p^{-s})\ \Phi(s) ,$$

et une formule un peu plus compliquée pour U_{2k}, mais nous manquons d'informations sur les polynômes $\{P\}$. On a

$$P_3(x) = (1 + x)(1 + 10x + x^2) , \quad P_4(x) = 1 + 26x + 66x^2 + 26x^3 + x^4$$

(voir néanmoins LAWDEN [6]).

Dans le cas des corps cubiques cycliques, les formules restent valables en convenant que $D = 1$, $L(s) = \zeta(s)$, $\Phi(s) = L^*(s)\ \bar{L}^*(s)$.

Il est très curieux de constater que $A^{2k}(s) \prod P_{2k}(p^{-s})$ est une fonction méromorphe si $\mathrm{Re}(s) > 0$.

V. Applications. Questions ouvertes.

1. Estimations asymptotiques.

Ces résultats donnent des résultats pour l'estimation de certaines sommes partielles de coefficients. Considérons ainsi $\Psi(s)$, défini en (I.2.2), et supposons que $\Psi(s)$, si $\mathrm{Re}(s) > \theta$, $\theta < 1$, n'ait d'autre singularité qu'un pôle simple en $s = 1$. Sous certaines réserves relatives au comportement de $|\Psi(\sigma + it)|$, $t \longrightarrow \infty$, on aura, en utilisant (III.1.5),

$$\text{(V.1.1)} \qquad \sum_{n=1}^{N} \psi(n) = CN + o(N) ,$$

(V.1.2) $$\sum_{n=1}^{N} \psi(n)\, d_k(n) = N p_{k-1}(\log N) + o(N) ,$$

où p_{k-1} est un polynôme, le terme $o(N)$ étant susceptible d'être amélioré.

De la même façon, dans le cas d'un groupe Galois doublement transitif, on a :

(V.1.3) $$\sum_{1}^{N} Z^2(n) = N p_1(\log N) + O(N^{1-\varepsilon}) \; ; \quad \varepsilon > 0 ,$$

(V.1.4) $$\sum_{1}^{N} f^2(n) = C_K N + O(N^{1-\varepsilon}) ,$$

(V.1.5) $$\sum_{1}^{N} \frac{Z^2(n)}{d_2(n)} = C'_K N + O(N^{1-\varepsilon}) .$$

Théoriquement, on peut utiliser, en se servant des methodes exposées par TITCHMARSH [9], ces formules pour essayer d'obtenir une estimation de

$$\int_0^T |\Phi(1/2 + it)|^2 \, dt \quad \text{et} \quad \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^2 \, dt .$$

Des résultats intéressants ont été obtenus par L. WEINSTEIN [10] dans ce sens. Cependant l'état actuel de l'analyse ne permet pas d'obtenir des O-estimations sans hypothèse complémentaire, formes plus ou moins atténuées de l'hypothèse de Riemann généralisée. Néanmoins on obtient ainsi des Ω-estimations toujours intéressantes.

2. Questions ouvertes.

1° Les fonctions $T_k(s)$, $U_k(s)$ sont-elles toujours méromorphes dans leur domaine d'existence ? Ceci semble résulter de résultats inédits de Kurokawa [5]. Dans le cas des corps cubiques, ceci entraine des congruences curieuses pour les nombres $h(n)$ de (IV.3.7).

2° Dans le cas des corps cubiques, on a toujours $T_2(1/2n) = 0$. De même, la fonction représentée par $\sum (d_k(n))^2 n^{-s}$, qui est méromorphe, admet les points $1/2n$ comme zéros (ce sont les seuls zéros réels). Dans quelle mesure cette particularité est-elle partagée par toutes les fonctions $T_k(s)$, $U_k(s)$ pour tous les groupes de Galois ? Quelle information arithmétique donne la multiplicité de ces zéros, en particulier en $1/2$?

3° Si $\{\varphi(n)\}$ est la suite des coefficients d'une quelconque fonction L d'Artin est-il exact que $\sum (\varphi(n))^2 n^{-s}$ n'ait d'autre singularité qu'un pôle simple en $s = 1$ si $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1/2$?

4° Soient K_1 et K_2 2 corps algébriques, $Z_j(n)$, $j = 1 , 2$, les coefficients de leur fonction ζ .

Dans d nombreux cas, $\sum Z_1(n)\, Z_2(n)\, n^{-s}$ a un pôle simple en $s = 1$, et pas d'autre singularité si $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1/2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que cela soit vrai.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARRUCAND (P.). - Quelques propriétés des coefficients des séries L associées aux corps cubiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 1971, Série A, p. 960-963.

[2] ESTERMANN (T.). - On certain functions represented by Dirichlet series, Proc. London math. Soc., 2nd series, t. 27, 1928, p. 435-448.

[3] HASSE (H.). - Arithmetische Theorie des kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoritischer Grundlage, Math. Z., t. 31, 1930, p. 565-582.

[4] HECKE (E.). - Mathematische Werke. - Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1959.

[5] KUROKAWA (A.). - Travail inédit.

[6] LAWDEN (D. F.). - The function $\sum_{n=1}^{\infty} n^r z^n$ and associated polynomials, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 47, 1951, p. 309-314.

[7] MARTINET (J.) et PAYAN (J.-J.). - Sur les extensions cubiques non-galoisiennes des rationnels et leur clôture galoisienne, J. für die reine und angew. Math., t. 228, 1967, p. 15-37.

[8] RAMANUJAN (S.). - Collected papers. - Cambridge, at the University Press, 1927.

[9] TITCHMARSH (E. C.). - The theory of the Riemann zeta-function. - Oxford, at the Clarendon Press, 1951.

[10] WEINSTEIN (L.). - Travail inédit.

[11] WILSON (B. M.). - Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan, Proc. London math. Soc., 2nd Series, t. 21, 1923, p. 235-255.

(Texte reçu le 28 février 1978)

Pierre BARRUCAND
151 rue du Château des Rentiers
75013 PARIS